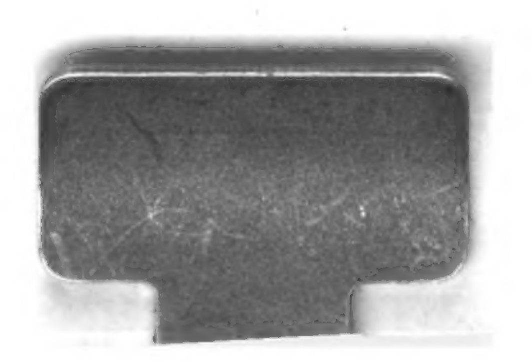
Digitized by Google

Math. U. 63h

Grunert



Digitized by Google

Digitized by Google

In der Dieterich'schen Buchhandlung in Göttingen ist neu erschienen:

Riemann, B., Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung. Bearbeitet von K. Hattendorff. gr. 4. 20 Ngr.

In unserem Verlage ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Einleitung
in eine geometrische Theorie der ebenen Curven.

Von

Dr. Ludwig Cremona,
Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Bologna.

Ins Deutsche übertragen

von

MAXIMILIAN CURTZE,
ordentlich. Lehrer am Königl. Gymnasium zu Thorn.

Mit einer lithographirten Tafel. 20 Bogen. 8°. $1^2/_3$ Thlr.

Geometrische und mechanische
Theorie der Astroiden.

Eine mathematische Monographie.

Von

Dr. H. Jentzsch,
Adjuncten und ordentl. Lehrer am Joachimsthalschen Gymnasium zu Berlin.

Mit Fig.-Taf. Lex.-8°. Broch. 1 Thlr. 20 Sgr.

Beitrag zur Integration der Riccatischen Gleichung.

Von

J. Worpitzky.

Gr. 8°. Broch. Preis 15 Sgr.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung, Th. Kunike.
Greifswald.

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Siebenundvierzigster Theil.

Mit dreizehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1867.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des siebenundvierzigsten Theils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geschichte der Mathematik und Physik.		
XIV.	Historische Notiz. Christian Huygens der erste und eigentliche Erfinder des Princips des Reversionspendels. Von dem Herausgeber	I.	119
XVI.	Platon's Geometrie im Menon und die Parabole des Pythagoras bei Plutarch. Zwei mathematisch-philologische Abhandlungen von Herrn Fr. Carl Wex, Director des Gymnasiums in Schwerin in Mecklenburg	II.	131
	Arithmetik.		
X.	Beweis eines die Pfaff'sche Integrationsmethode betreffenden Lehrsatzes. Von Herrn Prof. Dr. Ladisl. Zajączkowski in Warschau	I.	106
XI.	Integration der Gleichung $a_{m+n}y^{(m+n)}+a_{m+n-1}y^{(m+n-1)}+\ldots+a_{m+1}y^{(m+1)}+(a_m+x)y^{(m)}+a^{m-1}y_{(m-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0$, in welcher $a_{m+n}, a_{m+n-1}, \ldots a_{m+1}, a_m, a_{m-1}, \ldots a_1, a_0$ constante Zahlen bezeichnen. Von Herrn Simon Spitzer, Professor am Polytechnikum in Wien	I.	110
XII.	Ueber Kreisvierecke, in welchen die Seiten, die Diagonalen, der Radius des Kreises und die Fläche rationale Zahlenwerthe haben. Von Herrn Doctor W. Ligowski, Professor der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und am See-Cadetten-Institut in Berlin	I.	113

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XIV.	Einfachste Auflösung zweier Gleichungen von der Form $x^3+y^3=a$, $x^2y+xy^2=b$. Von dem Herausgeber	I.	118
	Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln	I.	120
XXII.	Ueber eine neue Limite, nämlich $\text{Lim}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{2m}\right)$. Von Herrn Professor Franz Unferdinger in Wien	II.	231
XXII.	Dreiecke zu bestimmen, deren Seiten rational sind und in denen die Summe der drei Seiten dreimal so gross ist als die Höhe in Bezug auf eine dieser Seiten. Von dem Herausgeber	II.	233
XXII.	Auflösung dreier Gleichungen von der Form: $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=b,\ y-z=c.$ Von dem Herausgeber	II.	241
XXV.	Ueber einen arithmetischen Satz von Lagrange. Von dem Herausgeber	III.	328
XXVIII.	Summirung einer Reihe, nämlich der Reihe: $\frac{x^2}{2}-n_1.\frac{x^3}{3}+n_2.\frac{x^4}{4}-n_3.\frac{x^5}{5}+\ldots$ Von dem Herausgeber	III.	359
XXVIII.	Summirung einer Reihe von Kreisbogen, nämlich der Reihe: $\text{Arctang}\frac{2}{1^2}+\text{Arctang}\frac{2}{2^2}+\text{Arctang}\frac{2}{3^2}+\ldots$ in infin., deren Summe von Herrn E. Beltrami in Bologna gegeben u. von Herrn Antonio Roiti in Pisa bewiesen worden ist. (Giornale di Matematiche. 1867. p. 189.). Von dem Herausgeber	III.	361
	Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln	III.	362
XXIX.	Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten biquadratischen Gleichung. (Zweite Abtheil. der Abhandlung Thl. XLV. Nr. II.). Von		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Herrn Ferdinand Kerz, Major und Commandeur des Grossherzogl Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt	IV.	363
XXX.	Note sur les formules d'addition des fonctions elliptiques. Par Monsieur Dr. E. G. Björling à Westerås en Suède. (Extrait de l'Aperçu des Transactions de l'Académ. des sciences de Stockholm, séance du 18e avril 1866.) . . .	IV.	399
XXXIV.	Vermischtes aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Herrn Dr. Ludwig Matthiessen in Husum	IV.	457
XXXV.	Ueber ein algebraisches Problem von Herrn Barnaba Tortolini in Rom, die cubischen Gleichungen betreffend. Von Herrn Dr. Ludwig Matthiessen in Husum	IV.	460

Geometrie.

I.	Ueber die ausgezeichneten Kreise des Dreiecks. Von Herrn Karl Kücker, Direktor der Gewerbeschule zu Stettin	I.	1
II.	Die Construction der fünf regulären Körper. Von Herrn Gymnasiallehrer Dr. L. Sohncke in Königsberg i. P.	I.	39
III.	Betrachtung des Flächeninhalts der Curve, deren Gleichung $r = \frac{\gamma}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$ ist. Von Herrn Doctor C. Bender in Tübingen	I.	45
IV.	Ueber die geometrische Aufgabe: Gegeben sind drei Punktenpaare. Man soll einen solchen Kreis construiren, dass dieselben in Bezug auf ihn conjugirte sind. Von Herrn Fuhrmann, Lehrer der Mathematik an der Burgschule in Königsberg i. Pr.	I.	47
XII.	Ueber Kreisvierecke, in welchen die Seiten, die Diagonalen, der Radius des Kreises und die Fläche rationale Zahlenwerthe haben. Von Herrn Doctor W. Ligowski, Professor der Mathema-		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	tik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und am See-Cadetten-Institut in Berlin	I.	113
XV.	Ueber einige Curven höheren Grades. Von Herrn Dr. Hochheim, Lehrer an der Realschule in Magdeburg	II.	121
XVI.	Platon's Geometrie im Menon und die Parabole des Pythagoras bei Plutarch. Zwei mathematisch-philologische Abhandlungen von Herrn Fr. Carl Wex, Director des Gymnasiums in Schwerin in Mecklenburg	II.	131
XVIII.	Ueber einige Formeln zur annähernden Berechnung der körperlichen Räume, mit besonderer Rücksicht auf die Aichung der Schiffe. Von dem Herausgeber	II.	176
XIX.	Die Pothenot'sche Aufgabe auf der Kugel. Von dem Herausgeber	II.	194
XX.	Ueber eine das Ellipsoid betreffende Aufgabe. Von dem Herausgeber	II.	204
XXII.	Durch zwei Punkte einer Ellipse sind Berührende an dieselbe gelegt. Es sollen die Coordinaten ihres Durchschnittspunkts und die Gleichung des durch diesen Punkt gehenden Durchmessers gesucht werden. Man soll ferner die Coordinaten des Punktes, in welchem der Durchmesser und die durch die beiden Berührungspunkte gehende Sehne sich schneiden, bestimmen und zeigen, dass dieser Punkt die Sehne halbirt. Von dem Herausgeber.	II.	227
XXII.	Von einem Dreieck sei eine Seite a, der ihr gegenüberliegende Winkel A und der Radius des einbeschriebenen Kreises gegeben: man soll das Dreieck bestimmen. Von dem Herausgeber	II.	229
XXII.	Dreiecke zu bestimmen, deren Seiten rational sind, und in denen die Summe der drei Seiten dreimal so gross ist als die Höhe in Bezug auf eine dieser Seiten. Von dem Herausgeber	II.	233
XXII.	Bemerkung über die in Thl. XLVI. Nr. VII. aufgelöste Aufgabe. Von Herrn A. Barsky, Studirenden an der Universität in Odessa . . .	II.	235

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXIII.	Die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks, analytisch behandelt. Von Herrn Hofgerichts-Registrator Carl Metzler in Darmstadt.	III.	243
XXIV.	Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen. Von dem Herausgeber	III.	307
XXVIII.	Erweiterung des letzten der in Thl. XLVII. S. 117. mitgetheilten Sätze in folgender Form: „Ist ein vollständiges Vierseit einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben, so schneiden sich die Tangenten der Curve durch zwei gegenüberliegende Scheitel in einem Punkte der Curve;" ferner über den Satz: „Nimmt man auf der einen Seite eines Dreiecks AB einen Punkt D so an, dass $AD:BD = n:m$, so ist: $m.\overline{AC}^2 \pm n.\overline{BC}^2 = (m \pm n)(\overline{CD}^2 \pm AD.BD)$, wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem D zwischen A und B oder auf den Verlängerungen von A, B liegt;" und über den zweiten der a. a. O. mitgetheilten Sätze. Von Herrn M. Curtze, ordentlichem Lehrer am Gymnasium in Thorn	III.	356
XXXVIII.	Eine Aufgabe über einen geometrischen Ort. Aufgabe: Den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte je zweier Berührenden einer Ellipse zu bestimmen, deren Berührungssehne, worunter man bekanntlich die Sehne versteht, welche die Berührungspunkte der beiden Berührenden mit einander verbindet, eine gegebene constante Grösse hat. Von dem Herausgeber	IV.	477
XXXVIII.	Ueber einige Sätze von der Ellipse. Von dem Herausgeber	IV.	480
XXXI.	Ueber das von drei Berührenden einer Parabel gebildete Dreieck. Von dem Herausgeber	IV.	403
XXXII.	Elementar-geometrischer Beweis des Satzes: „Dreiseitige Pyramiden von gleichgrossen		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Grundflächen und gleichgrossen Höhen haben gleichgrosse Volumina." Von Herrn Professor Dr. Hessel an der Universität in Marburg	IV.	433
XXXVI.	Ueber einen Satz von der Ellipse. Von dem Herausgeber	IV.	462
XXXVII.	Ueber einen Satz vom Kreise. Von dem Herausgeber	IV.	468

Trigonometrie.

XXII.	Verallgemeinerung der in Thl. XLVI. S. 359. mitgetheilten Summenformeln (4) und (5) und einige daraus sich ergebende specielle Resultate. Von Herrn M. Curtze, ordentlichem Lehrer am Gymnasium in Thorn	II.	238
XXVIII.	Summirung einer Reihe von Kreisbogen, nämlich der Reihe: $\mathrm{Arc\,tang}\frac{2}{1^2}+\mathrm{Arc\,tang}\frac{2}{2^2}+\mathrm{Arc\,tang}\frac{2}{3^2}+\ldots$ in infin., deren Summe von Herrn E. Beltrami in Bologna gegeben und von Herrn Antonio Roiti in Pisa bewiesen worden ist (Giornale di Matematiche. 1867. p. 189.). Von dem Herausgeber	III.	361

Geodäsie.

V.	Messung auf der kurzen Basis. Von dem Herrn Grafen L. v. Pfeil in Gnadenfrei in Schlesien	I.	49
XIX.	Die Pothenot'sche Aufgabe auf der Kugel. Von dem Herausgeber	II.	194

Mechanik.

VIII.	Geometrischer Ort aller der Punkte, welche von einem Ellipsoide gleich stark angezogen werden. Von Herrn Simon Spitzer, Professor am Polytechnikum in Wien	I.	82

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
XVII.	Ueber die Bestimmung eines Punktes in der Richtungslinie der Resultirenden eines beliebigen Systems von Kräften. Von dem Herausgeber	II.	164
XXII.	Bemerkung über den Rotationskörper des kleinsten Widerstandes, mit Bezug auf die Abhandlung des Herausgebers in Thl. XLV. Nr. XI. Von Herrn Professor Dr. Dienger am Polytechnikum in Carlsruhe	II.	229
XXVI.	Wurfbewegung im widerstehenden Mittel. (Nachtrag zu der Abhandlung in Thl. XLVI. No. XX.). Von Herrn Dr. A. M. Nell, Lehrer an der technischen Schule zu Darmstadt	III.	338
XXXIII.	Wurfbewegung im widerstehenden Mittel. (Zweiter Nachtrag zu der Abhandlung in Thl. XLVI. Nr. XX. S. 361.) Von Herrn Dr. A. M. Nell, Lehrer an der technisch. Schule zu Darmstadt	IV.	449

Optik.

VI.	Eine auffällige Eigenheit der Richtungen der, durch ein Prisma oder durch mehrere Prismen mit parallelen Kanten, gebrochenen Lichtstrahlen. Von Herrn Dr. Wilh. Matzka, Professor an der Hochschule zu Prag	I.	74
IX.	Ueber merkwürdige Punkte der Spiegel- und Linsen-Systeme. Von dem Herausgeber . .	I.	84

Physik.

VII.	Das Aneroid als Instrument zur Messung der Aenderungen der Schwere. Von Herrn Professor H. Schramm in Wiener-Neustadt . . .	I.	78
XXVIII.	Bemerkungen über eine merkwürdige Blitzröhre und über Fluorescenz. Von Herrn Professor T. Hoh am Lyceum in Bamberg	III.	358

(S. Optik No. VI. und No. IX.)

Nautik.

XVIII.	Ueber einige Formeln zur annähernden Berechnung der körperlichen Räume, mit besonderer		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Rücksicht auf die Aichung der Schiffe. Von dem Herausgeber	II.	176

Uebungsaufgaben für Schüler.

XIII.	Drei zu beweisende geometrische Sätze. Mitgetheilt von dem Herausgeber	I.	117
XXI.	47 Aufgaben: De Maximis und Minimis. Die Quantitäten oder Zahlen nach dem Grössesten oder Kleinsten zu bestimmen. Aus Paul Halcken's Deliciae mathematicae oder Mathematisches Sinnenconfect mitgetheilt von dem Herausgeber	II.	218
XXVII.	Drei algebraische Aufgaben besonderer Art. Aus Halcken's Mathematischem Sinnen-Confect mitgetheilt vom Herausgeber	III.	355

Literarische Berichte *).

CLXXXV.	. . . .	I.	1
CLXXXVI.	. . . .	II.	1
CLXXXVII.	. . . .	III.	1
CLXXXVIII.	. . . .	IV.	1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

Digitized by Google

I.

Ueber die ausgezeichneten Kreise des Dreiecks.

Von

Herrn *Karl Kücker*,

Direktor der Gewerbeschule zu Stettin.

1.

Der Punkt k (Taf. I. Fig. 1.) sei der Höhenschnitt des Dreiecks ABC, M der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und m der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Mitten der Dreiecksseiten geht. Die Punkte A', B', C' seien die Mittelpunkte der Kreise, deren jeder durch k und zwei Ecken des Dreiecks ABC geht.

Da die Punkte A, w, k, α harmonische Punkte sind, so sind die Seiten und Höhen des Dreiecks ABC die Hälftungslinien der Winkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ und die Punkte k, C, B, A die Mittelpunkte der Berührungskreise des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$.

Die Gerade AB ist Chordale (Potenzlinie) des Kreises M und des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises; die Gerade $\alpha\beta$ ist Chordale des letztgenannten Kreises und des Mittenkreises m, folglich ist der Durchschnittspunkt x der Geraden AB und $\alpha\beta$ ein Punkt der Chordale der Kreise M und m; eben so findet man, dass die Punkte y und z, in welchen AC und $\alpha\gamma$, BC und $\beta\gamma$ sich schneiden, Punkte der Chordale der Kreise M und m sind. Aehnlich ergiebt sich, dass die Geraden der xvw, yuw und zuv beziehlich die Chordalen der Kreise C' und m, B' und m, A' und m sind, d. h.:

Die Geraden, welche die Aussenwinkel eines Dreiecks oder je zwei Innenwinkel und einen Aussenwinkel hälften, treffen die Dreiecksseiten in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen, und diese Gerade ist Chordale des um das Dreieck geschriebenen Kreises und des Kreises, der sich um das durch diese Hälftungslinien gebildete Dreieck schreiben lässt.

Denkt man um den Kreis M das Dreieck, welches von M in den Punkten A, B und C berührt wird, beschreibt über denjenigen Abschnitten seiner Seiten, die von einem Berührungspunkte und der demselben gegenüberliegenden Seite des Dreiecks ABC begrenzt sind, als Durchmesser Kreise, so werden dieselben von dem Kreise M rechtwinklig geschnitten, und wegen Gleichheit der Winkel mak und MAk werden sie auch von dem Mittenkreise m rechtwinklig geschnitten, mithin ist ihre Centrale Chordale der Kreise M und m und fällt mit der Geraden xyz zusammen. Das Entsprechende gilt natürlich auch von den Geraden xvw, yuw und zvw. Der Kreis, welcher sich um das Dreieck legen lässt, dessen Seiten M in den Punkten A, B, C berühren, hat mit M und m die Gerade xyz zur Chordale, folglich liegt sein Mittelpunkt mit M und m in einer Geraden.

Aus der Gleichheit der Winkel mak und MAk folgt ferner unmittelbar, dass der Kreis m die drei Kreise berührt, welche zu Durchmessern diejenigen Strecken der Geraden MA, MB, MC haben, welche von einer Ecke und der ihr gegenüberliegenden Seite begrenzt sind. Der Kreis m wird in den Punkten α, β, γ von diesen Kreisen umschlossen berührt. Zeichnet man für die Dreiecke kBC, kAC und kAB die entsprechenden Kreise, so werden auch diese von dem Kreise m in den Punkten α, β, γ von Aussen berührt. Eben so werden die entsprechenden Kreise der Dreiecke $A'B'C'$, $MB'C'$, $MC'A'$ und $MA'B'$ von dem Kreise m von Aussen, jedoch in den zweiten Endpunkten der durch α, β, γ gehenden Durchmesser des Mittenkreises berührt. Denkt man von dem Punkte α die Lothe auf AB, AC, $B\beta$ und $C\gamma$ gefällt, so werden die Strecken derselben, welche von dem Punkte α und der Geraden $\beta\gamma$ begrenzt werden, beziehlich durch AB, AC, $B\beta$ und $C\gamma$ gehälftet, mithin liegen die Fusspunkte dieser Lothe in einer Geraden, d. h.:

Lothet man von einer Dreiecksecke auf die Hälftungslinien der Winkel, deren Scheitel die beiden anderen Ecken sind, so liegen die Fusspunkte dieser Lothe mit den Mitten der

Digitized by Google

von dieser Ecke ausgehenden Dreiecksseiten n einer Geraden.

Diese Gerade geht durch die Mitten w' und z' der Strecken aw und az, und weil α und z die Aehnlichkeitspunkte der Berührungskreise B und C, und α und w die Aehnlichkeitspunkte der Berührungskreise A und k sind, so sind die um z' und w' mit den Strecken $z'\alpha$ und $w'\alpha$ geschriebenen Kreise die Isogonalkreise der Kreise B und C, und A und k. Die Punkte w' und z' sind zugleich die Aehnlichkeitspunkte der Kreise, deren Durchmesser die Seiten $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ sind, mithin sind die Kreise um z' und w' zugleich beziehlich der äussere und innere Potenzkreis jener über $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ geschriebenen Kreise. Aehnliches gilt von den Punkten y' und v', und x' und u'. Das liefert den Satz:

Die sechs Isogonalkreise der vier die Seiten eines Dreiecks berührenden Kreise sind die Potenzkreise der drei über den Dreiecksseiten als Durchmesser geschriebenen Kreise, und zwar sind die Isogonalkreise je zweier Aussenkreise die äusseren, und die Isogonalkreise des Innenkreises und je eines Aussenkreises die inneren Potenzkreise.

Dass die Punkte x', y', z' in einer Geraden liegen, folgt unmittelbar daraus, dass die Punkte x, y, z in einer Geraden liegen. Die Verbindungslinie der Fusspunkte der von α und γ auf BA und BC gefällten Lothe ist gleichlaufend AC und geht durch diejenigen Punkte, in denen der Kreis B die Seiten $\beta\gamma$ und $\beta\alpha$ berührt; daraus folgt:

Die Verbindungslinien der Punkte, in welchen jeder Berührungskreis dieselben beiden Dreiecksseiten berührt, bilden ein Rechteck, dessen Diagonalen diesen beiden Dreiecksseiten gleichlaufend sind, und das in dem über der dritten Seite als Durchmesser geschriebenen Kreise liegt. Die Ecken dieses Rechtecks sind die Fusspunkte der Lothe, welche von den Endpunkten der dritten Dreiecksseite auf die Hälftungslinien der Winkel gefällt sind, deren Scheitel diese Endpunkte sind.

2.

Die Halbmesser der Kreise m, k, C, B, A seien der Reihe nach r, δ, δ', δ'', δ'''; die Strecken kA und kB mögen die Längen $2p$ und $2q$ haben; $2c$, $2b$, $2a$ seien die Längen der Seiten AB, AC, BC. Die Punkte a', m, a liegen als Mittelpunkte dreier Kreise, welche die gemeinschaftliche Sehne $\beta\gamma$ haben, in einer

auf $\beta\gamma$ lothrechten Geraden, daher stehen auch AM und $A'k$ senkrecht auf $\beta\gamma$, woraus sogleich folgt:

$$4r\delta' = A\beta . AC;$$

oder:

$$2r\delta' = b . A\beta = Am^2 - r^2;$$

also:

$$1) \ldots \left\{ \begin{array}{l} Am^2 = r^2 + 2r\delta', \quad \text{und entsprechend:} \\ Bm^2 = r^2 + 2r\delta'', \\ Cm^2 = r^2 + 2r\delta''', \\ Km^2 = r^2 - 2r\delta. \end{array} \right.$$

Aus $2r\delta' = b . A\beta$ und $2r\delta''' = b . C\beta$ folgt dann:

$$b^2 = r(\delta' + \delta'''); \quad a^2 = r(\delta'' + \delta'''); \quad c^2 = r(\delta' + \delta'');$$

$$2) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} 2r\delta & = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2, \\ 2r\delta' & = -a^2 + b^2 + c^2, \\ 2r\delta'' & = a^2 - b^2 + c^2, \\ 2r\delta''' & = a^2 + b^2 + c^2. \end{array} \right.$$

Für das stumpfwinklige Dreieck kAB hat man:

$$4r\delta' = A\alpha . Ak;$$

oder:

$$2r\delta' = p . A\alpha;$$
$$2r\delta = p . k\alpha;$$

daher:

$$p^2 = r(\delta' - \delta); \quad q^2 = r(\delta'' - \delta); \quad c^2 = r(\delta' + \delta'');$$

$$3) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} 2r\delta & = c^2 - p^2 - q^2, \\ 2r\delta' & = c^2 + p^2 - q^2, \\ 2r\delta'' & = c^2 - p^2 + q^2, \\ 2r\delta''' & = 8r^2 - (c^2 + p^2 + q^2). \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 2) und 3) machen die Halbmesser der Berührungskreise von den Seiten derjenigen Dreiecke abhängig, deren Ecken die Mittelpunkte der Berührungskreise sind, und zwar gelten die Gleichungen 2) für ein spitzwinkliges, die Gleichungen 3) für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Nennt man u den halben Umfang des Mittendreiecks abc, die Halbmesser seiner Berührungskreise ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', dann ist bekanntlich:

Digitized by Google

$$a^2 = (\varrho' - \varrho)(\varrho'' + \varrho'''),$$
$$b^2 = (\varrho'' - \varrho)(\varrho' + \varrho'''),$$
$$c^2 = (\varrho''' - \varrho)(\varrho' + \varrho'');$$

also:

$$\begin{aligned} 2r\delta &= a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2 \\ &= 2(\varrho'\varrho'' + \varrho'\varrho''' + \varrho''\varrho''') - 2\varrho(\varrho' + \varrho'' + \varrho''') - 8r^2 \\ &= 2(\varrho'\varrho'' - \varrho\varrho' - \varrho\varrho'') + 2\varrho'''(\varrho' + \varrho'' - \varrho) - 8r^2; \end{aligned}$$

d. h.:

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} r\delta &= u^2 - (2r + \varrho)^2, \\ &= (u - a)^2 - (2r - \varrho')^2, \\ &= (u - b)^2 - (2r - \varrho'')^2, \\ &= (u - c)^2 - (2r - \varrho''')^2. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man den halben Umfang des Dreiecks $a'b'k$ mit s, die Halbmesser seiner Berührungskreise mit t, t', t'', t''', dann ist:

$$c^2 = (t' + t'')(t''' - t),$$
$$p^2 = (t'' + t''')(t' - t),$$
$$q^2 = (t' + t''')(t'' - t);$$

$$\begin{aligned} 2r\delta''' &= 8r^2 - (c^2 + p^2 + q^2) \\ &= 8r^2 - 2(t't'' + t't''' + t''t''') + 2t(t' + t'' + t''') \\ &= 8r^2 - 2(t't'' - tt' - tt'') - 2t'''(t' + t'' + t); \end{aligned}$$

d. h.:

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} r\delta''' &= (2r + t)^2 - s^2, \\ &= (2r - t')^2 - (s - p)^2, \\ &= (2r - t'')^2 - (s - q)^2, \\ &= (2r - t''')^2 - (s - c)^2. \end{aligned} \right.$$

Bedeutet e die Entfernung des Mittelpunktes des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des Mittenkreises, so ist nach Gleichung 1) für ein spitzwinkliges Dreieck $e^2 = r^2 - 2r\delta$, und für ein stumpfwinkliges $e^2 = r^2 + 2r\delta'''$; daher ist mit Rücksicht auf die Gleichungen 4) und 5) für jedes Dreieck:

$$6) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} e^2 &= r^2 + 2(2r - \varrho)^2 - 2u^2, \\ &= r^2 + 2(2r - \varrho')^2 - 2(u - a)^2, \\ &= r^2 + 2(2r - \varrho'')^2 - 2(u - b)^2, \\ &= r^2 + 2(2r - \varrho''')^2 - 2(u - c)^2. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Aus den Gleichungen 5) und 4) folgt:

bei jedem stumpfwinkligen Dreiecke ist stets:

$$2r + t > s;\ 2r - t' > s - p;\ 2r - t'' > s - q;\ t''' - 2r > s - c;$$

bei jedem spitzwinkligen Dreiecke ist stets:

$$u > 2r + \varrho;\ u - a > 2r - \varrho';\ u - b > 2r - \varrho'';$$

und, wenn c die grösste Seite des Dreiecks ist:

7) . . . . $\pm(u - c) > 2r - \varrho'''$.

Bei jedem spitzwinkligen Dreiecke ist der Umfang stets grösser als die Summe der Halbmesser der Berührungskreise;

oder: bei jedem spitzwinkligen Dreiecke ist die Summe der Tangenten der halben Dreieckswinkel stets kleiner als 2. Dagegen ist bei jedem Dreiecke, gleichviel ob spitz- oder stumpfwinklig,

$$2(u - a) < 4r - \varrho'.$$

Diese Ungleichheit ergiebt sich aus der bekannten Gleichung:

$$(u - a)^2 = \varrho''\varrho''' - \varrho(\varrho'' + \varrho''');$$

aus derselben folgt:

$$4(u - a)^2 = (\varrho'' + \varrho''')^2 - (\varrho'' - \varrho''')^2 - 4\varrho(\varrho'' + \varrho''');$$

daher:

$$4(u - a)^2 < (\varrho'' + \varrho''')^2 - 2\varrho(\varrho'' + \varrho''');$$

um so mehr:

$$4(u - a)^2 < (\varrho'' + \varrho''' - \varrho)^2;$$

das ist:

8) . . . . $2(u - a) < 4r - \varrho'$.

Das doppelte Zeichen vor der Ungleichheit 7) ist nöthig, da bei einem spitzwinkligen Dreiecke $2r \gtreqless \varrho'''$ sein kann; bei dem Dreiecke z. B., dessen Seiten 12, $9 + \sqrt{6}$ und $9 - \sqrt{6}$ sind, ist $2r = \varrho''' = 5\sqrt{6}$.

Soll $2r = \varrho'''$ sein, so folgt $\varrho + \varrho''' = \varrho' + \varrho''$, oder:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{u - c} = \frac{1}{u - a} + \frac{1}{u - b},$$

oder:

Digitized by Google

$$9) \quad \dots\dots\dots \frac{a+b}{c} = \frac{u(u-c)}{(u-a)(u-b)}.$$

Setzt man jetzt $a+b=xc$ und $a-b=yc$, so erhält man:

$$x = \frac{x^2-1}{1-y^2}$$

und:

$$y^2 = \frac{1+x-x^2}{x};$$

die Seiten des geforderten Dreiecks sind daher:

$$c; \quad \tfrac{1}{2}c\left(x+\sqrt{\frac{1+x-x^2}{x}}\right); \quad \tfrac{1}{2}c\left(x-\sqrt{\frac{1+x-x^2}{x}}\right),$$

während x jeden Werth zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ annehmen kann. Sind die Winkel dieses Dreiecks λ, μ, ν und liegt λ der Seite c gegenüber, so geht die Gleichung 9) in folgende über:

$$x = \frac{a+b}{c} = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\lambda^2.$$

Aus derselben ist ersichtlich, dass der Winkel λ seinen kleinsten Werth erhält, wenn x seinen grössten Werth $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ annimmt. In diesem Falle ist das geforderte Dreieck gleichschenklig; der Winkel λ wird durch die Gleichung erhalten $\cos\lambda = \sqrt{5}-2$; man findet:

$$\lambda = 76^0\, 20'\, 43{,}37''.$$

Bei jedem Dreiecke, dessen grösster Winkel kleiner als dieser Werth von λ ist, ist der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises stets grösser als der Halbmesser des grössten Berührungskreises; eben so bei jedem ungleichseitigen Dreiecke, in welchem der grösste Winkel gleich diesem Werthe von λ ist. Das gleichschenklige Dreieck hat die Diagonale des regelmässigen Fünfecks als eine der gleichen Seiten und den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises als ungleiche Seite.

Für alle Dreiecke, bei welchen $2r = \varrho'''$ ist, bestehen die Gleichungen:

$$\cos\mu + \cos\nu - \cos\lambda = 2\sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}\mu\cos\tfrac{1}{2}\nu = 1;$$

$$c^2 + \varrho^2 = \varrho'''^2 = 4r^2,$$

$$\cos\lambda = \frac{u-c}{u} = \frac{\varrho}{2r}.$$

Digitized by Google

Die letzte Gleichung bietet das Mittel, ein solches Dreieck leicht zu zeichnen, wenn der grösste Winkel λ vorgelegt ist. Man errichtet in einem beliebigen Punkte des einen Schenkels das Loth zu ihm; der Punkt, in welchem dasselbe die Hälftungslinie des Winkels trifft, kann als der Mittelpunkt des in das geforderte Dreieck geschriebenen Kreises betrachtet werden. Der Abschnitt des Lothes, welcher von diesem Mittelpunkte und dem anderen Schenkel begrenzt wird, ist der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises. Errichtet man in dem Punkte, in welchem das Loth den zweiten Schenkel schneidet, das Loth zu letzterem, so trifft dasselbe die Hälftungslinie in dem Mittelpunkte des Kreises ϱ'''. Jede der inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise ϱ und ϱ''' bildet mit den Schenkeln des vorgelegten Winkels das verlangte Dreieck.

Ist λ ein bestimmter Winkel zwischen den Grenzen $76^0\,20'\,43{,}37''$ und 90^0, so ist bei einem Dreiecke, dessen grösster Winkel λ ist, $2r \gtrless \varrho'''$, je nachdem der Unterschied der beiden anderen Winkel μ und ν grösser oder kleiner als der Unterschied der beiden Winkel ist, welche in dem durch die angegebene Konstruktion erhaltenen Dreiecke vorkommen; oder:

$$2r \gtrless \varrho''',$$

je nachdem:

$$\cos \tfrac{1}{2}(\mu - \nu) \lessgtr \cos \tfrac{1}{2}\lambda \,.\, \mathrm{cotang}\,\lambda;$$

oder:

$$\frac{a+b}{c} \lessgtr \mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}\lambda^2$$

ist.

3.

Es seien (Taf. I. Fig. 2) e, d, d' d'' die Mittelpunkte der Berungskreise des Dreiecks ABC; abc sei das Mitttendreieck, die Mittelpunkte seiner Berührungskreise α, β, γ, δ; und ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' seien die Längen ihrer Halbmesser; der Umfang des Mittendreiecks sei u, und seine Seiten bc, ac und ab mögen die Längen a, b und c haben.

Verbindet man A mit den Endpunkten des auf BC senkrecht stehenden Durchmessers des Kreises e, so gehen diese Verbindungslinien, weil A äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise

Digitized by Google

e und *d* ist, durch die Endpunkte des zu *BC* senkrechten Durchmessers des Kreises *d*. Zieht man durch *a*, die Mitte der Strecke *fg*, die Gleichlaufende mit *fA*, so geht dieselbe durch *e*. Ebenso sind *be* und *ce* beziehlich mit den Geraden gleichlaufend, welche *B* und *C* mit den Berührungspunkten *i* und *m* verbinden. Weil nun die durch die Mitten der Seiten des Dreiecks *ABC* gehenden Geraden *ae*, *be* und *ce* sich in *e* schneiden, so treffen sich auch die mit ihnen gleichlaufenden Geraden *fA*, *iB* und *mC* in einem Punkte *t*, der mit *e* und dem Schnitte *s* der Mittellinien in einer Geraden liegt, und letzterer theilt die Strecke *te* nach dem Verhältnisse 1:2.

Dieser Satz ist nach Reuschle's Angabe zuerst von Nagel mitgetheilt worden.

Da die Gerade *dan* mit *Ag* gleichlaufend ist, so ist *n* der Punkt, in welchem der innere Berührungskreis α des Mittendreiecks die Seite *bc* berührt, und weil *s* auch der Schnitt der Mittellinien des Dreiecks *Afg* ist, so geht *ng* durch *s*, der Punkt α liegt auf der Geraden *es* und die vier Punkte *e*, *s*, α, *t* sind harmonische Punkte, welche die Proportion $2:1 = 6:3$ erfüllen. Daraus folgt, dass $tn = nv$ und $Av = ft$ ist, dass *t* der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises desjenigen Dreiecks ist, für welches *ABC* Mittendreieck ist, und dass *ng* die durch *A* mit *BC* gleichlaufend gezogene Gerade in dem Punkte trifft, in welchem letztere von dem Kreise *t* berührt wird und welcher mit *n*, *s*, *g* harmonische Punkte bildet, die auch die Proportion $2:1 = 6:3$ erfüllen.

Weil *B* innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise *d* und *d'* ist, so geht *Bw* durch den Berührungspunkt des Kreises *d''* mit *AC* und ist gleichlaufend mit *db*; eben so ist *lC* gleichlaufend mit *cd* und geht durch den Berührungspunkt des Kreises *d'* mit *AB*. Die drei Geraden *Ag*, *Bw*, *Cl* schneiden sich daher in einem Punkte *t'*, der mit *d* und *s* in einer Geraden liegt, und die Strecke *t'd* wird von *s* nach dem Verhältnisse 1:2 getheilt. Auf der Geraden *ds* liegt auch der Mittelpunkt β des Berührungskreises, welcher die Seite *bc* von aussen berührt; die vier Punkte *t'*, *s*, β, *d* sind harmonische Punkte, welche gleichfalls die Proportion $2:1 = 6:3$ erfüllen, und der Punkt *t'* ist Mittelpunkt eines der äusseren Berührungskreise desjenigen Dreiecks, für welches *ABC* Mittendreieck ist. Eben so erhält man noch zwei Punkte *t''* und *t'''*, welche die Mittelpunkte der beiden anderen äusseren Berührungskreise sind und welche beziehlich mit den Punkten *d'*, *s*, γ und *d''*, *s*, δ harmonische Punkte mit dem Grundverhältnisse

Digitized by Google

1:2 bilden. Jeder der Punkte t, t', t'', t''' ist also der Höhenschnitt des durch die drei anderen bestimmten Dreiecks.

Erwägt man, dass die durch f und g mit Ag und Af gleichlaufend gezogenen Geraden durch eine Ecke des Dreiecks gehen, für welches ABC Mittendreieck ist, so hat man folgende Sätze:

> Zieht man durch die Punkte, in welchen die äusseren Berührungskreise die wirklichen Dreiecksseiten berühren, Gleichlaufende mit den Verbindungslinien der Ecken und der Berührungspunkte des inneren Berührungskreises, so schneiden sich diese Gleichlaufenden in einem Punkte; dieser Punkt liegt mit dem Schnitte der Verbindungslinien und dem Schnitte der Mittellinien in einer Geraden, und letzterer theilt die von den beiden anderen Punkten begrenzte Strecke nach dem Verhältnisse 1:2.
>
> Zieht man durch die Berührungspunkte des inneren Berührungskreises Gleichlaufende mit den Verbindungslinien der Ecken und der Punkte, in welchen die äusseren Berührungskreise die wirklichen Dreiecksseiten berühren, so schneiden sich diese Gleichlaufenden in einem Punkte; dieser Punkt liegt mit dem Schnitte der Verbindungslinien und dem Schnitte der Mittellinien in einer Geraden, und letzterer theilt die von den beiden anderen begrenzte Strecke nach dem Verhältnisse 1:2.

Das Entsprechende gilt natürlich von jeder anderen Gruppe der Berührungskreise.

Die Seiten des Dreiecks mif treffen die Seiten des Dreiecks ABC in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen. In denselben drei Punkten werden die Seiten des Dreiecks ABC auch von den äusseren Berührungssehnen der Kreise d', d'', d geschnitten.

Die Geraden At, Bt, Ct gehen durch die Punkte, in welchen sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Kreise d, d', d'' schneiden; die Verbindungslinien dieser Punkte treffen die Seiten des Dreiecks ABC ebenfalls in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen. Durch dieselben drei Punkte gehen auch die Verbindungslinien der Punkte t', t'', t'''; jene Punkte sind daher nach §. 1. die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kreise, deren Mittelpunkte die Ecken des Dreiecks, und deren Halbmesser die diesen Ecken gegenüberliegenden Dreiecksseiten sind. Das Entsprechende gilt auch hier von jeder anderen Gruppe der Berührungskreise.

Digitized by Google

Mittelst der letzten Bemerkungen lässt sich eine Menge solcher drei Geraden finden, die sich beständig in einem Punkte schneiden.

Weil die Gerade $a\alpha\beta$ gleichlaufend Ae ist, so steht sie auf der Centrale der Berührungskreise d' und d'' senkrecht, und weil sie durch die Mitte a von deren gemeinschaftlicher Tangente BC geht, so ist $a\alpha\beta$ Chordale dieser beiden Berührungskreise und α der Chordalpunkt (Potenzmittelpunkt) der drei äusseren Berührungskreise. Eben so folgt, dass δ, γ, β die Chordalpunkte des innern und je zweier äusseren Berührungskreise sind; d. h.:

Die Chordalpunkte je dreier Berührungskreise eines Dreiecks sind die Mittelpunkte der Berührungskreise des Mittendreiecks.

Die Kreise, deren Durchmesser die Mittellinien eines Dreiecks sind, treffen die Hälftungslinien der Winkel in den sechs Punkten, in welchen die Chordalen je zweier Berührungskreise auf den Hälftungslinien senkrecht stehen.

Da die Chordale der Isogonalkreise der drei äusseren Berührungskreise durch den Punkt α geht, so schneidet der Orthogonalkreis der letzteren die ersteren rechtwinklig, oder er schneidet nach §. 1. die äusseren Potenzkreise derjenigen Kreise rechtwinklig, deren Durchmesser die Dreiecksseiten sind. Denkt man nun um den Punkt α den Kreis vom Halbmesser $\sqrt{u^2+\varrho^2}$ geschlagen; derselbe geht durch die sechs Punkte, in welchen die Seiten des Mittendreiecks die Kreise treffen, deren Durchmesser die Seiten des Urdreiecks sind. Je zwei dieser Punkte, welche auf derselben Seite des Mittendreiecks liegen, sind potenzhaltende Punkte in Bezug auf den äusseren Aehnlichkeitspunkt; die Punkte z. B., welche auf bc liegen, sind potenzhaltende Punkte der Kreise von den Durchmessern AB und AC. Der Kreis α mit dem Halbmesser $\sqrt{u^2+\varrho^2}$ wird daher von jedem der äusseren Potenzkreise rechtwinklig geschnitten, er ist mithin der Orthogonalkreis der drei äusseren Berührungskreise des Dreiecks ABC, und die Grösse $u^2+\varrho^2$ ist die Potenz des Punktes α in Bezug auf jeden derselben. Ebenso findet man, dass die Grössen $(u-a)^2+\varrho'^2$, $(u-b)^2+\varrho''^2$, $(u-c)^2+\varrho'''^2$ beziehlich die Potenzen der Punkte β, γ, δ in Bezug auf den inneren und je zwei der äusseren Berührungskreise sind.

Digitized by Google

4.

Die Bezeichnungen seien Taf. I. Fig. 3. dieselben wie bei Taf. I. Fig. 2.; der Halbmesser des Mittenkreises sei r, m sein Mittelpunkt, M der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC geschriebenen Kreises und p der Höhenschnitt dieses Dreiecks; λ sei die Mitte der Strecke aq. Die Gerade $a\alpha$ hälftet den zur Seite bc gehörenden Bogen des Mittenkreises m, und weil $a\varepsilon$, die Chordale der Kreise d und e, auf $a\alpha$ senkrecht steht, so geht $a\varepsilon$ durch die Mitte φ des zur Sehne aq gehörenden Bogens des Kreises m. Da die zu BC gehörende Dreieckshöhe Aq mit df gleichlaufend ist, so sind q, g, n, f harmonische Punkte und deshalb:

$$af^2 = an.aq = 2an.a\lambda = 2a\varepsilon.a\varphi,$$

oder:

$$a\varphi^2 - af^2 = \varepsilon\varphi^2 - a\varepsilon^2 = d\varphi^2 - da^2,$$

woraus folgt:

$$da^2 - af^2 = d\varphi^2 - a\varphi^2 = df^2,$$

mithin ist die Strecke $a\varphi$ gleich jeder der von φ an die Kreise d und e gelegten Tangenten. Sind nun f' und g' die Punkte, in welchen die Geraden φf und φg die Kreise d und e zum zweitenmale schneiden, so sind wegen der Gleichung:

$$\varphi f'.\varphi f = \varphi g'.\varphi g = \varphi a^2$$

die Punkte f' und g' die Berührungspunkte des Kreises m mit den Kreisen d und e; d. h.:

Die vier Berührungskreise eines Dreiecks werden von dem Mittenkreise desselben berührt, und zwar der innere umschlossen, die äusseren ausgeschlossen.

Da der Punkt α der Chordalpunkt der drei äusseren Berührungskreise ist, so liegt auf der Geraden $m\alpha$ der Mittelpunkt x' eines zweiten Kreises, welcher die drei äusseren Berührungskreise berührt; für ihn und m ist α Aehnlichkeitspunkt. Der Punkt, in welchem dieser Kreis den Kreis d berührt, ist der zweite Durchschnittspunkt i der Geraden $f'\alpha$ mit dem Kreise d. Weil nun α in dem Kreise m liegt, und weil die potenzhaltenden Punkte f' und i auf dem Aehnlichkeitsstrahle $\alpha f'i$ auf derselben Seite von dem Aehnlichkeitspunkte α liegen, so ist α der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise x' und m, und daher berührt x'

die drei Kreise umschliessend. Denken wir jetzt für den Punkt α die beiden halben kleinsten Sehnen der Kreise m und x' auf verschiedenen Seiten der Centrale mx', und nach den Endpunkten dieser Sehnen die Halbmesser gezogen, so sind letztere gleichlaufend; das Rechteck aus den beiden halben kleinsten Sehnen ist gleich dem Rechtecke $\alpha f'.\alpha i$ und nach §. 3. gleich $u^2+\varrho^2$, und weil die halbe kleinste Sehne des Punktes α für den Kreis m nach §. 2. gleich $\sqrt{2r\varrho}$ ist, so ist die halbe kleinste Sehne desselben Punktes für den Kreis x' gleich $\frac{u^2+\varrho^2}{\sqrt{2r\varrho}}$. Man hat somit die Proportion:

$$m\alpha:\alpha x' = \sqrt{2r\varrho}:\frac{u^2+\varrho^2}{\sqrt{2r\varrho}},$$

oder nach §. 2.:

$$\sqrt{r^2-2r\varrho}:\alpha x' = 2r\varrho:u^2+\varrho^2,$$

mithin:

$$\alpha x' = \frac{u^2+\varrho^2}{2r\varrho}\sqrt{r^2-2r\varrho}.$$

Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises x' mit x, so ist:

$$r:x = \sqrt{2r\varrho}:\frac{u^2+\varrho^2}{\sqrt{2r\varrho}},$$

also:

$$x = \frac{u^2+\varrho^2}{2\varrho}.$$

Auf der Geraden $m\beta$ liegt der Mittelpunkt y' eines zweiten Kreises vom Halbmesser y, der die Kreise e, d' und d'' berührt, und β ist Aehnlichkeitspunkt der Kreise y' und m. Der Kreis y' berührt den Kreis e in dem Punkte i', in welchem die Gerade $\beta g'$ den Kreis e zum zweitenmale schneidet, und weil der Punkt β ausserhalb des Kreises m liegt und die potenzhaltenden Punkte i' und g' sich auf dem Aehnlichkeitsstrahle $\beta i'g'$ auf derselben Seite vom Aehnlichkeitspunkte β befinden, so ist β der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise y' und m; der Kreis y' berührt also die drei Kreise in derselben Weise wie m, d. h. e umschliessend, d' und d'' ausschliessend. Denkt man nun durch β eine der gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise y' und m, und nach den Berührungspunkten die Halbmesser gezogen, so sind letztere gleichlaufend, und das Rechteck aus den Entfernungen des Punktes β von den Berührungspunkten der Tangente ist nach

Digitized by Google

§. 3. gleich $(u-a)^2+\varrho'^2$. Weil nach §. 2. die Länge der von β an m gelegten Tangente gleich $\sqrt{2r\varrho'}$ ist, so ist die Länge der von β an y' gelegten Tangente gleich $\frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{\sqrt{2r\varrho'}}$. Man hat daher die Proportion:

$$m\beta : y'\beta = \sqrt{2r\varrho'} : \frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{\sqrt{2r\varrho'}},$$

oder nach §. 2.:

$$\sqrt{r^2+2r\varrho'} : y'\beta = 2r\varrho' : (u-a)^2+\varrho'^2,$$

mithin:

$$y'\beta = \frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{2r\varrho'}\sqrt{r^2+2r\varrho'}.$$

Ferner ist:

$$r : y = \sqrt{2r\varrho'} : \frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{\sqrt{2r\varrho'}},$$

also:

$$y = \frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{2\varrho'}.$$

Ebenso erhält man noch zwei Kreise von den Halbmessern z und v, deren Mittelpunkte z' und v' beziehlich auf den Geraden $m\gamma$ und $m\delta$ liegen, von denen der erste den Kreis e umschliessend, die Kreise d und d'' ausschliessend, der andere e umschliessend, d und d' ausschliessend berührt. Man findet:

$$z'\gamma = \frac{(u-b)^2+\varrho''^2}{2r\varrho''}\sqrt{r^2+2r\varrho''}; \quad v'\delta = \frac{(u-c)^2+\varrho'''^2}{2r\varrho'''}\sqrt{r^2+2r\varrho'''};$$

$$z = \frac{(u-b)^2+\varrho''^2}{2\varrho''}; \quad v = \frac{(u-c)^2+\varrho'''^2}{2\varrho'''}.$$

Zwischen den vier Halbmessern x, y, z, v bestehen noch folgende einfache Beziehungen:

$$x = y+z+v+4r,$$

$$x+\varrho = (y+\varrho')+(z+\varrho'')+(v+\varrho'''),$$

$$(2x-\varrho)(2y-\varrho')(2z-\varrho'')(2v-\varrho''') = i^2,$$

wenn i den Inhalt des Mittendreiecks bedeutet.

Ist das vorgelegte Dreieck gleichseitig, $2a$ die Länge einer Seite, dann ist $y=z=v=\frac{1}{3}a\sqrt{3}$; $x=\frac{5}{3}a\sqrt{3}$.

Digitized by Google

Ist das vorgelegte Dreieck rechtwinklig, 2c seine Hypotenuse, dann ist:

$$x=\frac{c^2+ab}{a+b-c};\quad y=\frac{c^2-ab}{a-b+c};\quad z=\frac{c^2-ab}{-a+b+c};\quad v=\frac{c^2+ab}{a+b+c};$$

$$xv-yz=2c^2.$$

5.

Nennt man die zu den Seiten a, b, c des Mittendreiecks gehörenden Höhen h, h', h'', dann entfernt sich der Punkt α von den Seiten BC, AC und AB um die Strecken $h-\varrho$, $h'-\varrho$, $h''-\varrho$. Lothet man nun von α auf die Seite BC, trägt von α aus auf diesem Lothe die Strecke $\frac{u^2+\varrho^2}{h-\varrho}$ ab und beschreibt über dieser Strecke als Durchmesser den Kreis, so berührt derselbe die drei Kreise d, d', d'' in den Punkten, in welchen die Verbindungslinien des Punktes α mit den auf BC liegenden Berührungspunkten der Kreise d, d', d'' letztere zum zweitenmale schneiden, und zwar berührt er d umschliessend, d' und d'' ausschliessend. Der Halbmesser dieses Kreises ist gleich:

$$\frac{u^2+\varrho^2}{2(h-\varrho)}=\frac{u^2+\varrho^2}{2\varrho}\cdot\frac{a}{b+c}.$$

Lothet man ebenso von α auf AC und AB, trägt von α aus auf diesen Lothen beziehlich die Strecken $\frac{u^2+\varrho^2}{h'-\varrho}$ und $\frac{u^2+\varrho^2}{h''-\varrho}$ ab und beschreibt über denselben als Durchmesser die Kreise, so berühren diese Kreise gleichfalls die Kreise d, d', d'', und zwar berührt der erste d' umschliessend, d und d'' ausschliessend, der zweite d'' umschliessend, d und d' ausschliessend.

Die Halbmesser dieser Kreise sind:

$$\frac{u^2+\varrho^2}{2(h'-\varrho)}=\frac{u^2+\varrho^2}{2\varrho}\cdot\frac{b}{a+c};$$

$$\frac{u^2+\varrho^2}{2(h''-\varrho)}=\frac{u^2+\varrho^2}{2\varrho}\cdot\frac{c}{a+b}.$$

Die eben gebildeten drei Kreise bestehen immer, wie auch das Dreieck gestaltet sein mag; das liefert den Satz:

Die drei Kreise, von denen jeder einen der äusseren Berührungskreise eines Dreiecks

Digitized by Google

umschliessend, die beiden anderen ausschliessend berührt, schneiden sich in einem Punkte, und die nach diesem Punkte gezogenen Durchmesser stehen auf den Dreiecksseiten senkrecht.

Ist c die grösste, b die kleinste Seite des Mittendreiecks, dann sind die Abstände der Punkte β, γ, δ von den Seiten a, b, c der Reihe nach:

$$h+\varrho'; \quad h'-\varrho'; \quad \varrho'-h'';$$

$$h-\varrho''; \quad h'+\varrho''; \quad h''-\varrho''; \quad \varrho'''-h; \quad \varrho'''-h'; \quad \varrho'''+h''.$$

Der Punkt γ liegt dann stets innerhalb des Dreiecks ABC, und die Punkte β und δ ausserhalb desselben.

Lothet man nun von β auf die Seiten BC, AC und AB, trägt auf diesen Lothen von β aus der Reihe nach die Strecken:

$$\frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{h+\varrho'}, \quad \frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{h'-\varrho'}, \quad \frac{(u-a)^2+\varrho''^2}{\varrho'-h''}$$

ab und beschreibt über denselben als Durchmesser die Kreise, so berühren diese Kreise die drei Kreise e, d' und d'', und zwar berührt der erste alle drei ausschliessend, der zweite berührt d' umschliessend, e und d'' ausschliessend; der dritte berührt d'' ausschliessend, e und d' umschliessend.

Die Halbmesser dieser Kreise sind:

$$\frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{2\varrho'}\cdot\frac{a}{b+c}; \quad \frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{2\varrho'}\cdot\frac{b}{c-a}; \quad \frac{(u-a)^2+\varrho'^2}{2\varrho'}\cdot\frac{c}{a-b}.$$

Führt man die entsprechenden Konstruktionen in Bezug auf die Punkte γ und δ aus, so erhält man noch sechs Kreise, von denen die dem Punkte γ entsprechenden drei Kreise die Kreise e, d, d'' berühren, und zwar berührt der erste von ihnen d ausschliessend, e und d'' umschliessend; der zweite alle ausschliessend und der dritte d'' umschliessend, e und d ausschliessend.

Die drei dem Punkte δ entsprechenden Kreise berühren die drei Kreise e, d, d', und zwar berührt der erste von ihnen d ausschliessend, e und d' umschliessend, der zweite d' ausschliessend, e und d umschliessend und der dritte alle ausschliessend. Die Halbmesser dieser sechs Kreise sind der Reihe nach:

$$\frac{(u-b)^2+\varrho''^2}{2\varrho''}\cdot\frac{a}{c-b}; \quad \frac{(u-b)^2+\varrho''^2}{2\varrho''}\cdot\frac{b}{a+c}; \quad \frac{(u-b)^2+\varrho''^2}{2\varrho''}\cdot\frac{c}{a-b};$$

Digitized by Google

$$\frac{(u-c)^2+\varrho'''^2}{2\varrho'''}\cdot\frac{a}{c-b};\quad \frac{(u-c)^2+\varrho'''^2}{2\varrho'''}\cdot\frac{b}{c-a};\quad \frac{(u-c)^2+\varrho'''^2}{2\varrho'''}\cdot\frac{c}{a+b}.$$

Die zwölf Kreise dieses Paragraphen, die vier Kreise des §. 4., der Mittenkreis und die Seiten des Dreiecks stellen die möglichen 32 Kreise vor, von denen jeder drei Berührungskreise des Dreiecks berührt; der Mittenkreis und jede Dreiecksseite bedeuten einen vierfachen Kreis. Ist das Dreieck ABC gleichschenklig, etwa $AB=AC$, also $b=c$, so fallen die Punkte γ und δ in die Seite BC, und die Kreise von den Halbmessern

$$\frac{(u-b)^2+\varrho''^2}{2\varrho''}\cdot\frac{a}{c-b} \text{ und } \frac{(u-c)^2+\varrho'''^2}{2\varrho'''}\cdot\frac{a}{c-b}$$

gehen in die Seite BC über.

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so liegen die Punkte β, γ, δ in den Ecken A, B, C und dreimal zwei Kreise gehen beziehlich in die Seiten BC, AC und AB über.

Für ein gleichschenkliges Dreieck giebt es also ausser dem Mittenkreise und den Seiten nur noch 14, für ein gleichseitiges Dreieck nur noch 10 Kreise, von denen jeder drei Berührungskreise berührt.

Für jedes Dreieck bestehen demnach immer die drei Kreise, von denen jeder den Innenkreis und zwei der Aussenkreise ausschliessend berührt; ferner die drei Kreise, von denen jeder zwei der Aussenkreise ausschliessend, den dritten umschliessend berührt; dann die drei Kreise, von denen jeder den Innenkreis umschliessend und je zwei Aussenkreise ausschliessend berührt, und endlich der Kreis, welcher die drei Aussenkreise umschliessend berührt.

6.

Denken wir jetzt die Kreise, deren Durchmesser die Seiten des Dreiecks ABC (Taf. I. Fig. 3.) sind. Jede Aehnlichkeitsachse derselben ist Chordale für zwei der sie berührenden acht Kreise, und die Chordale je dreier Potenzkreise, deren Mittelpunkte auf einer Aehnlichkeitsachse liegen, ist Centrale zweier berührenden Kreise. Nach §. 1. und §. 4. sind also die Geraden $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ und $p\delta$ die Centralen von je zweien solcher berührenden Kreise, die zu einer Aehnlichkeitsachse als Chordale gehören.

Die Halbmesser der acht berührenden Kreise seien $x_1, x_2, \ldots, x_8$; ihre Mittelpunkte beziehlich $y_1, y_2, \ldots, y_8$; zugleich mögen $y_1, y_2, \ldots, y_8$ die Entfernungen der Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_8$ vom

Punkte p bedeuten; die Abstände der Punkte α, β, γ, δ vom Punkte p seien k, k_1, k_2, k_3. Die Kreise y_1 und y_8 mögen die äussere Aehnlichkeitsachse zur Chordale haben, dann sind die inneren Aehnlichkeitsachsen der Kreise a, b, c die Chordalen der Kreispaare y_2 und y_7, y_3 und y_6, y_4 und y_5. Der Punkt p ist der Chordalpunkt der Kreise a, b, c; wird die Potenz des Punktes p in Bezug auf diese Kreise mit p^2 und werden die Grössen $u-a$, $u-b$, $u-c$ der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet, so ist nach §. 2. Gleichung 4) und 5):

$$1) \ldots\ldots\ldots \quad p^2 = \pm 4[u^2-(2r-\varrho)^2] = \pm 4[u_1^2-(2r-\varrho')^2] = \pm 4[u_2^2-(2r-\varrho'')^2] = \pm 4[u_3^2-(2r-\varrho''')^2];$$

die oberen Zeichen gelten für das spitzwinklige, die unteren für das stumpfwinklige Dreieck.

Der Punkt p ist äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und m, daher ist die Strecke ep gleichlaufend mit αM und gleich $2\alpha M$. Für das Dreieck Mep hat man nun die Gleichung:

$$pe^2+Me^2 = 2mp^2+2me^2,$$

oder da nach §. 4. die Strecke $em = r-2\varrho$ ist,

$$pe^2+4(r^2-2r\varrho) = 2mp^2+2(r-2\varrho)^2.$$

Für das Dreieck αpM besteht die Gleichung:

$$p\alpha^2+M\alpha^2 = 2mp^2+2m\alpha^2,$$

oder:

$$4k^2+pe^2 = 8mp^2+8(r^2-2r\varrho).$$

Die Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten liefert:

$$4k^2 = 6mp^2+12(r^2-2r\varrho)-2(r-2\varrho)^2.$$

Nach §. 2. Gleichung 6) ist aber:

$$6mp^2 = 6r^2-12u^2+12(2r+\varrho)^2,$$

daher:

$$k^2 = 16r^2+8r\varrho+\varrho^2-3u^2,$$

oder:

$$2) \ldots\ldots\ldots \quad k^2-u^2 = (4r+\varrho)^2-4u^2.$$

Durch dieselben Rechnungen findet man:

Digitized by Google

$$2) \ldots\ldots \begin{cases} k_1^2 - u_1^2 = (4r - \varrho')^2 - 4u_1^2, \\ k_2^2 - u_2^2 = (4r - \varrho'')^2 - 4u_2^2, \\ k_3^2 - u_3^2 = (4r - \varrho''')^2 - 4u_3^2. \end{cases}$$

Betrachtet man nun den Punkt α', in welchem das von α auf bc gefällte Loth bc trifft, als den Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser u, so berührt derselbe die Kreise b und c; die Kreise b und c berühren also die drei Kreise α', y_1 und y_8, und ihre Chordale Ap ist Aehnlichkeitsachse der letzteren. Die Geraden $y_1\alpha'$ und $y_1\alpha p$ bilden mit den Gleichlaufenden $\alpha'\alpha$ und Ap ähnliche Dreiecke, aus welchen die Proportion folgt:

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_1 : k = x_1 : u.$$

Ebenso bilden die Geraden $y_8\alpha'$ und $y_1\alpha p$ mit $\alpha'\alpha$ und Ap ähnliche Dreiecke, aus welchen die Proportion folgt:

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_8 : k = x_8 : u.$$

Aus den Proportionen 3) ergiebt sich:

$$y_1^2 - x_1^2 : x_1^2 = k^2 - u^2 : u^2,$$
$$y_8^2 - x_8^2 : x_8^2 = k^2 - u^2 : u^2;$$

die Multiplikation liefert:

$$4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_1 x_8 = \pm \frac{u^2 p^2}{u^2 - k^2};$$

das obere Zeichen gilt für alle spitzwinkligen Dreiecke und für jedes stumpfwinklige Dreieck, bei welchem $2u > 4r + \varrho$ ist; das untere Zeichen gilt für jedes stumpfwinklige Dreieck, bei welchem $2u < 4r + \varrho$ ist. Durch dieselben Betrachtungen findet man:

$$5) \ldots\ldots \begin{cases} y_2 : x_2 = y_7 : x_7 = k_1 : u_1, \\ y_3 : x_3 = y_6 : x_6 = k_2 : u_2, \\ y_4 : x_4 = y_5 : x_5 = k_3 : u_3. \end{cases}$$

Aus diesen Proportionen ergiebt sich dann:

$$6) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} x_2 x_7 = \dfrac{u_1^2 p^2}{k_1^2 - u_1^2}, \\ x_3 x_6 = \dfrac{u_2^2 p^2}{k_2^2 - u_2^2}, \\ x_4 x_5 = \dfrac{u_3^2 p^2}{k_3^2 - u_3^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 5) und 6) gelten für jedes Dreieck.

Das vorgelegte Dreieck ABC sei spitzwinklig.

Dann liegt der Punkt p innerhalb sämmtlicher Potenzkreise der Kreise a, b, c, und deshalb schneiden sich stets drei solche Potenzkreise, deren Mittelpunkte auf einer Aehnlichkeitsachse liegen, in denselben beiden Punkten. Weil ferner der Punkt p Aehnlichkeitspunkt zweier solcher die Kreise a, b, c berührenden Kreise ist, die zu einer Aehnlichkeitsachse als Chordale gehören, so liegen potenzhaltende Punkte der berührenden Kreise auf einem durch p gehenden Aehnlichkeitsstrahle zu verschiedenen Seiten des Punktes p. Da nun nach §. 2. Gleichung 4) und 8) für jedes spitzwinklige Dreieck $2u > 4r + \varrho$; $2u_1 < 4r - \varrho'$; $2u_2 < 4r - \varrho''$; $2u_3 < 4r - \varrho'''$ ist, so ist nach Gleichung 2) dieses §. $k < u$; $k_1 > u_1$; $k_2 > u_2$; $k_3 > u_3$ und daher, wegen der Gleichung 3) und 5) $y_1 < x_1$; $y_8 < x_8$ und $y_2, y_3, \ldots, y_7$ beziehlich grösser als $x_2, x_3, \ldots, x_7$. Der Punkt p liegt also innerhalb der Kreise y_1 und y_8 und ist deren äusserer Aehnlichkeitspunkt; beide Kreise berühren daher die Kreise a, b, c gleichartig; der eine umschliesst sie alle drei, der andere wird von allen umschlossen. Der Punkt p liegt ausserhalb jedes der noch übrigen sechs berührenden Kreise und ist innerer Aehnlichkeitspunkt für jedes dieser drei Kreispaare; der eine Kreis jedes dieser Paare berührt zwei der Kreise a, b, c ausgeschlossen und wird von dem dritten umschlossen, der zweite berührt den dritten ausschliessend und wird von den beiden ersten umschlossen. Die Kreise jedes dieser drei Paare liegen ganz aus einander, ohne einen Punkt gemein zu haben; die Kreise y_1 und y_8 dagegen liegen ganz in einander.

Nach §. 3. schneidet der Kreis vom Mittelpunkte a und dem Halbmesser $\sqrt{u^2+\varrho^2}$ die drei äusseren Potenzkreise der Kreise a, b, c rechtwinklig; der Kreis, dessen Mittelpunkt der Höhenschnitt p und dessen Halbmesser die Strecke p ist, wird von diesen Potenzkreisen im Durchmesser geschnitten; ferner werden dieselben Kreise von y_1 und y_8 rechtwinklig geschnitten. Bezeichnet man nun den Abstand des Punktes p von der äusseren Aehnlichkeitsachse der Kreise a, b, c mit z, so hat man, wegen einer bekannten Eigenschaft der Chordale die Gleichungen:

$$u^2 + \varrho^2 + p^2 = (k+z)^2 - z^2,$$

oder:

$$7) \quad \ldots \ldots \ldots \quad u^2 - k^2 + \varrho^2 + p^2 = 2kz$$

und, weil die Punkte y_1 und y_8 auf der Geraden $p\alpha$ auf derselben Seite von p liegen,

$$(y_1 + z)^2 - (y_8 + z)^2 = x_1^2 - x_8^2 = (y_1 + y_8 + 2z)(y_1 - y_8);$$

Digitized by Google

oder, mit Rücksicht auf die Proportionen 3):

$$8) \ldots \ldots \frac{u^2-k^2}{u}(x_1+x_3)=2kz.$$

Aus 7) und 8) folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 1) und 2):

$$9) \ldots \frac{u^2-k^2}{u}(x_1+x_3)=8u^2-2(4r+\varrho)(4r+2\varrho).$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit

$$\frac{1}{x_1 x_3}=\frac{u^2-k^2}{u^2 p^2}$$

liefert:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}=\frac{8u^2-2(4r+\varrho)(4r+2\varrho)}{up^2},$$

oder, wenn man um der Kürze willen $2u$ mit α, $4r+2\varrho$ mit β und $4r+\varrho$ mit γ bezeichnet:

$$10) \ldots \ldots \frac{1}{x_1 x_3}=\frac{4(\alpha^2-\gamma^2)}{\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)},$$

$$11) \ldots \ldots \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}=\frac{4(\alpha^2-\beta\gamma)}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Aus 10) und 11) ergiebt sich:

$$12) \ldots \ldots \frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_3}=\frac{4(\beta-\gamma)}{\alpha^2-\beta^2};$$

das doppelte Zeichen in der Gleichung 12) ist vernachlässigt, weil dasselbe nur eine Vertauschung der Werthe für x_1 und x_3 bewirkt. Aus 11) und 12) folgt:

$$13) \ldots \ldots \frac{1}{x_1}=\frac{2(\alpha-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)}; \quad \frac{1}{x_3}=\frac{2(\alpha+\gamma)}{\alpha(\alpha+\beta)};$$

$$14) \ldots \frac{1}{x_1}=\frac{1}{u}+\frac{\varrho}{2u(u-2r-\varrho)}; \quad \frac{1}{x_3}=\frac{1}{u}-\frac{\varrho}{2u(u+2r+\varrho)}.$$

Für die Kreise y_2 und y_7 hat man, wenn z_1 den Abstand des Punktes p von der betreffenden inneren Aehnlichkeitsachse bedeutet:

$$u_1^2+\varrho'^2+p^2=(k_1+z_1)^2-z_1^2,$$

oder:

$$15) \ldots \ldots u_1^2-k_1^2+\varrho'^2+p^2=2k_1 z_1.$$

Digitized by Google

Weil nun p der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise y_2 und y_7 ist, so liegen die Punkte y_2 und y_7 auf der Geraden $p\beta$ zu verschiedenen Seiten des Punktes p, und daher ist:

$$(y_2+z_1)^2-(y_7-z_1)^2 = x_2^2-x_7^2 = (y_2+y_7)(y_2-y_7+2z_1),$$

woraus wegen der Proportionen 5) folgt:

$$16) \quad .. \frac{u_1^2-k_1^2}{u_1}(x_2-x_7) = 8u_1^2-2(4r-\varrho')(4r-2\varrho');$$

wird diese Gleichung durch die erste der Gleichungen 6) getheilt, so erhält man;

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_7} = \frac{8u_1^2-2(4r-\varrho')(4r-2\varrho')}{u_1p^2}.$$

Wenn man $2u_1$ mit α_1; $4r-2\varrho'$ mit β_1, $4r-\varrho'$ mit γ_1 bezeichnet, so ist:

$$17) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_7} = \frac{4(\alpha_1^2-\beta_1\gamma_1)}{\alpha_1(\alpha_1^2-\beta_1^2)},$$

$$18) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x_2x_7} = \frac{4(\gamma_1^2-\alpha_1^2)}{\alpha_1^2(\alpha_1^2-\beta_1^2)},$$

und daher:

$$19) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_7} = \frac{4(\gamma_1-\beta_1)}{\alpha_1^2-\beta_1^2}.$$

Aus 17) und 19) folgt:

$$20) \quad \ldots\ldots \frac{1}{x_2} = \frac{2(\alpha_1+\gamma_1)}{\alpha_1(\alpha_1+\beta_1)}; \quad \frac{1}{x_7} = \frac{2(\gamma_1-\alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_1-\beta_1)};$$

oder:

21)

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{u_1}+\frac{\varrho'}{2u_1(u_1+2r-\varrho')}; \quad \frac{1}{x_7} = -\frac{1}{u_1}+\frac{\varrho'}{2u_1(u_1-2r+\varrho')}.$$

Ganz eben so findet man:

$$22) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{2(\alpha_2+\gamma_2)}{\alpha_2(\alpha_2+\beta_2)}; & \dfrac{1}{x_6} = \dfrac{2(\gamma_2-\alpha_2)}{\alpha_2(\alpha_2-\beta_2)}; \\ \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{2(\alpha_3+\gamma_3)}{\alpha_3(\alpha_3+\beta_3)}; & \dfrac{1}{x_5} = \dfrac{2(\gamma_3-\alpha_3)}{\alpha_3(\alpha_3-\beta_3)}; \end{array} \right.$$

oder:

Digitized by Google

23)

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{u_2} + \frac{\varrho''}{2u_2(u_2 + 2r - \varrho'')}; \quad \frac{1}{x_6} = -\frac{1}{u_2} + \frac{\varrho''}{2u_2(u_2 - 2r + \varrho'')};$$

$$\frac{1}{x_4} = \frac{1}{u_3} + \frac{\varrho'''}{2u_3(u_3 + 2r - \varrho''')}; \quad \frac{1}{x_5} = -\frac{1}{u_3} + \frac{\varrho'''}{2u_3(u_3 - 2r + \varrho''')}.$$

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, $2a$ die Länge einer Seite, dann ist $u = \frac{3}{2}a$; $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{2}a$; $\varrho = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$; $\varrho' = \varrho'' = \varrho''' = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ und $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, daher:

$$x_2 = x_3 = x_4 = \frac{a}{13}(3\sqrt{3} - 1); \quad x_5 = x_6 = x_7 = \frac{a}{13}(3\sqrt{3} + 1);$$

$$x_8 = \tfrac{1}{3}a(3 + \sqrt{3}); \quad x_1 = \tfrac{1}{3}a(3 - \sqrt{3});$$

mithin $x_1 + x_8 = 2a$.

Ist das Dreieck ABC rechtwinklig, $BC = 2a$ seine Hypotenuse, so ist $\varrho = u_1$; $\varrho' = u$; $\varrho'' = u_3$; $\varrho''' = u_2$; also $2u = \varrho + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' = 4r + 2\varrho$, oder $\alpha = \beta$; $\alpha_1 + \beta_1 = 0$; $\alpha_2 - \beta_2 = 0$; $\alpha_3 - \beta_3 = 0$; und daher ist:

$$x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0;$$

$$x_3 = \frac{4u_2^2}{3u_2 + a}; \quad x_4 = \frac{4u_3^2}{3u_3 + a}; \quad x_7 = \frac{4u_1^2}{a - 3u_1}; \quad x_8 = \frac{4u^2}{3u + a}.$$

7.

Das Dreieck ABC ist stumpfwinklig.

Dann liegt der Punkt p ausserhalb sämmtlicher Potenzkreise der Kreise a, b, c, und deshalb befinden sich solche potenzhaltenden Punkte jedes Paares der berührenden Kreise, welche auf einem durch p gehenden Aehnlichkeitsstrahle liegen, auf derselben Seite des Punktes p.

Weil bei einem stumpfwinkligen Dreiecke $4r + \varrho \gtreqless 2u$ sein kann, so kann auch nach Gleichung 2), §. 6. $k \gtreqless u$ sein, mithin können zufolge der Proportionen 3) §. 6. die Halbmesser x_1 und x_8 grösser, gleich oder kleiner als beziehlich die Abstände der Mittelpunkte y_1 und y_8 vom Punkte p sein; der Punkt p kann deshalb, je nach der Beschaffenheit des Dreiecks ABC, innerhalb oder ausserhalb der Kreise y_1 und y_8 liegen, d. h. er ist

zuweilen innerer, zuweilen äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise y_1 und y_8. Welcher Aehnlichkeitspunkt aber p auch sein mag, immer schneiden der Kreis p vom Halbmesser p und der Kreis α vom Halbmesser $\sqrt{u^2+\varrho^2}$ die drei äusseren Potenzkreise der Kreise a, b, c rechtwinklig; es ist daher stets, wenn z auch hier den Abstand des Punktes p von der äusseren Aehnlichkeitsachse der Kreise a, b, c bedeutet:

$$u^2+\varrho^2-p^2=(k\pm z)^2-z^2,$$

oder:

$$u^2-k^2+\varrho^2-p^2=\pm 2kz,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung 1) §. 6.:

$$1) \ldots\ldots \pm 2kz = 8u^2-2(4r+\varrho)(4r+2\varrho).$$

Die Kreise von den Mittelpunkten p und α haben zwei, einen oder keinen Punkt gemein, je nachdem $z \lesseqgtr p$ ist, d. h. je nachdem:

$$\pm kp \gtreqless 4u^2-(4r+\varrho)(4r+2\varrho)$$

ist, oder wenn man quadrirt und für p^2 und k^2 die Werthe aus Gleichung 1) und 2) §. 6. setzt, je nachdem:

$$2) \ldots\ldots\ldots\ldots p \gtreqless 2\varrho$$

ist. Ist nun $4r+\varrho>2u$, so ist immer $p>2\varrho$; die Kreise p und α schneiden sich also auf ihrer Chordale, der äusseren Aehnlichkeitsachse der Kreise a, b, c; und weil die Kreise y_1, y_8, p und α die Chordale gemein haben, so schneiden sich in diesem Falle auch stets die Kreise y_1 und y_8, und jeder von beiden berührt alle drei Kreise a, b, c umschliessend. Ist $4r+\varrho<2u$, so berührt der eine der Kreise y_1 und y_8 die Kreise a, b, c ausschliessend, der andere umschliessend, und dabei können die beiden Kreise y_1 und y_8 sich schneiden, sich von aussen berühren, oder der eine ganz in dem anderen liegen, je nachdem die Beziehungen von Gleichung 2) statt finden.

Da nach Gleichung 8) §. 2. für jedes Dreieck $4r-\varrho'>2u_1$ ist, so ist auch wegen der Proportionen 5) §. 6. $k_1>u_1$; $k_2>u_2$; $k_3>u_3$; daher sind zufolge der Proportionen 3) §. 6. die Halbmesser $x_2, x_3, \ldots, x_7$ beziehlich kleiner als die Entfernungen der

Mittelpunkte $y_2, y_3, ..., y_7$ vom Punkte p. Der Punkt p ist mithin äusserer Aehnlichkeitspunkt für jedes noch übrige Paar berührender Kreise, und der eine Kreis jedes Paares berührt die Kreise a, b, c in derselben Weise als der andere. Ist BC die grösste Dreiecksseite, so berührt ein Kreispaar, etwa y_2 und y_7, die Kreise b und c umschliessend und wird selbst von a umschlossen; das zweite Paar, etwa y_3 und y_6, berührt den Kreis b ausschliessend und wird von a und c umschlossen; das dritte Paar y_4 und y_5 berührt den Kreis c ausschliessend und wird von a und b umschlossen. Die Kreise y_3 und y_6 können sich sowohl schneiden, als auch berühren, als auch ganz aus einander liegen, eben so die Kreise y_4 und y_5, je nachdem eine der drei Beziehungen erfüllt ist:

$$p \gtreqless 2\varrho'', \quad \text{oder:} \quad p \gtreqless 2\varrho''';$$

dagegen können sich die Kreise y_2 und y_7 niemals schneiden oder berühren, sondern müssen beständig ganz aus einander liegen, weil stets p kleiner als der Durchmesser $2\varrho'$ des grössten Berührungskreises ist. Zugleich ist ersichtlich, dass bei jedem stumpfwinkligen Dreiecke immer nur ein Paar der berührenden Kreise eine Berührung unter sich eingehen kann, beim spitzwinkligen Dreiecke dagegen kein Paar.

Behalten wir die beim spitzwinkligen Dreiecke eingeführten Bezeichnungen auch hier bei, dann ist:

$$(y_1+z)^2-(y_8 \pm z)^2 = x_1^2 - x_8^2 = (y_1 \mp y_8)(y_1 \pm y_8 + 2z),$$

während die oberen Zeichen gelten, wenn p äusserer, und die unteren, wenn p innerer Aehnlichkeitspunkt ist, also je nachdem $4r+\varrho \gtrless 2u$ ist.

Wendet man auf die letzte Gleichung die Proportionen 3) §.6. an, so erhält man:

$$3) \;.\;.\; \frac{u^2-k^2}{u}(x_1 \pm x_8) = 2kz = 8u^2 - 2(4r+\varrho)(4r+2\varrho),$$

oder:

$$3) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{u^2-k^2}{u}(x_1 \pm x_8) = 2(\alpha^2 - \beta\gamma).$$

Multiplicirt man Gleichung 3) mit:

$$4) \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{1}{x_1 x_8} = \mp \frac{u^2-k^2}{u^2 p^2} = \mp \frac{4(\alpha^2-\gamma^2)}{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)},$$

Digitized by Google

so entsteht:

$$5) \ldots\ldots \quad \frac{1}{x_1} \pm \frac{1}{x_8} = -\frac{4(\alpha^2-\beta\gamma)}{\alpha(\beta^2-\alpha^2)},$$

daher:

$$6) \ldots\ldots \quad \frac{1}{x_1} \mp \frac{1}{x^8} = \frac{4(\beta-\gamma)}{\beta^2-\alpha^2}$$

und:

$$7) \ldots\ldots \quad \frac{1}{x_1} = \frac{2(\alpha+\gamma)}{\alpha(\alpha+\beta)}; \quad \frac{1}{x_8} = \pm\frac{2(\gamma-\alpha)}{\alpha(\beta-\alpha)},$$

oder:

$$8) \quad \frac{1}{x_1} = \frac{1}{u} - \frac{\varrho}{2u(u+2r+\varrho)}; \quad \frac{1}{x_8} = \pm\left(\frac{1}{u} - \frac{\varrho}{2u(2r+\varrho-u)}\right).$$

Da p für jedes der noch übrigen Paare berührender Kreise äusserer Aehnlichkeitspunkt ist, so erhält man die die Kreise $y_2, y_3, \ldots, y_7$ betreffenden Formeln, wenn man in den Gleichungen 5) und 6) nur die oberen Zeichen gelten lässt und der Reihe nach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ statt α; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ statt β und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ statt γ setzt. Man erhält:

$$9) \ldots\ldots \quad \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_7} = \frac{4(\beta_1\gamma_1-\alpha_1^2)}{\alpha_1(\beta_1^2-\alpha_1^2)};$$

$$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_6} = \frac{4(\beta_2\gamma_2-\alpha_2^2)}{\alpha_2(\beta_2^2-\alpha_2^2)}; \quad \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{4(\beta_3\gamma_3-\alpha_3^2)}{\alpha_3(\beta_3^2-\alpha_3^2)}.$$

$$10) \ldots\ldots \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_7} = \frac{4(-\gamma_1+\beta_1)}{\alpha_1^2-\beta_1^2};$$

$$\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_6} = \frac{4(\gamma_2-\beta_2)}{\beta_2^2-\alpha_2^2}, \quad \frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_5} = \frac{4(\gamma_3-\beta_3)}{\beta_3^2-\alpha_3^2}.$$

$$11) \ldots \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{2(\alpha_1+\gamma_1)}{\alpha_1(\alpha_1+\beta_1)}, & \dfrac{1}{x_7} = \dfrac{2(\gamma_1-\alpha_1)}{\alpha_1(\beta_1-\alpha_1)}, \\ \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{2(\alpha_2+\gamma_2)}{\alpha_2(\alpha_2+\beta_2)}, & \dfrac{1}{x_6} = \dfrac{2(\gamma_2-\alpha_2)}{\alpha_2(\beta_2-\alpha_2)}, \\ \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{2(\alpha_3+\gamma_3)}{\alpha_3(\alpha_3+\gamma_3)}, & \dfrac{1}{x_5} = \dfrac{2(\gamma_3-\alpha_3)}{\alpha_3(\beta_3-\alpha_3)}. \end{array}\right.$$

12)

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{u_1} + \frac{\varrho'}{2u_1(u_1+2r-\varrho')}, \quad \frac{1}{x_7} = \frac{1}{u_1} + \frac{\varrho'}{2u_1(2r-\varrho'-u_1)},$$

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{u_2} + \frac{\varrho''}{2u_2(u_2+2r-\varrho'')}, \quad \frac{1}{x_6} = \frac{1}{u_2} + \frac{\varrho''}{2u_2(2r-\varrho''-u_2)},$$

$$\frac{1}{x_4} = \frac{1}{u_3} + \frac{\varrho'''}{2u_3(u_3+2r-\varrho''')}, \quad \frac{1}{x_5} = \frac{1}{u_3} + \frac{\varrho'''}{2u_3(2r-\varrho'''-u_3)}.$$

Theilt man die Einheit durch die Gleichungen 6) und 10) und addirt die letzteren Werthe, so entsteht:

$$13) \ldots \quad \frac{x_1 x_8}{x_8 \mp x_1} = \frac{x_2 x_7}{x_7 - x_2} + \frac{x_3 x_6}{x_6 - x_3} + \frac{x_4 x_5}{x_5 - x_4}.$$

Aus den Gleichungen 7) und 11) folgt:

$$\frac{u - x_1}{u} = -\frac{\varrho}{\alpha + \gamma}, \quad \text{also:} \quad \frac{1}{u - x_1} = -\frac{\alpha + \gamma}{u\varrho},$$

oder:

14)

$$\frac{1}{x_1 - u} = \frac{2}{\varrho} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}, \quad \frac{1}{u - x_8} = \pm\left(-\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right),$$

$$\frac{1}{u_1 - x_2} = \frac{2}{\varrho'} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u}, \quad \frac{1}{u_1 - x_7} = \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u} - \frac{2}{\varrho'},$$

$$\frac{1}{u_2 - x_3} = \frac{2}{\varrho''} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u}, \quad \frac{1}{u_2 - x_6} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u} - \frac{2}{\varrho''},$$

$$\frac{1}{u_3 - x_4} = \frac{2}{\varrho'''} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u}, \quad \frac{1}{u_3 - x_5} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u} - \frac{2}{\varrho'''}.$$

Nach Gleichung 5) und 9) ist:

$$\frac{1}{x_1} \pm \frac{1}{x_8} = \frac{k^2 - u^2 + p^2 - \varrho^2}{up^2} = \frac{1}{u} - \frac{4u}{p^2} + \frac{4r\varrho(4r + 2\varrho)}{u\varrho p^2},$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_7} = \frac{k_1^2 - u_1^2 + p^2 - \varrho'^2}{u_1 p^2} = \frac{1}{u_1} - \frac{4u_1}{p^2} + \frac{4r\varrho'(4r - 2\varrho')}{u_1 \varrho' p^2},$$

$$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_6} = \frac{k_2^2 - u_2^2 + p^2 - \varrho''^2}{u_2 p^2} = \frac{1}{u_2} - \frac{4u_2}{p^2} + \frac{4r\varrho''(4r - 2\varrho'')}{u_2 \varrho'' p^2},$$

$$\frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{k_3^2 - u_3^2 + p^2 - \varrho'''^2}{u_3 p^2} = \frac{1}{u_3} - \frac{4u_3}{p^2} + \frac{4r\varrho'''(4r - 2\varrho''')}{u_3 \varrho''' p^2};$$

zieht man von der Summe der letzten drei Gleichungen die erste ab, so findet man:

$$15) \ldots \quad \frac{1}{x_1} \pm \frac{1}{x_8} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} + \frac{1}{x_7}.$$

Die den Gleichungen 13)—15) entsprechenden Gleichungen für das spitzwinklige Dreieck sind:

$$\frac{x_1 x_8}{x_8 - x_1} = \frac{x_2 x_7}{x_2 + x_7} + \frac{x_3 x_6}{x_3 + x_6} + \frac{x_4 x_5}{x_4 + x_5}.$$

$$\frac{1}{u-x_1}=\frac{2}{\varrho}-\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3},\qquad \frac{1}{x_8-u}=\frac{2}{\varrho}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3},$$

$$\frac{1}{u_1-x_2}=\frac{2}{\varrho'}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}-\frac{1}{u},\qquad \frac{1}{u_1+x_7}=-\frac{2}{\varrho}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}-\frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{u_2-x_3}=\frac{2}{\varrho''}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_3}-\frac{1}{u},\qquad \frac{1}{u_2+x_6}=-\frac{2}{\varrho}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_3}-\frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{u_3-x_4}=\frac{2}{\varrho'''}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u},\qquad \frac{1}{u_3+x_5}=-\frac{2}{\varrho}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u}.$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_8}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_7}+\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_6}+\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_5}.$$

Die für das stumpfwinklige Dreieck geltenden Formeln weichen zum Theil von denen ab, welche für das spitzwinklige Dreieck Gültigkeit haben; die im VIII. Bande dieser Zeitschrift, Seite 217—221, mitgetheilten Formeln gelten ausschliesslich für das spitzwinklige Dreieck.

Ist der stumpfe Winkel $180^0=2R$, also die Summe zweier Dreiecksseiten gleich der dritten, etwa $AC+BC=AB$, oder $a+b=c$, dann berühren sich die über den Seiten AC und BC beschriebenen Kreise ausschliessend und werden von dem über AB beschriebenen Kreise umschlossen berührt. Die ursprüngliche Aufgabe vereinfacht sich zu folgender: Den Halbmesser des Kreises zu berechnen, welcher drei sich berührende Kreise berührt, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen. Solcher berührenden Kreise giebt es stets nur zwei, welche von gleicher Grösse sind und von denen jeder die über den Seiten AC und BC beschriebenen Kreise ausschliessend berührt und von dem über der grössten Seite AB beschriebenen Kreise umschlossen berührt wird.

Für den Halbmesser dieser berührenden Kreise findet man leicht den Werth:

$$\varrho=\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}=\frac{abc}{c^2-ab}.$$

8.

Das Dreieck ist stumpfwinklig und $4r+\varrho=2u$.

Ein solches Dreieck ist z. B. das, dessen Seiten 45, 40 und 13 sind. Dann ist p stets grösser als 2ϱ, die beiden Kreise y_1 und y_8 schneiden sich also; der Halbmesser des Kreises y_1 ist:

$$x_1=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\tfrac{1}{2}(u+2r+\varrho)=u+\tfrac{1}{2}\varrho=2r+\tfrac{3}{4}\varrho;$$

der Halbmesser x_8 des Kreises y_8 wird unendlich und der Kreis y_8 geht in eine Gerade, die äussere Aehnlichkeitsachse der Kreise a, b, c, über. Aus $4r + \varrho = 2u$ folgt $k = u$ und $z = 2\varrho$; der Kreis y_1 geht daher durch den Höhenschnitt des Dreiecks ABC, und die äussere Aehnlichkeitsachse berührt den Kreis, dessen Mittelpunkt der Höhenschnitt und dessen Halbmesser gleich dem Halbmesser des in das Dreieck geschriebenen Kreises ist. Der Schnitt der Mittellinien des Dreiecks ABC und der Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises entfernen sich von der äusseren Aehnlichkeitsachse um die Strecken $\frac{2}{3}u$ und $u + \varrho = 2r + \frac{3}{2}\varrho$.

> **Wenn bei einem Dreiecke die Summe der Halbmesser der äusseren Berührungskreise gleich dem Umfange ist, dann lässt sich an die drei Kreise, deren Durchmesser die Dreiecksseiten sind, eine gemeinschaftliche Tangente ziehen;**

und umgekehrt:

> **Haben die drei Kreise, deren Durchmesser die Dreiecksseiten sind, eine gemeinschaftliche Tangente, so ist der Umfang des Dreiecks gleich der Summe der Halbmesser der äusseren Berührungskreise.**

Es bleibt noch die Beschaffenheit des Dreiecks zu untersuchen, bei welchem $4r + \varrho = 2u$ ist.

Die Bedingungsgleichung:

$$\varrho' + \varrho'' + \varrho''' = 2u$$

geht leicht in folgende über:

$$1) \;.\;.\;.\;.\;.\; (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3)^2 = 4u\, u_1 u_2 u_3;$$

aus welcher zunächst folgt, dass sich der Inhalt i des Dreiecks durch die Seiten in nachstehender Formel ausdrücken lässt:

$$8i = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

Setzt man nun $u_1 = x^2$; $u_2 = y^2$; $u_3 = z^2$ und erwägt, dass $u = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so entsteht:

$$2) \; (xy + xz + yz)(xy + xz - yz)(xy - xz + yz)(-xy + xz + yz) = 0.$$

Die Gleichung 2) erfordert, dass einer der drei letzten Faktoren Null sei. Ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite gleich $2c$, so muss sein:

Digitized by Google

$$-xy+xz+yz=0,$$

oder:

$$3) \ldots\ldots \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}.$$

Setzt man in 3) $x=vy$, so ist:

$$\frac{y}{z}=\frac{v+1}{v},$$

und daraus ergiebt sich:

$$4) \ldots\ldots \quad z:x:y=v:v+1:v(v+1).$$

Aus Gleichung 4) folgt:

$$5) \ldots \quad u_1=(v+1)^2; \quad u_2=v^2(v+1)^2; \quad u_3=v^2;$$

und:

6)

$$a=v^2[1+(v+1)^2]; \; b=v^2+(v+1)^2; \; c=(v^2+1)(v+1)^2; \; u=(v^2+v+1)^2,$$

während v jeden reellen Werth (ausgenommen $v=-1$) annehmen kann. Für den Inhalt, den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und die Halbmesser der eingeschriebenen Kreise findet man:

$$i=v^2(v+1)^2(v^2+v+1);$$

$$r=\frac{(v^2+1)[1+(v+1)^2][v^2+(v+1)^2]}{4(v^2+v+1)};$$

$$\varrho=\frac{v^2(v+1)^2}{v^2+v+1}; \quad \varrho'=v^2(v^2+v+1);$$

$$\varrho''=v^2+v+1; \quad \varrho'''=(v+1)^2(v^2+v+1).$$

Aus den Werthen für i, r, ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' ist ersichtlich, dass dieselben stets rational sind, sobald die Seiten des Dreiecks rational sind. Nennt man die Dreieckswinkel 2α, 2β, 2γ, so ist:

$$7) \ldots \quad \tang\gamma=\frac{(v+1)^2}{v^2+v+1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^2}.$$

Die Tangente nimmt ihren kleinsten Werth für $v=\infty$ an, dann ist $\tang\gamma=1$; der Winkel 2γ ist also stets stumpf. Die Tangente nimmt ihren grössten Werth für $v=1$ an, dann ist $\tang\gamma=\frac{4}{3}$ oder $\cos\gamma=\frac{3}{5}$, und also:

$$\gamma=53^0\,7'\,48{,}36'' \quad \text{und} \quad 2\gamma=106^0\,15'\,36{,}72''.$$

Digitized by Google

Das Dreieck, welches dem Werthe $v=1$ entspricht, ist gleichschenklig, seine Seiten sind 5, 5 und 8; es wird erhalten, wenn man die grosse Kathete des einfachsten pythagoräischen Dreiecks (dessen Seiten 3, 4, 5 sind) über den Scheitel des rechten Winkels hinaus um sich selbst verlängert. Für alle Dreiecke, bei welchen $4r+\varrho=2u$ ist, bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta+\operatorname{tang}\gamma&=2,\\ \operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2+\operatorname{tang}\gamma^2&=2,\\ \sqrt{\operatorname{tang}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tang}\beta}&=\sqrt{\operatorname{tang}\gamma}.\end{aligned}$$

Da $\varrho'+\varrho''=2u-\varrho'''$ ist, so ist:

$$8) \; . \; . \; . \; . \; . \quad \operatorname{tang}\gamma=\frac{\varrho'''}{u}=\frac{c}{\varrho'+\varrho''}=\frac{c}{2u-\varrho'''}.$$

Aus der bekannten Gleichung:

$$u^2=\varrho'\varrho''+\varrho'\varrho'''+\varrho''\varrho'''$$

folgt:

$$9) \; . \; . \; (\varrho'-\varrho'')^2=\varrho'''(4u-3\varrho''')=\varrho'''[2(\varrho_1+\varrho'')-\varrho'''];$$

der Halbmesser ϱ''' ist also stets kleiner als $\frac{4}{3}u$; er erreicht seinen grössten Werth $\frac{4}{3}u$ bei dem gleichschenkligen Dreiecke vom Winkel $106^0\,15'\,36{,}72''$.

Jede der Gleichungen 8) und 9) dient dazu, mit Leichtigkeit das Dreieck zu zeichnen, bei welchem $4r+\varrho=2u$ ist, wenn der stumpfe Winkel vorgelegt ist. Ist der stumpfe Winkel grösser als $106^0\,15'\,36{,}72''$, so ist stets $4r+\varrho>2u$; ist dagegen der stumpfe Winkel kleiner als $106^0\,15'\,36{,}72''$, so ist $4r+\varrho \gtrless 2u$, je nachdem sich die spitzen Winkel um weniger oder mehr von einander unterscheiden, als die spitzen Winkel in dem Dreiecke, bei welchem $4r+\varrho=2u$ ist, oder je nachdem

$$\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta \gtrless 2-\operatorname{tang}\gamma,$$

oder:

$$\frac{2\sin(\gamma-45^0)^2}{\cos\gamma^2} \gtrless \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta$$

ist.

Für alle ungleichseitigen Dreiecke, bei welchen der stumpfe Winkel $106^0\,15'\,36{,}72''$ misst, ist $4r+\varrho<2u$.

Digitized by Google

9.

Denken wir (Taf. I. Fig. 1.) über den Seiten AB und AC als Durchmesser die Kreise geschrieben; ihre Mittelpunkte sind c und b, und denken wir einen der Kreise, welche c und die zu AB gehörende Höhe $C\gamma$ berühren. Liegen nun die Berührungspunkte desselben mit dem Punkte A in einer Geraden, so ist das Rechteck aus den Entfernungen des Punktes A von diesen Berührungspunkten gleich dem Rechtecke $A\gamma.AB$. Berührt dieser Kreis zugleich die zu AC gehörende Höhe $B\beta$, so berührt er auch, wegen der Gleichung $A\gamma.AB = A\beta.AC$, den Kreis b. Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, so berührt er den Kreis b stets in derselben Weise als den Kreis c; er berührt entweder beide Kreise ausschliessend, oder er wird von beiden umschlossen. Ist das Dreieck stumpfwinklig und A der Scheitel eines spitzen Winkels, so berührt der berührende Kreis entweder beide Kreise ausschliessend, oder er berührt den kleinen Kreis ausschliessend und wird von dem grossen Kreise umschlossen berührt. Ist A der Scheitel des stumpfen Winkels, so müsste der berührende Kreis die Kreise b und c umschliessen und dabei zugleich die die Kreise b und c schneidenden Höhen berühren, was unmöglich ist. Für jedes spitzwinklige Dreieck giebt es dreimal 4 Kreise, für jedes stumpfwinklige Dreieck jedoch nur zweimal 4 Kreise, von denen jeder die über zwei Dreiecksseiten als Durchmesser geschriebenen Kreise und die zu diesen Seiten gehörenden Höhen zugleich berührt.

Die Mittelpunkte y_1 und y_2 des einen Kreispaares, das die Kreise b und c und die Höhen $B\beta$ und $C\gamma$ berührt, liegen auf der Hälftungslinie des Winkels $\beta k\gamma$; die Halbmesser dieser Kreise seien x_1 und x_2; die Entfernungen der Punkte y_1 und y_2 vom Höhenschnitte k seien y_1 und y_2; die Abstände des Punktes k von den Punkten, in denen y_1 und y_2 die Höhe $B\beta$ berühren, mögen v_1 und v_2 sein, und die Potenz des Punktes k in Bezug auf die Kreise b und c sei p^2; dann ist:

$$v_1 v_2 = p^2,$$

und:

$$x_1 : v_1 = x_2 : v_2 = \varrho'' : u_3 = \varrho''' : u_2,$$

daher:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad x_1 x_2 = p^2 \frac{\varrho'' \varrho'''}{u_2 u_3} = p^2 \frac{u u_1}{u_2 u_3}.$$

Da die Punkte A und α, je nachdem das Dreieck ABC spitz- oder stumpfwinklig ist, auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von k liegen, so befinden sich auch potenzhaltende Punkte der Kreise y_1 und y_2 auf einem durch k gehenden Aehnlichkeitsstrahle auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von k, je nachdem das Dreieck spitz- oder stumpfwinklig ist. Ist also das Dreieck ABC spitzwinklig, so ist k innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise y_1 und y_2, und die Mittelpunkte y_1 und y_2 liegen auf verschiedenen Seiten des Punktes k; ist das Dreieck stumpfwinklig, so ist k äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise y_1 und y_2, und die Punkte y_1 und y_2 befinden sich auf derselben Seite von k. Die Hälftungslinie des Nebenwinkels von $\angle BAC$ ist Aehnlichkeitsachse der Kreise b und c und der als Kreise von unendlichen Halbmessern aufgefassten Höhen $B\beta$ und $C\gamma$, daher ist sie Chordale der Kreise y_1 und y_2, und wenn ihr Abstand vom Punkte k mit z bezeichnet wird, so ist:

$$x_2^2 - x_1^2 = (z \pm y_2)^2 - (y_1 - z)^2 = 2z(y_1 \pm y_2) + y_2^2 - y_1^2,$$

oder:

$$y_1^2 - x_1^2 - (y_2^2 - x_2^2) = 2z(y_1 \pm y_2);$$

daher:

$$(x_1^2 - x_2^2)\frac{u_2 u_3}{u u_1} = 2z(x_1 \pm x_2)\sqrt{\frac{bc}{u \,.\, u_1}}$$

und

$$2) \; \ldots\ldots\ldots \quad x_1 \mp x_2 = \frac{2z}{u_2 u_3}\sqrt{bcuu_1}\;;$$

die oberen Zeichen gelten für das spitzwinklige, die unteren für das stumpfwinklige Dreieck.

Bezeichnet man nun die von der Spitze A und der gegenüberstehenden Seite BC begrenzte Strecke der Hälftungslinie des Winkels BAC mit $2t$, so ist:

$$2tz = Ak \,.\, A\alpha,$$

oder nach §. 2. Gleichung 2) oder 3):

$$tz = \pm(b^2 + c^2 - a^2),$$

wo wieder das obere Zeichen für das spitzwinklige, das untere für das stumpfwinklige Dreieck gilt.

Nun ist aber:

$$t = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcuu_1}\,,$$

daher:

$$2z = \pm \frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{bcuu_1}}$$

und:

$$3) \ldots \quad x_1 \mp x_2 = \pm \frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{u_2 u_3}.$$

Aus den Gleichungen 1) und 3) folgt:

$$4) \ldots (x_1 \pm x_2)^2 = \frac{(b+c)^2(b^2+c^2-a^2)^2 \pm 4p^2i^2}{u_2{}^2 u_3{}^2},$$

wenn i den Inhalt des Mittendreiecks bedeutet.

Ist nun der Halbmesser des um das Mittendreieck geschriebenen Kreises r, so ist nach §. 2. Gleichung 2) und 3):

$$\pm p^2 = 2(a^2+b^2+c^2-8r^2),$$

und deshalb:

$$(x_1 \pm x_2)^2 = \frac{(b+c)^2(b^2+c^2-a^2)^2 + 8i^2(a^2+b^2+c^2-8r^2)}{u_2{}^2 u_3{}^2},$$

oder nach einigen leichten Reduktionen:

$$5) \ldots x_1 \pm x_2 = \frac{4(b+c+a)(b+c-a)}{(a+b-c)(a-b+c)} \sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}.$$

Aus den Gleichungen 3) und 5) erhält man nun leicht die Werthe für x_1 und x_2; übrigens erkennt man aus der Gleichung 5) sofort, dass die Kreise y_1 und y_2 unmöglich sind, sobald der Punkt A der Scheitel eines stumpfen Winkels ist.

Den Gleichungen 3) und 5) lässt sich auch diese Gestalt geben:

$$6) \ldots \left\{ \begin{aligned} x_1 \mp x_2 &= \pm \frac{2(u+u_1)(uu_1-u_2u_3)}{u_2u_3}, \\ x_1 \pm x_2 &= \frac{4uu_1}{u_2u_3}\sqrt{uu_1+u_2u_3}, \end{aligned} \right.$$

oder, wenn man die Potenz des Punktes A in Bezug auf den über der Seite BC als Durchmesser geschriebenen Kreis mit $4s^2$ bezeichnet:

$$7) \ldots \left\{ \begin{aligned} x_1 \mp x_2 &= \frac{4s^2(b+c)}{bc-s^2}, \\ x_1 \pm x_2 &= 4s\,\frac{bc+s^2}{bc-s^2}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Aus den Gleichungen 7) entspringen für die Halbmesser x_1 und x_2 die sehr einfachen Werthe:

$$8) \ldots\ldots\ldots \quad x_1 = \frac{2s(s+b)(s+c)}{bc - s^2}.$$

$$9) \ldots\ldots\ldots \quad \pm x_2 = \frac{2s(s-b)(s-c)}{bc - s^2}.$$

Sind y_3 und y_4 die Mittelpunkte des zweiten Paares der berührenden Kreise, so liegen y_3 und y_4 auf der Hälftungslinie des Winkels $\beta k C$, und die Hälftungslinie des Winkels BAC ist Aehnlichkeitsachse der Kreise b, c und der als Kreise betrachteten Höhen $B\beta$ und $C\gamma$; sie ist also Chordale der Kreise y_3 und y_4. Führt man in Bezug auf die Kreise y_3 und y_4 die entsprechenden Bezeichnungen ein, so ist auch:

$$v_3 v_4 = p^2$$

und:

$$x_3 : v_3 = x_4 : v_4 = \varrho : u_1 = \varrho' : u;$$

deshalb:

$$10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_3 x_4 = p^2 \frac{u_2 u_3}{u u_1}.$$

Wegen der bekannten Eigenschaft der Chordale ist:

$$x_4^2 - x_3^2 = (z_1 \pm y_4)^2 - (y_3 - z_1)^2 = 2z_1(y_3 \pm y_4) + y_4^2 - y_3^2,$$

oder:

$$y_3^2 - x_3^2 - (y_4^2 - x_4^2) = 2z_1(y_3 \pm y_4);$$

daher:

$$(x_3^2 - x_4^2)\frac{u u_1}{u_2 u_3} = 2z_1(x_3 \pm x_4)\sqrt{\frac{bc}{u_2 u_3}}$$

und:

$$11) \ldots\ldots \quad x_3 \mp x_4 = \frac{2z_1}{u u_1}\sqrt{bc u_2 u_3}.$$

Ist $2t_1$ diejenige Strecke der Hälftungslinie des Nebenwinkels von $\angle BAC$, welche von dem Punkte A und der Seite BC begrenzt wird, so bietet sich zur Ermittelung von z_1 die Gleichung dar:

$$2t_1 z_1 = Ak \,.\, A\alpha,$$

oder:

$$t_1 z_1 = \pm (b^2 + c^2 - a^2);$$

Digitized by Google

auch hier beziehen sich die oberen Zeichen überall auf das spitzwinklige, die unteren auf das stumpfwinklige Dreieck. Nun ist aber, wenn $c > b$ ist:

$$t_1 = \frac{2}{c-b}\sqrt{bcu_2u_3},$$

deshalb:

$$2z_1 = \pm\frac{(c-b)(b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{bcu_2u_3}}$$

und:

$$12) \ldots\ldots x_3 \mp x_4 = \pm\frac{(c-b)(b^2+c^2-a^2)}{uu_1}.$$

Aus 10) und 12) ergiebt sich nun:

$$(x_3 \pm x_4)^2 = \frac{(c-b)^2(b^2+c^2-a^2)^2 \pm 4p^2i^2}{u^2u_1^2},$$

oder:

$$13) \ldots x_3 \pm x_4 = \frac{(c-b+a)(b-c+a)}{uu_1}\sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}$$

$$= \frac{4(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}\sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}.$$

Den Gleichungen 12) und 13) lässt sich noch folgende Gestalt geben:

$$14) \ldots \begin{cases} x_3 \mp x_4 = \pm\dfrac{2(u_2-u_3)(uu_1-u_2u_3)}{uu_1}, \\ x_3 \pm x_4 = \dfrac{4u_2u_3}{uu_1}\sqrt{uu_1+u_2u_3}; \end{cases}$$

oder:

$$15) \ldots\ldots \begin{cases} x_3 \mp x_4 = \dfrac{4s^2(c-b)}{bc+s^2}, \\ x_3 \pm x_4 = 4s\dfrac{bc-s^2}{bc+s^2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 15) fliesst:

$$16) \ldots\ldots x_3 = \frac{2s(c-s)(b+s)}{bc+s^2},$$

$$17) \ldots\ldots \pm x_4 = \frac{2s(c+s)(b-s)}{bc+s^2}.$$

Aus den Gleichungen 8), 9), 16) und 17) erhält man noch:

$$x_1 + x_3 = \frac{4s(b+s)(bc^2+s^3)}{(bc+s^2)(bc-s^2)},$$

$$x_1 - x_3 = \frac{4cs^2(b+s)^2}{(bc+s^2)(bc-s^2)},$$

$$\pm(x_2 + x_4) = \frac{4s(b-s)(bc^2-s^3)}{(bc+s^2)(bc-s^2)},$$

$$\pm(x_4 - x_2) = \frac{4cs^2(b-s)^2}{(bc+s^2)(bc-s^2)}.$$

Vertauscht man in den für x_1, x_2, x_3, x_4 ermittelten Werthen c mit a, und dann b mit a, so erhält man die Halbmesser der noch übrigen acht berührenden Kreise. Weil

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = p^4$$

ist, so sind also die Produkte der Halbmesser von allen drei Gruppen der berührenden Kreise gleich.

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, $2a$ die Länge einer Seite, so ist:

$$x_1 - x_2 = 8a, \quad x_1 + x_2 = 6a\sqrt{2};$$
$$x_3 - x_4 = 0, \quad x_3 + x_4 = \tfrac{2}{3}a\sqrt{2};$$

also:

$$x_1 = a(3\sqrt{2}+4), \quad x_2 = a(3\sqrt{2}-4), \quad x_3 = x_4 = \tfrac{1}{3}a\sqrt{2}.$$

Ist das Dreieck ABC rechtwinklig und $BC = 2a$ seine Hypotenuse, so sind wegen der Gleichungen 3), 5), 12) und 13) die Halbmesser x_1, x_2, x_3, x_4 sämmtlich gleich Null; ist dagegen die Seite $AB = 2c$ die Hypotenuse, so ist:

$$x_1 \pm x_2 = \frac{4b(b+c)}{c-b}, \quad x_1 \mp x_2 = \frac{4b(b+c)}{c-b},$$

$$x_3 \pm x_4 = \frac{4b(c-b)}{c+b}, \quad x_3 \mp x_4 = \frac{4b(c-b)}{c+b},$$

mithin:

$$18) \ldots . x_1 = \frac{4b(b+c)}{c-b}, \quad x_3 = \frac{4b(c-b)}{c+b}, \quad x_2 = x_4 = 0;$$

bei'm rechtwinkligen Dreiecke giebt es also nur vier Kreise, von denen jeder die Kreise über der Hypotenuse und der einen Kathete, so wie die andere Kathete und die zur Hypotenuse gehörende Höhe berührt. Das Produkt der Halbmesser dieser vier Kreise ist gleich $64J^2$, wenn J den Inhalt des Dreiecks ABC bedeutet. Aus der Betrachtung der Werthe für x_1 und x_3 Gleichung 18) leitet man folgende einfache Konstruktion der Kreise y_1 und y_3 ab:

Digitized by Google

Heisst die zur Hypotenuse AB gehörende Höhe CG, und treffen die Hälftungslinien des Winkels BCG die Hypotenuse in den Punkten D und E, so schneiden die in den Punkten D und E zu den Hälftungslinien errichteten Lothe die Höhe CG und die Kathete $BC = 2a$ in den Berührungspunkten der Kreise y_1 und y_3.

Oder:

Man schlage um A mit der Kathete AC gleich $2b$ den Kreis, welcher AC zum zweiten Male in F treffen möge, so schneiden die Geraden FD und FE die Höhe CG und die Kathete BC in den Berührungspunkten der Kreise y_1 und y_3.

Der Kreis um A schneidet die Kreise y_1 und y_3 rechtwinklig, und weil diejenigen Halbmesser der Kreise y_1 und y_3, welche nach den Berührungspunkten mit der Kathete CB gezogen sind, durch die Hypotenuse gehälftet werden, so berührt der Kreis A die über diesen Halbmessern als Durchmesser geschriebenen Kreise.

Fällt man von F das Loth auf AB, welches CB, CD und CE beziehlich in K, L und P schneiden möge, und errichtet man in F das Loth zu AC, welches CG in Q treffen möge, so sind K und Q die Mitten der äusseren und der inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise y_1 und y_3, und die Strecken FK und FQ sind beziehlich gleich der halben äusseren und der halben inneren gemeinschaftlichen Tangente. Die drei Punkte K, A, Q liegen in einer Geraden, in der Chordale der Kreise y_1 und y_3, und weil KAQ auf der zur Kathete BC gehörenden Mittellinie senkrecht steht, so ist die Centrale der Kreise y_1 und y_3 mit dieser Mittellinie gleichlaufend.

Bezeichnet man noch die Berührungspunkte der Höhe CG mit den Kreisen y_1 und y_3 mit N und H, so geht der Kreis um das Dreieck CFN durch den Berührungspunkt der Kreise y_1 und b; der Kreis um das Dreieck CFH durch den Berührungspunkt der Kreise y_3 und b; die Kreise um die Dreiecke CFP und CFL beziehlich durch die Berührungspunkte der Kreise y_1 und y_3 mit der Kathete BC und dem Kreise c. Ferner schneiden die Kreise um die Dreiecke AFD und AFE die Kreise b und c beziehlich in den Punkten, in welchen letztere von den Kreisen y_1 und y_3 berührt werden. Die Kreise um die Dreiecke ACD und ACE schneiden den Mittenkreis des Dreiecks ABC in zwei Punkten, deren Verbindungslinien mit dem Scheitel C des rechten Winkels durch die Punkte gehen, in denen der Kreis c von den Kreisen y_1 und y_3 berührt wird. Alle diese Eigenschaften lassen sich sehr leicht beweisen.

Digitized by Google

II.

Die Construction der fünf regulären Körper.

Von

Herrn Gymnasiallehrer Dr. *L. Sohncke*
in Königsberg i. Pr.

---

§. 1.

Einleitung. Versteht man unter einem regulären Polyëder ein solches, das von lauter kongruenten regulären Polygonen begrenzt wird, die in den Kanten lauter gleiche Flächenwinkel bilden, so lassen sich aus dieser Definition mehrere Folgerungen über die regulären Polyëder, z. B. über ihre Anzahl u. dgl., ziehen. Aber dass diese fünf regulären Polyëder wirklich möglich sind, folgt noch nicht aus der obigen Definition, d. h. man kann von vornherein nicht wissen, ob, wenn man gewisse reguläre Polygone unter bestimmten stets gleichen Winkeln aneinanderfügt, dieselben sich auch wirklich **lückenlos zusammenschliessen** und einen Raum völlig umgrenzen. Der Beweis dieser Möglichkeit wird vielmehr durch die Construction der regulären Körper besonders geführt. Viele Lehrbücher übergehen nun diese Construction ganz oder geben sie für jeden der Körper durch eine eigene Betrachtung, so dass ein näherer Zusammenhang zwischen den fünf Constructionen nicht stattzufinden scheint.

Und doch lässt sich eine einfache Construction finden, welche für alle wesentlich dieselbe ist; im Folgenden ist sie ausgeführt. Nachträglich fand ich freilich, dass Meier Hirsch (Sammlung geometrischer Aufgaben, Theil 2. S. 127.—130.) schon ganz ähnliche Gedanken gehabt hat, indem er ebenfalls von einer Kugel mit ihren sphärischen Vielecken ausgeht und den Flächeninhalt

Digitized by Google

des einzelnen Vielecks zur Ermittelung ihrer Gesammtzahl benutzt; aber da er auf den Beweis des überall lückenlosen Zusammenschliessens der Vielecke gar nicht eingeht und die Construction überhaupt nicht streng und vollständig durchführt, so habe ich doch das Folgende nicht für überflüssig gehalten.

Die Quelle, aus der die Construction fliesst, ist die Ueberlegung, dass eine Kugeloberfläche von gewissen unter einander kongruenten regulären sphärischen Vielecken gerade ausgefüllt werden kann. Daher betrachte ich zuerst solche Vielecke.

§ 2. Reguläre sphärische Vielecke.

Erklärung. Ein spärisches, d. h. von Bogen grösster Kreise auf einer Kugel gebildetes, Vieleck heisst regulär, wenn alle Seiten gleich und alle Winkel gleich sind.

Satz 1. In der Fläche eines regulären sphärischen Vielecks giebt es einen Punkt, der von allen Ecken gleichweit absteht. (Die Abstände durch Bogen grösster Kreise gemessen). Er heisst der Mittelpunkt des Vielecks.

Der Beweis wird leicht geführt, indem man zwei benachbarte Winkel durch Bogen grösster Kreise halbirt und den Schnittpunkt der Halbirungslinien mit allen Ecken verbindet.

Satz 2. Alle Ecken eines regulären sphärischen Vielecks liegen in einer Ebene und bestimmen ein reguläres ebenes Vieleck.

Zum Beweise verbinde man den Mittelpunkt und die Ecken untereinander und mit dem Kugelcentrum durch gerade Linien. Die Verbindungslinien des Mittelpunkts mit den Ecken sind gleich als Sehnen gleicher Bogen, und die Verbindungslinien der Ecken mit dem Kugelcentrum sind gleich als Radien. Ferner haben alle Dreiecke, welche diese beiden Linien enthalten, die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Kugelcentrum (die Axe) gemein; also sind sie kongruent. Zeichnet man also in allen die gleichliegenden Höhen, welche von den Ecken des Vielecks auf die Axe gefällt sind, so schneiden alle von der Axe dasselbe Stück ab, treffen sich also in demselben Punkt der Axe. Folglich liegen alle in einer auf der Axe senkrechten Ebene. Weil eine Ebene die Kugel in einem Kreise schneidet, so ist die Figur, welche durch Verbindung der Nachbarecken des sphärischen

Digitized by Google

Vielecks erhalten wird, einem Kreise eingeschrieben; alle ihre Seiten sind gleich als Sehnen gleicher Bogenseiten des sphärischen Vielecks, also ist die Figur ein ebenes reguläres Polygon.

Zusatz 1. Die Verbindungslinie des Kugelcentrums mit dem Mittelpunkte des sphärischen Vielecks trifft das ebene Polygon im Mittelpunkte und steht auf ihm senkrecht. Beweis ist sehr leicht.

Zusatz 2. Umgekehrt folgt aus Satz 2. die Möglichkeit der regulären sphärischen Vielecke. Dazu konstruirt man über einem regulären ebenen Polygon eine grade Pyramide und beschreibt um ihre Spitze eine Kugel, mit der Seitenkante als Radius. Wo die erweiterten Seitenflächen die Kugel schneiden, erhält man die Seiten eines sphärischen Vielecks, dessen Regularität sehr leicht zu beweisen ist.

Satz 3. Legt man mehrere kongruente reguläre sphärische Vielecke auf derselben Kugeloberfläche so aneinander, dass je zwei eine Seite gemein haben, so ist der Neigungswinkel der den Vielecken zugehörigen ebenen Polygone überall derselbe.

Zum Beweise ziehe man in zwei benachbarten ebenen Polygonen die kleinsten Halbmesser nach der gemeinsamen Seite hin, so müssen beide denselben Punkt treffen. Dieser und die Mittelpunkte beider Polygone werden mit dem Kugelcentrum verbunden. Die beiden kleinsten Halbmesser sind die Schenkel des Neigungswinkels der Polygone; sie sind Katheten in den zwei entstandenen rechtwinkligen Dreiecken; der Neigungswinkel der Polygone ist doppelt so gross als der einem jeden kleinsten Halbmesser anliegende spitze Winkel in diesen Dreiecken. Diese Grösse ist bei allen Aneinanderlegungen dieselbe, weil die rechtwinkligen Dreiecke sämmtlich kongruent sind.

Satz 4. Die im Folgenden angewandten regulären sphärischen Vielecke, nämlich:

ein Dreieck mit dem Winkel $\frac{4}{3}R$
„ „ „ „ „ $1R$
„ „ „ „ „ $\frac{4}{5}R$
„ **Viereck** „ „ „ $\frac{4}{3}R$
„ **Fünfeck** „ „ „ $\frac{4}{3}R$

sind möglich.

Beweis. Bekanntlich liegt die Summe der Winkel eines sphärischen *n*ecks zwischen $(2n-4)$ und $2n$ Rechten. Hiernach sind obige fünf Vielecke möglich.

Digitized by Google

Bei den sphärischen regulären Polygonen ist, anders wie bei den ebenen, durch die Winkel zugleich die Grösse der Seite mitbestimmt.

Durch leichte sphärisch-trigonometrische Rechnungen findet man

die Seite d. regul. sphär. Dreiecks mit dem	$\angle \frac{4}{3}R =$	109° 28′ 16″,4
„ „ „ „ „ „ „ „ „	$1R =$	90°
„ „ „ „ „ „ „ „ „	$\frac{4}{5}R =$	63° 26′ 5″,82
„ „ „ „ „ Vierecks „ „ „	$\frac{4}{3}R =$	70° 31′ 43″,6
„ „ „ „ „ Fünfecks „ „ „	$\frac{4}{3}R =$	41° 48′ 37″,16

Uebrigens ist es für das Folgende weiter nicht nothwendig, diese Grösse der Seiten zu kennen.

§. 3. Die Construction der fünf regulären Körper.

I. An zwei Seiten eines regulären sphärischen Dreiecks lege man ihm kongruente reguläre sphärische Dreiecke an. Wenn sich diese drei Dreiecke um ihren gemeinsamen Eckpunkt völlig lückenlos zusammenschliessen sollen, so müssen ihre drei um diesen Punkt herumliegenden Winkel $4R$ betragen, also jeder einzelne Winkel $\frac{4}{3}R$. Ein solches reguläres sphärisches Dreieck ist aber, nach dem Vorhergehenden, möglich.

Man übersieht unmittelbar, dass durch wiederholtes Aneinanderlegen solcher Dreiecke an allen Ecken eine lückenlose Schliessung durch drei nebeneinander liegende Dreiecke hervorgebracht, also endlich die ganze Kugelfläche geschlossen werden muss. Denn andere Lückenwinkel als $\frac{4}{3}R$ können nicht vorkommen, und die Seiten der Lücke haben die Grösse der Dreiecksseiten, so dass immer grade ein solches Dreieck die Lücke ausfüllt. Dies ist das Princip auch für die folgenden Constructionen.

Wenn die gedachten drei Dreiecke zusammengelegt sind, bilden sie einen zusammenhängenden Mantel mit einem unteren freien Rande, der aus drei Seiten besteht; also ist zur Schliessung nur noch ein einziges solches Dreieck erforderlich. Also lässt sich die Kugeloberfläche durch vier reguläre sphärische Dreiecke mit dem Winkel $\frac{4}{3}R$ grade anfüllen.

Die Zahl der zur Schliessung erforderlichen Dreiecke lässt sich auch so ableiten:

Bezeichnen $A, B, C\ldots$ die Winkel eines sphärischen $n$ecks, so ist der Flächeninhalt desselben bekanntlich

$$=[A+B+C+\ldots-(n-2).180^0].\frac{r^2\pi}{180^0}.$$

(r = Kugelradius).

Im vorliegenden Falle ist $n=3$ und $A=B=C=\frac{4}{3}R$, also der Flächeninhalt des Dreiecks $=r^2\pi$. Da nun die Grösse der ganzen Kugeloberfläche $=4r^2\pi$ ist, so sind gerade vier Dreiecke zur Erfüllung der Kugeloberfläche erforderlich.

Hiermit ist die Construction des Tetraëders im Wesentlichen geleistet. Man hat nur noch das einem jeden sphärischen Dreieck zugehörige ebene reguläre Polygon zu konstruiren (s. Satz 2.), indem man die Ecken eines jeden sphärischen Dreiecks durch Gerade verbindet. Alle diese ebenen Polygone sind kongruente gleichseitige Dreiecke. Die Neigungswinkel dieser Dreiecke gegeneinander sind ebenfalls gleich (s. Satz 3.). Also umschliessen diese Dreiecke einen Körper, der von lauter kongruenten regulären Polygonen begrenzt ist, und dessen Flächenwinkel sämmtlich gleich sind, d. h. einen regulären Körper. Weil er von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, ist er das Tetraëder, welches hiermit construirt ist.

Die Construction aller anderen regulären Körper ist nun eigentlich nur eine Wiederholung des eben beschriebenen Ganges, nur dass der Winkel des sphärischen Constructionsvielecks jedes Mal in geeigneter Weise gewählt werden muss, damit bei Aneinanderlegung mehrerer Vielecke vollständige Schliessung herbeigeführt wird.

II. An jede Seite eines regulären sphärischen Dreiecks, dessen Winkel einen Rechten beträgt, lege man ein ihm kongruentes an und fahre so fort. Vier solche Dreiecke, um eine Ecke herumliegend, schliessen die Kugelfläche an jener Ecke völlig, weil ihre Winkel zusammen $4R$ betragen. Bei wiederholtem Aneinanderlegen können nur Lücken vorkommen, welche durch ein oder zwei solche Dreiecke gerade ausgefüllt werden. — Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ist nach der obigen Formel $=\frac{1}{2}r^2\pi$, so dass jene vier Dreiecke $2r^2\pi$, mithin die Hälfte der Kugelfläche ausmachen. Sie bilden einen zusammenhängenden Mantel, dessen freier Rand aus vier Seiten besteht, die in einer Ebene liegen, also erfüllen sie gerade eine Halbkugel. Die ganze Kugel wird demnach durch acht solche Dreiecke geschlossen. Weil nun die zu diesen sphärischen Dreiecken gehörigen ebenen Dreiecke unter gleichen Winkeln geneigt sein müssen (nach Satz 3.), so ist ein regulärer Körper entstanden, der von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist, d. h. das Oktaëder ist konstruirt.

III. An jede Seite eines regulären sphärischen Dreiecks mit dem Winkel $\frac{4}{5}R$ lege man ein ihm kongruentes Dreieck an und fahre so fort. Je fünf solche Dreiecke schliessen sich um eine Ecke herum lückenlos zusammen, weil die Winkel an der Ecke zusammen $4R$ betragen. Irgend welche vorkommende Lücken lassen sich durch ein, zwei oder drei solche Dreiecke stets gerade ausfüllen. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\frac{1}{5}r^2\pi$, also der zwanzigste Theil der Kugelfläche, so dass zwanzig solche Dreiecke zur Erfüllung der ganzen Kugelfläche zusammengelegt werden müssen. Die zugehörigen ebenen Polygone umschliessen (nach Satz 2. und 3.) einen regulären Körper, der von zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist, d. h. das Ikosaëder.

IV. An jede Seite eines regulären sphärischen Vierecks mit dem Winkel $\frac{4}{3}R$ lege man ein ihm kongruentes an. Je drei derselben schliessen sich um eine Ecke herum lückenlos zusammen, weil ihre Winkel an der Ecke zusammen $4R$ betragen; also bilden diese fünf Vierecke einen geschlossenen Mantel, dessen unterer Rand vier Seiten hat, die zu je zweien den Winkel $\frac{4}{3}R$ einschliessen. Also ist nur noch ein einziges solches Viereck hinzuzufügen, damit die Kugelfläche völlig geschlossen werde. — Dieselbe Anzahl (sechs) der erforderlichen Vierecke findet man auch durch Beachtung des Flächeninhalts des einzelnen Vierecks, welcher $\frac{2}{3}r^2\pi$ beträgt. Sechs solche Vierecke machen also erst die ganze Kugelfläche aus. Construirt man die zugehörigen ebenen Vierecke, so erkennt man, dass ein regulärer Körper entstanden ist, der von sechs kongruenten gleichgeneigten Quadraten begrenzt wird, d. h. der Würfel.

V. An jede Seite eines regulären sphärischen Fünfecks mit dem Winkel $\frac{4}{3}R$ lege man ein ihm kongruentes an. Je drei derselben schliessen sich um eine Ecke herum lückenlos zusammen, weil ihre Winkel dort $4R$ betragen, so dass also diese sechs Fünfecke einen zusammenhängenden Mantel mit einem freien Rande bilden. Der Flächeninhalt eines solchen Fünfecks ist nach der Formel $= \frac{1}{3}r^2\pi$, also $\frac{1}{12}$ der ganzen Kugelfläche. Also erfüllen die zusammengelegten sechs Fünfecke die halbe Kugelfläche. Weil nun in die Lücken des freien Randes je ein Fünfeck hineinpasst, so kann man sechs ebenso zusammengelegte Fünfecke lückenlos an die vorigen anfügen und dadurch die Kugel völlig schliessen. Die zwölf zugehörigen ebenen regulären Fünfecke sind untereinander kongruent und gleich geneigt (Satz 3.). Also ist das Dodekaëder construirt.

§. 4. Anhang.

Wollte man mehr als fünf reguläre sphärische Dreiecke aneinanderlegen, so dass sie sich um eine Ecke herum schliessen, so müsste man ihnen den Winkel $\frac{2}{3}R$, oder noch kleinere, zuertheilen. Winkel von dieser Kleinheit sind aber in regulären sphärischen Dreiecken nicht möglich, denn ihre Summe würde $2R$ oder noch weniger betragen, während die Winkel eines sphärischen Dreiecks zusammen stets $> 2R$ sein müssen. — Auf dieselbe Weise ergiebt sich die Unmöglichkeit, mehr als drei reguläre sphärische Vierecke, sowie mehr als drei reguläre sphärische Fünfecke, um eine Ecke herum lückenlos aneinanderzulegen, so dass auch auf diese Art bewiesen ist, dass mehr als die bekannten fünf regulären Polyëder nicht möglich sind (wenn man von den sternförmigen Polyëdern absieht).

Endlich ist zu bemerken, dass, während in anderen Darstellungen nachträglich bewiesen wird, dass die fünf regulären Körper sich in eine Kugel einschreiben lassen, man bei dem eben dargestellten Gange dieses Beweises ganz überhoben ist, weil von der Kugel als dem erzeugenden Körper ausgegangen ist.

III.

Betrachtung des Flächeninhalts der Curve, deren Gleichung $r = \frac{\gamma}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

Von

Herrn Dr. *C. Bender*

in Tübingen.

In der Gleichung stellen r und α veränderliche Grössen dar, γ bedeutet eine Constante, welche als Linie aufgezeichnet, stets den einen, in seiner Lage unveränderlichen Schenkel des variablen Winkels α bildet. r ist der mit α sich ändernde Radius.

Digitized by Google

Construction. Die umgeformte Gleichung:

$$r+r\operatorname{tg}\alpha=\gamma$$

zeigt, dass, wenn $AO=\gamma$ (Taf. I. Fig. 4.) und AL (eine beliebige Linie) unter dem Winkel von 45° zu einander geneigt sind, eine unter dem variablen Winkel α zu OA geneigte Linie ON jederzeit von AL ein Stück (AN) abschneidet, dessen Projection $AB=m$ die Grösse $r\operatorname{tg}\alpha$ besitzt. Es ist demnach OB der dem Winkel α zugehörige Radius und P der gesuchte Punkt.

Die Curve selber ist in Taf. I. Fig. 5. dargestellt.

Flächeninhalt. Der Flächeninhalt eines unendlich kleinen Sectors, der dem Winkel $d\alpha$ angehört, ist, wie bekannt:

$$df=\frac{r^2\,d\alpha}{2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\gamma^2}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}\cdot d\alpha,$$

$$f=\tfrac{1}{2}\int\frac{\gamma^2}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}\cdot d\alpha,$$

wobei die Gränzen vorläufig noch unbestimmt bleiben mögen.

$$\frac{d\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}\cdot\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}{(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}=\frac{(1-2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)d\alpha}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$$

$$=\frac{\cos^4\alpha(1-2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)d\alpha}{\cos^2 2\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\,d\alpha}{\cos^2 2\alpha}-\frac{2\cos^3\alpha.\sin\alpha\,d\alpha}{\cos^2 2\alpha}$$

$$=\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}\cdot d\alpha-\frac{(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}.d\alpha$$

$$=\frac{d\beta}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right),$$

für $2\alpha=\beta$. Also ist:

$$\int\frac{d\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}=\tfrac{1}{4}\left(\operatorname{tg}\beta+\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\frac{1}{\cos\beta}+\log\cos\beta\right),$$

$$\int\frac{d\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}=\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\sin 2\alpha-1}{\cos 2\alpha}+\log(\sin 2\alpha+1)\right\},$$

$$\frac{\gamma^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}=\tfrac{1}{4}\gamma^2.$$

Der Flächeninhalt der vollständigen Curve ist, wie bei der Lemniscate, $=\gamma^2$.

Digitized by Google

IV.

Ueber die geometrische Aufgabe: Gegeben sind drei Punktenpaare. Man soll einen solchen Kreis construiren, dass dieselben in Bezug auf ihn conjugirte sind.

Von

Herrn ***Fuhrmann***,

Lehrer der Mathematik an der Burgschule in Königsberg i. Pr.

Aufgabe. Gegeben sind drei Punktenpaare. Man soll einen solchen Kreis construiren, dass dieselben in Bezug auf ihn conjugirte sind. (Taf. III. Fig. 1.).

Auflösung. Es seien aa', bb', cc' die drei Paare. Ueber den Verbindungslinien als Durchmessern schlage man Kreise und construire den Orthogonalkreis. Dieser ist der gesuchte.

Beweis. Halbirt man zwei conjugirte harmonische Punkte, so ist bekanntlich das Product der Entfernungen dieses Mittelpunktes von den anderen Punkten gleich dem Quadrat der halben Entfernung des ersten Paares. Bezeichnen wir also den Mittelpunkt von aa' mit f und die Schnittpunkte mit dem Kreise mit d und d', so muss die Bedingung stattfinden:

$$fa^2 = fd.fd'.$$

Dies ist aber der Fall, da die beiden Kreise sich rechtwinklig schneiden. Dasselbe gilt von den übrigen Punktenpaaren.

Digitized by Google

Bemerkung. Fallen zwei Punkte a und a' zusammen, so ist dieses ein Punkt des Kreises. Diese Aufgabe ist somit eine Verallgemeinerung der Aufgabe, einen Kreis durch drei Punkte zu legen.

Fällt ferner a' mit b, b' mit c, c' mit a zusammen, so erhält man ein System harmonischer Pole, und man hat die bekannte Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, zu dem ein System harmonischer Pole gegeben ist.

Die genannte Aufgabe ist somit eine gleichzeitige Verallgemeinerung von zwei anderen, welche ganz heterogen zu sein scheinen.

Nimmt man nur zwei Paare, so kann man unendlich viele Kreise construiren. Diese erfüllen, wie aus der Auflösung ersichtlich, die Bedingung, dass sie dieselbe Radicalaxe, nämlich die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Punktenpaare, haben. Jedenfalls lässt sich die Aufgabe auf Kegelschnitte erweitern, wenigstens lässt sich dies für einige specielle Fälle beweisen. So bilden diejenigen Kegelschnitte, welche ein gegebenes System harmonischer Pole haben und durch einen Punkt gehen, ein Büschel von Kegelschnitten, die durch vier feste Punkte gehen, welche sich leicht construiren lassen.

Digitized by Google

V.

Messung auf der kurzen Basis.

Von

dem Herrn Grafen *L. v. Pfeil*

in Gnadenfrei in Schlesien.

---

§. 1.

Aus einer Seite und den Winkeln eines Dreiecks werden bekanntlich die anderen beiden Seiten gefunden. Sind die gesuchten Seiten AB und AC (Taf. II. Fig. 1.) im Verhältniss zu der gegebenen, BC, der Basis, Grundlinie, Standlinie, sehr gross, so wird der Winkel A, den sie einschliessen, die Parallaxe, sehr klein, und die Summe der Winkel an der Basis, $B+C$ nähert sich zwei Rechten. Die Basis BC kann in diesem Fall auf den gesuchten Seiten AB und AC beinahe senkrecht stehen, und stünde sie nicht senkrecht, wie BC' oder BC'', so kann sie auf eine solche Senkrechte BC projicirt werden. In dem Falle nun, wo der Winkel A sehr klein ist, folgt die Berechnung des Dreiecks ABC eigenthümlichen Gesetzen. Die Winkel an der Basis, B und C, verlieren ihre Bedeutung als Einzelnwinkel, und nur ihre Summe $B+C$ kommt für die Rechnung in Betracht.

Ich nenne darum Messung auf der kurzen Basis diejenige Art der Messung, wo die gegebene Seite des Dreiecks, die Basis, so klein, und resp. die zu messende Entfernung so gross ist, dass die Bedeutung der Winkel an der Basis als Einzelnwinkel für die Rechnung verschwindet, und nur der Winkel an der Spitze, die Parallaxe, in Betracht kommt.

§. 2.

Es sei ABC (Taf. II. Fig. 2.) ein rechtwinkliches Dreieck,

Digitized by Google

worin B der rechte Winkel. Wenn BC und A bekannt sind, so findet man:

$$AB = BC.\text{cotg}\,A. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{A}).$$

Bleibt BC unverändert, so kann man für verschiedene Werthe von A eine Tafel ausrechnen, worin man AB aus A findet. Diese Tafel wird so lange richtig bleiben, als B ein rechter Winkel ist, oder doch nicht sehr davon abweicht.

Die Grösse der zulässigen Abweichung des Winkels B von einem Rechten lässt sich bestimmen, wenn die Genauigkeit bekannt ist, mit welcher der Winkel A gemessen werden kann.

Es sei ABC (Taf. II. Fig. 3.) ein Dreieck, worin B der rechte Winkel. Wird B kleiner als 90^0, während AB sich nicht verändert, so nimmt der Winkel A erst zu, bis $C = 90^0$ ist, dann nimmt er wieder ab, und wird $= 0$, sobald $B = 0$ ist. Wird dagegen B grösser 90^0, so nimmt A beständig ab, und wird ebenfalls $= 0$, wenn $B = 180^0$ wird.

Um einzusehen, dass A sein Maximum erreicht, wenn $C = 90^0$ ist, fälle man in dem Dreieck $A'BC$ von A' auf BC den Perpendikel $A'D$. Es ist sodann $A' = 180^0 - (B + C)$ und $\sin A' = \sin(B+C) = \sin B.\cos C + \cos B.\sin C = \frac{A'D}{A'B}.\frac{CD}{A'C} + \frac{BD}{A'B}.\frac{A'D}{A'C} = \frac{(CD+BD).A'D}{A'B.A'C} = \frac{BC}{A'B}.\frac{A'D}{A'C} = \frac{BC}{A'B}.\sin C$. Und da nach der Voraussetzung $A'B = AB$ ist, so ist auch $\sin A' = \frac{BC}{AB}.\sin C$.

Differenzirt man diese Gleichung so erhält man $\partial(\sin A') = \frac{BC}{AB}.\partial(\sin C)$ oder $\cos A'\partial A' = \frac{BC}{AB}.\cos C\partial C$.

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{\partial A'}{\partial C} = 0$, so folgt $0 = \cos C$, also C gleich einem Rechten, und also $A + B$ ebenfalls gleich einem Rechten*). Wenn sich also die Seiten AB und BC nicht verändern, so erreicht A sein Maximum, sobald C ein rechter Winkel ist.

§. 3.

Nennt man v, den bei Messung des Winkels A (Taf. II. Fig. 3.)

---

*) Vergleiche p in Taf. II. von 90^0 bis 87^0.

leicht zu begehenden Fehler, so wird ABC so lange als ein rechtwinkliges Dreieck, nnd B als der rechte Winkel darin angesehen werden können, als der aus der Schiefe des Winkels B entspringende Fehler bedeutend kleiner als v, z. B. gleich $\frac{1}{2}v$ ist.

Um die Art und Weise darzulegen, in welcher die Rechnung geführt werden kann, und auch zu praktischen Zwecken, ist Taf. I. für ein Instrument berechnet, (die Boussole), wobei Fehler von $0{,}1^0 = 6'$ leicht vorkommen können. Nach obiger Voraussetzung darf mithin der Fehler, welcher aus der Schiefe des Winkels B (Taf. II. Fig. 4.) entsteht, vernachlässigt werden, so lange $A'-A$ oder $A-A''$ nicht grösser wird als $3'$.

Untersuchen wir zuförderst, wie gross A (Taf. II. Fig. 3.) werden darf, damit Taf. I. noch richtig bleibt, wenn $A+B$ oder $C=90^0$ wird. In diesem Falle ist:

$$\sin A^0 = \frac{BC}{A^0B} = \frac{BC}{AB} = \operatorname{tang} A. \quad . \; . \; . \; . \; . \; B).$$

Betrachtet man eine logarithmische Tafel mit sieben Decimalstellen, so findet man:

$$\log \sin 6^0 55' \, 24{,}4'' = 9{,}0811422,$$
$$\log \operatorname{tang} 6^0 52' \, 24{,}4'' = 9{,}0811422;$$

so dass also bei diesen Werthen $\sin A^0 = \operatorname{tang} A$ wird. Ist der Winkel A kleiner als $6^0 52' 24{,}4''$, so wird auch die Differenz von Sinus und Tangenten kleiner, es wird darum auch der Fehler, welcher dadurch entstehen kann, dass $C = 90^0$ wird, weniger als $3'$ ausmachen.

Demnach kann AB noch richtig aus Taf. I. gefunden werden, wenn auch $C = 90$ werden sollte, so lange A nicht grösser wird, als $6{,}9^0$ und da $6{,}9^0$ nach Tafel I. einer Entfernung AB von 413 Einheiten entspricht, wenn $BC = 50$ Einheiten, z. B. Schritt, angenommen würde, so darf in allen Fällen, wo die zu messende Entfernung über 413ˣ ansteigt, der Winkel C bis zu einem Rechten wachsen.

§. 4.

Es ist in dem schiefwinklichen Dreieck $A''BC$

$$\sin C = \sin A'' \cdot \frac{A''B}{BC}.$$

Da aber:

Digitized by Google

$$\frac{A''B}{BC} = \frac{AB}{BC} = \operatorname{cotg} A,$$

so folgt:

$$\sin C = \sin A''.\operatorname{cotg} A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad C).$$

Setzt man in dieser Gleichung $A = 6^0\,52'\,24{,}4''$ und $A'' = A + 3' = 6^0 55'\,24{,}4''$ so erhält man wieder $C = 90^0$ und $A + B = 90^0$.

Setzt man aber $A = 6^0\,52'\,24{,}4''$ und $A'' = A - 3' = 6^0\,49'\,24{,}4''$, so erhält man:

$A = 6^0\,52'\,24{,}4''$	log cotg = 0,9188578
$A'' = 6^0\,49'\,24{,}4''$	log sin = 9,0748539
$C = 80^0\,16'\,20''$	log sin = 9,9937117.
$C = 99^0\,43'\,40''$	

Da nun $B = 180^0 - (A'' + C)$ und $(A'' + C) = 6^0\,49'\,24{,}4'' + 80^0\,16'\,20'' = 87^0\,6'$ oder $(A'' + C) = 6^0\,49'\,24{,}4'' + 99^0\,43'\,40'' = 106^0\,33'$, so wird entweder:

$$B = 180^0 - 87^0\,6' = 92^0\,54'$$

oder:

$$B = 180^0 - 106^0\,33' = 73^0\,29'\,{}^{*}).$$

Es darf darum, wenn $A = 6{,}9^0$ ist, B zwischen $92^0\,54'$ und $73^0\,27'$ fallen, ohne dass für die Genauigkeit der Messung ein Nachtheil zu befürchten ist.

Je kleiner A wird, um so mehr darf B von einem Rechten abweichen, ohne die Genauigkeit der Messung zu beeinträchtigen. Es ergiebt sich dieses, wenn man in die Formel B verschiedene Werthe für A einsetzt.

Wenn A über $6{,}9^0$ wächst, so kann der Fehler $\frac{1}{4}v$ nach zwei Richtungen hin mehr betragen, als $3'$. Man setze z. B.:

$A = 8^0$	log cotg = 0,8521975
$A' = A + 3' = 8^0\,3'$	log sin = 9,1462435
$C = 85^0\;\;9'\;\;3''$	log sin = 9,9984410.
$C = 94^0\;\;50'\,57''$	

*) Die Sekunden können begreiflich weggeworfen werden.

Digitized by Google

$$A' + C = 8^0\,3' + 85^0\ 9' = 93^0\,12',$$

$$A' + C = 8^0\,3' + 94^0\,51' = 102^0\,54',$$

$$B = 180^0 - 93^0\,12' = 86^0\,48',$$

$$B = 180^0 - 102^0\,54' = 77^0\ 6'\,^{*}).$$

Ferner setze man:

$A = 8^0$	$\log \text{cotg} = 0{,}8521975$
$A'' = A - 3' = 7^0\,57'$	$\log \sin = 9{,}1408501$
$C = 79^0\,46'\,31''$ $C = 100^0\,13'\,29''$	$\log \sin = 9{,}9930476$

$$A'' + C = 7^0\,57' + 79^0\,47' = 87^0\,44',$$

$$A'' + C = 7^0\,57' + 100^0\,13' = 108^0\,10',$$

$$B = 180^0 - 87^0\,44' = 92^0\,16',$$

$$B = 180^0 - 108^0\,10' = 71^0\,50'\,^{*}).$$

Es darf mithin, wenn $A = 8^0$ ist, B zwischen $86^0\,48'$ und $92^0\,16'$ und ebenso zwischen $77^0\,6'$ und $71^0\,50'$ fallen, ohne Nachtheil für die Messung. Dagegen würde zwischen $77^0\,6'$ und $86^0\,48'$ der Fehler grösser sein als $3'$.

Wird von 1^0 bis 3^0 die Genauigkeit der Tafel grösser, etwa doppelt so gross, angenommen, so darf auch der zulässige Fehler nur halb so gross sein. Man hatte von 1^0 bis 3^0 diesen Fehler, nämlich $v = 3'$ gesetzt. Von 1^0 bis 3^0 wird mithin $\frac{1}{2}v = 1{,}5'$ anzunehmen sein.

Setzt man z. B.:

$A = 2^0$	$\log \text{cotg} = 1{,}4569162$
$A' = A - 1{,}5' = 1^0\,58'\,30''$	$\log \sin = 8{,}5373585$
$C = 80^0\,43'\ 1''$ $C = 99^0\,16'\,59''$	$\log \sin = 9{,}9942747$

$$A'' + C = 1^0\,58'\,30'' + 80^0\,43'\ 1'' = 82^0\,42',$$

$$A'' + C = 1^0\,58'\,30'' + 99^0\,16'\,59'' = 101^0\,15',$$

*) Die Sekunden können begreiflich weggeworfen werden.

Digitized by Google

$$B = 180^\circ - 82^\circ\,42' = 97^\circ\,18',$$

$$B = 180^\circ - 101^\circ\,15' = 78^\circ\,45'\,{}^{*)}.$$

Die Grenzen, zwischen welche der Winkel B fallen darf, damit ein durch die Schiefe des Winkels B zu begehender Fehler höchstens halb so gross werde, als der in der Winkelmessung überhaupt leicht zu begehende, und zwar, dass jener Fehler zwischen $A = 1^\circ$ bis 3° höchstens $1{,}5'$ und zwischen $A = 3^\circ$ bis 11° höchstens $3'$ betrage, diese Grenzen drückt die hier folgende Zusammenstellung aus.

Grenzen des Winkels B.

A	°	′	°	′	°	′	°	′
1°	76	9	.	.	.	.	101	54
2°	78	44	.	.	.	.	97	18
3°	79	3	.	.	.	.	95	0
3°	76	10	.	.	.	.	97	56
4°	76	9	.	.	.	.	95	57
5°	75	32	.	.	.	.	94	34
6°	74	33	.	.	.	.	93	33
6° 52′,4	73	27	83	7,6	83	7.6	92	54
7°	73	17	79	20	84	34	92	49
8°	71	50	77	6	86	48	92	16
9°	70	14	74	14	87	40	91	52
10°	68	33	71	43	88	11	91	33
11°	66	48	69	22	88	32	91	18

In (Taf. II. Fig. 5.) sind die Grenzen in ihrem richtigen Verhältniss gezeichnet, innerhalb deren B und C fallen darf, wenn $A = 1^\circ$ und wenn $A = 11^\circ$ wird. Man sieht, dass die Grenzen bei 1° nur einfach, bei 11° dagegen doppelt sind.

§. 5.

Man erkennt aus der vorstehenden Zusammenstellung, dass der Winkel B (Taf. II. Fig. 4.) mehr gegen den spitzen, als gegen den stumpfen hin abweichen darf. So darf bei $A = 1^\circ$ der Winkel B um 14° spitzer, und nur 12° stumpfer, als ein Rechter werden. Bei $6{,}9^\circ$ darf B um 17° spitzer, und nur 3° stumpfer werden, als ein Rechter. Auch wenn $A > 6{,}9^\circ$ ist, und man die inneren Grenzen der zulässigen Abweichung, wie die Zusammenstellung sie zeigt, berücksichtigen will, darf B noch ein wenig mehr zum spitzen, als zum stumpfen Winkel abweichen: so bei 8° resp. $3^\circ\,12'$ und $2^\circ\,16'$, bei 11° resp. $1^\circ\,28'$ und $1^\circ\,18'$. Alle

*) Die Sekunden können begreiflich weggeworfen werden.

diese Maasse liegen innerhalb der blossen Schätzung durch das Augenmaass.

Sind jedoch die Verhältnisse der Art, dass für die kürzeren Entfernungen AB überhaupt keine grosse Genauigkeit gefordert wird, so kann man die inneren Grenzen von B gegen A' hin, wo $C=90^0$ wird, unberücksichtigt lassen. Die zulässigen Grenzen von B sind dann gegen den spitzen Winkel hin sehr ausgedehnt. Sie fallen z. B. bei 8^0 zwischen $71^0\,50'$, und $92^0 16'$, bei 11^0 zwischen $66^0\,48'$ und $91^0\,18'$, wie die Zusammenstellung am Ende von §. 4. zeigt.

Zum Vergleich stehe hier noch das Maximum des Fehlers, welcher, wie wir sahen, eintritt, wenn $C=90^0$ wird. Der Fehler ist in der folgenden Zusammenstellung in Einheiten von $BC=50$ ausgedrückt.

Es ist sodann in (Taf. II. Fig. 3.) nach Formel A):

$$AB = BC.\cot A,$$

und:

$$A^0B = \frac{BC}{\sin A^0}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{D)}$$

Führt man die Rechnung aus, so findet man:

Bei $A=$	$A^0-A=$	Bei $A=$	$A^0-A=$
1^0	0,4	7^0	3,1
2^0	0,9	8^0	3,5
3^0	1,3	9^0	3,9
4^0	1,7	10^0	4,4
5^0	2,2	11^0	4,8
6^0	2,6		

Hiernach wird man bei der Messung auf der kurzen Basis stets sicher gehen, wenn man die Richtung, in welcher die Basis gemessen werden soll, nach dem Augenmaass so wählt, dass sie mit der zu messenden Entfernung einen Winkel bildet, welcher wenig kleiner ist, als ein Rechter.

§. 6.

Wenn es nicht angeht, BC (Taf. II. Fig. 7.) beinahe senk-

Digitized by Google

recht auf AB zu nehmen, so muss die abgemessene Länge AB entsprechend reducirt werden. Auch hier folgt die Messung auf der kurzen Basis eigenthümlichen Gesetzen.

Es sei BC in erheblich schräger Richtung gegen AB gemessen worden. Man errichte in B die BD senkrecht auf AB, so ist:

$$BD = AB . \operatorname{tang} A,$$

$$AB = BC . \frac{\sin C}{\sin A} = BC . \frac{\sin(A+B)}{\sin A},$$

also:

$$BD = BC . \frac{\sin(A+B) \operatorname{tang} A}{\sin A} = BC . \frac{\sin(A+B)}{\cos A}.$$

Es ist also die Verhältnisszahl, womit AB wegen der Projection von BC auf BD multiplicirt werden muss, nämlich:

$$p = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A} = \frac{\sin C}{\cos A}. \quad \ldots\ldots \text{E)}$$

§. 7.

Der Cosinus von A ändert sich zwischen 1° und 11° so unbedeutend, dass man für die verlangte Genauigkeit der Messung ihn in einem Mittel als constant betrachten kann.

Dieses Mittel wird den kleinsten Fehler geben, wenn man den Cosinus eines Winkels φ für $\cos A$ in der Formel E) so annimmt, dass die Differenzen in der zu messenden Entfernung AB beim kleinsten Winkel, den die Tabelle (Tafel I.) giebt, und beim grössten einander gleich sind.

Bedeutet A den kleinsten, nA den grössten Winkel, welchen die Tabelle (hier Tafel I.) enthalten soll, so verhalten sich bei der vorausgesetzten Kleinheit des Winkels an der Spitze, die Seiten AB beinahe umgekehrt, wie die Parallaxen. Wenn also diese sich verhalten, wie $A : nA$, so werden jene sich verhalten, wie $nA : A$.

Sollen mithin die Fehler, welche in der Formel E) aus einem constanten Nenner entspringen, in dem man, wie gesagt, anstatt des wechselnden $\cos A$ den unveränderlichen $\cos\varphi$ setzt, sollen jene Fehler beim grössten und kleinsten Winkel der Tabelle einander gleich sein, so müssen dieselben bei der grössten Parallaxe nA, im Verhältniss zu der zu messenden Entfernung, $n$mal so gross sein, als bei der kleinsten Parallaxe.

Ist φ ein mittlerer Winkel, dessen Cosinus als constant angenommen werden soll, so wird die Formel E) lauten:

$$p = \frac{\sin(A+B)}{\cos\varphi} = \frac{\sin C}{\cos\varphi}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad F)$$

Der Fehler beim kleinsten Werth der Parallaxe, bei A, ist $\frac{\sin C}{\cos\varphi} - \frac{\sin C}{\cos A}$, der Fehler dagegen beim grössten Werth der Parallaxe, bei nA, ist $\frac{\sin C}{\cos nA} - \frac{\sin C}{\cos\varphi}$.

Es muss darum folgende Proportion richtig sein:

$$\left(\frac{\sin C}{\cos\varphi} - \frac{\sin C}{\cos A}\right) : \left(\frac{\sin C}{\cos nA} - \frac{\sin C}{\cos\varphi}\right) = 1 : n.$$

Daraus folgt:

$$(\cos A \cos nA - \cos\varphi \cos nA) : (\cos A \cos\varphi - \cos A \cos nA) = 1 : n$$

und:

$$\cos\varphi = \frac{(n+1)\cos A \cos nA}{n \cos nA + \cos A},$$

oder:

$$\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{(n+1)\sqrt{1-\sin^2 A}\sqrt{1-\sin^2 nA}}{n\sqrt{1-\sin^2 nA} + \sqrt{1-\sin^2 A}}.$$

Entwickelt man die Wurzeln durch Reihen, und lässt die höheren Potenzen und die Produkte der Sinus wegen ihrer Kleinheit verschwinden, so ist

$$1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi = \frac{(n+1)(1-\frac{1}{2}\sin^2 A)(1-\frac{1}{2}\sin^2 nA)}{n(1-\frac{1}{2}\sin^2 nA) + (1-\frac{1}{2}\sin^2 A)}$$

$$= \frac{(n+1)(1-\frac{1}{2}\sin^2 nA - \frac{1}{2}\sin^2 A)}{n(1-\frac{1}{2}\sin^2 nA) + (1-\frac{1}{2}\sin^2 A)}.$$

Wegen Kleinheit der Winkel kann $\sin^2 nA = n^2\sin^2 A$ gesetzt werden. Es ist darum:

$$1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi = \frac{(n+1)(1-\frac{1}{2}n^2\sin^2 A - \frac{1}{2}\sin^2 A)}{n(1-\frac{1}{2}n^2\sin A) + (1-\frac{1}{2}\sin^2 A)}$$

$$= \frac{(n+1)[1-\frac{1}{2}(n^2+1)\sin^2 A]}{(n+1) - \frac{1}{2}(n^3+1)\sin^2 A}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2}(n^2+1)\sin^2 A}{1-\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A},$$

also:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi = \frac{1-\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A - 1 + \frac{1}{2}(n^2+1)\sin^2 A}{1-\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}n\sin^2 A}{1-\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A}$$

und:

$$\sin\varphi = \sin A\sqrt{\frac{n}{1-\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A}} \quad . \; . \; . \; G)$$

Man darf den Subtrahendus $\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A$ wegen seiner Kleinheit verschwinden lassen *). Es ist alsdann:

$$\sin\varphi = \sin A\sqrt{n},$$

oder wegen der Kleinheit des Winkels φ, und A auch

$$\varphi = A\sqrt{n}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; H)$$

Erhebt man den Ausdruck wieder zum Quadrat, so kann man daraus eine Proportion bilden:

$$A:\varphi = \varphi:nA.$$

Das heisst, der Winkel φ ist die mittlere Proportionalzahl zwischen dem grössten und kleinsten Winkel, den die Tabelle enthalten soll.

Wollte man jedoch aus irgend einem Grunde die Rechnung genauer führen, so würde man für $1:n$ das Verhältniss der Cotangenten des grössten und kleinsten Winkels, den Tafel I. enthalten soll, also $\frac{\operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} nA}$, annehmen. Die Rechnung stellt sich dann, für die Formel G) wie folgt:

$$\sin\varphi = \sin A\sqrt{\frac{n}{1-\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A}}.$$

*) Dass der Nenner $1-\frac{1}{2}(n^2-n+1)\sin^2 A = 1$ gesetzt werden könne, sieht man, wenn man denselben in Zahlen entwickelt. Es ist in Taf. I. der grösste und kleinste Werth der Parallaxe, resp. 1° und 11°, also $A = 1°$, $nA = 11°$, und $n = 11$, mithin nach Formel H):

$$\varphi = 1°\sqrt{11} = 3°\ 19'\ 0''.$$

Nach Formel G) ist $\varphi = 3°\ 22'\ 5{,}4''$ wie oben berechnet wird. Es ist aber:

$$\log\cos 3°\ 19'\ 0'' = 9{,}9992707$$
$$\log\cos 3°\ 22'\ 5{,}4'' = 9{,}9992492$$
$$\text{Diff} = 0{,}0000215.$$

Man sieht, dass die Differenz ganz bedeutungslos ist.

Setzt man

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}(n^2-n+1)}\sin A = \sin Q,$$

und also

$$1-\tfrac{1}{3}(n^2-n+1)\sin^2 A = \cos^2 Q,$$

so folgt:

$$\sin\varphi = \frac{\sin A}{\cos Q}\sqrt{n}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

Die Zahlenrechnung würde in folgender Art zu führen sein:

1^0 11^0	log cotg = 1,7580785 log cotg = 0,7113477
$\frac{\text{cotg } 1^0}{\text{cotg } 11^0} = n = 11{,}1360$	log = 1,0467308
$n^2 = 124{,}0114$	log = 2,0934616
$n^2-n+1 = 113{,}8754$ $\tfrac{1}{2}(n^2-n+1) = 56{,}9377$ $A = 1^0$	 ½ log = 0,8777000 log sin = 8,2418553
Q Q	log sin = 9,1195553 log cos = 9,9962010
Q n $A = 1^0$	—log cos = 0,0037990 ½ log = 0,5233654 log sin = 8,2418553
$\varphi = 3^0\,22'\,5{,}4''$	log sin = 8,7690197 log cos = 9,9992492 —log cos = 0,0007508.

Hätte man nach der Formel II) gerechnet, so würde man $\varphi = 3^0\,19'\,0''$ erhalten haben. Die Bedeutung des Werthes φ für Tafel II. wäre dieselbe geblieben.

Tafel II. ist nach dem Werth $-\cos\varphi = 0{,}0007508$ berechnet. Um den daraus entspringenden Fehler für die Messung zu erkennen, sei bei den äussersten Grenzen von Tafel I., bei $A = 1^0$ und bei $A = 11^0$, für $(A+B)$ oder $C = 30^0$ die Rechnung nach der genauen Formel, und nach der Formel für Tafel II. geführt.

Die genaue Formel

$$AB = \frac{BC . \sin C}{\sin A}$$

giebt folgende Werthe:

$BC = 50$	$\log = 1,6989700$
$C = 30^0$	$\log \sin = 9,6989700$
$A = 1^0$	$-\log \sin = 1,7581447$
Für $A = 1^0$ ist $AB' = 1432,467$	$\log = 3,1560847$
$A = 11^0$	$-\log \sin = 0,7194012$
Für $A = 11^0$ ist $AB' = 131,0214$	$\log = 2,1173412.$

Nach Formel F) ist gemäss Tafel II.

$$p = \frac{\sin C}{\cos \varphi}.$$

$C = 30^0$	$\log \sin = 9,6989700$
$\varphi = 3^0\, 22'\, 5,4''$	$-\log \cos = 0,0007508$
$p = 0,50086$	$\log = 9,6997208.$

In Tafel I. ist AB nach der Formel A) berechnet.

	$AB = BC . \operatorname{cotg} A$
$BC = 50$	$\log = 1,6989700$
$A = 1^0$	$\log \operatorname{cotg} = 1,7580785$
$AB = 2864,498$	$\log = 3,4570485$
p	$\log = 9,6997208$
Für $A = 1^0$ ist $AB'' = AB.p = 1434,724$	$\log = 3,1567693$
$A = 11^0$	$\log \operatorname{cotg} = 0,7113477$
$AB = 257,2271$	$\log = 2,4103177$
Für $A = 11^0$ ist $AB'' = AB.p = 128,8364$	$\log = 2,1100385.$

Mithin sind die Differenzen:

Bei $A = 1^0$ ist $AB' - AB'' = \frac{1432,467}{-1434,724} = -2,257.$

Bei $A = 11^0$ ist $AB' - AB'' = \frac{131,0214}{-128,8364} = +2,185.$

Digitized by Google

Dieses ist der Werth in Einheiten der gemessenen Entfernung für $BC = 50$; in Procenten der richtigen Entfernung ausgedrückt, ist dieser Werth bei $A = 1^0$ so viel als 0,16% bei $A = 11^0$ dagegen 1,67% derselben.

Es wird also mit Hülfe von Tafel II. die gemessene Entfernung, wenn der Winkel C oder $(A+B) = 30^0$ oder $= 150^0$ ist, für die Parallaxe $A = 1^0$ um etwa 2 Einheiten zu gross, für die Parallaxe $A = 11^0$ dagegen um etwa 2 Einheiten zu klein gefunden werden, wenn die Basis BC fünfzig Einheiten lang ist. Gegen $A = 3{,}4^0$ hin wird der Fehler von beiden Seiten her kleiner, und verschwindet bei $A = 3{,}4^0$ gänzlich. Man sieht, dass ein solcher Fehler vernachlässigt werden darf, und dass es daher zulässig ist, für die Berechnung von Tafel II. einen constanten Werth des Nenners, $\cos C$ anzunehmen.

§. 8.

Der Unterschied von AB (Taf. II. Fig. 2.) und AC kann vernachlässigt, und $AC = AB$ gesetzt werden. Denn wenn $B = 90^0$, so ist, wie in Formel D):

$$AC = \frac{BC}{\sin A}.$$

Die nachstehende Zusammenstellung zeigt von Grad zu Grade, wie gross der Unterschied von AB und AC ist, und zugleich die halben Differenzen der nach Tafel I. gemessenen Entfernungen, als den muthmasslich begangenen Fehler.

A	AB	AC	Diff. $AC - AB$	Halb-Diff. aus Taf. I.
1⁰	2864,50	2864,93	0,43	68
2⁰	1431,81	1432,69	0,88	18
3⁰	954,06	955,37	1,31	8 resp. 16
4⁰	715,03	716,78	1,75	8,5
5⁰	571,50	573,69	2,19	6
6⁰	475,72	478,34	2,62	4
7⁰	407,22	410,28	3,06	3
8⁰	355,77	359,26	3,49	2
9⁰	315,69	319,62	3,93	2
10⁰	283,56	287,94	4,38	1,5
11⁰	257,23	262,04	4,81	1,5

Digitized by Google

Die Differenz $AC-AB$ verschwindet noch mehr, wenn man gemäss der am Ende von §. 5. gegebenen Regel bei der Messung den Winkel B ein wenig kleiner als 90^0 angenommen hat.

Musste jedoch BC in bedeutend schräger Stellung gegen AB gemessen werden, so dass die Anwendung von Tafel II. nothwendig wurde, so findet man erforderlichen Falles AC, indem man bei Anwendung von Tafel II. C für B, und B für C setzt.

Man ersieht aus der, in den vorstehenden Paragraphen gegebenen Darstellung, dass eine erhebliche Vergrösserung der Basis BC, und damit des Winkels A für die Praxis keinen Vortheil gewähren würde; einmal, weil die zu messenden Entfernungen verhältnissmässig zu kurz werden, um sie ohne Anwendung eines zweiten Winkels richtig zu finden; dann, weil eine einigermassen bedeutende Abweichung des Winkels B von einem Rechten das Resultat der Berechnung aus Tafel I. unrichtig machen, man also BC förmlich anvisiren, und überall die, in der Regel entbehrliche Tafel II. anwenden müsste; drittens, weil es nicht zulässig wäre, für die Berechnung von Tafel II. den Werth von $\cos A$ als constant anzunehmen, wie §. 7. geschieht; endlich, weil AB und AC zu sehr verschieden sein würden, und es in vielen Fällen wünschenswerth ist, beide zugleich zu erhalten.

Alle diese Umstände rechtfertigen zugleich die Benennung des Verfahrens als Messung auf der kurzen Basis.

§. 9.

Beispiele.

In den hier folgenden Beispielen wird, wie bereits erwähnt wurde, vorausgesetzt, es stehe eine gute Feldmesserboussole, womöglich mit Fernrohr versehen, und irgend eine Vorrichtung, um eine Länge von 10 Ruthen $= 50^{\times}$ zu messen zur Disposition *).

Es sei von dem Punkte B (Taf. II. Fig. 2.) aus die Entfernung $AB = d$ zu messen. Ein Beobachter stelle die Boussole über B, und visire nach A, während zugleich ein zweiter nach dem Augenmaass ungefähr senkrecht auf AB **) eine Länge von $BC = 10^R = 50^{\times}$

*) Ein blosses Abschreiten der Basis würde ungenügend sein.

**) Vergl. wegen der zulässigen Abweichung §. 4. und §. 5.

Digitized by Google

abmisst*). Der erste Beobachter stelle darauf die Boussole über C, und visire nochmals nach A. Der Unterschied der Visirwinkel bei B und C giebt die Grösse des Winkels A. Man sucht Winkel A in Tafel I. in der ersten, mit $\overset{0}{A}$ (Grade) überschriebenen Spalte, und findet daneben in der zweiten, mit $\underset{\times}{d}$ überschriebenen, die Entfernung in Schritten.

Die dritte, mit Diff. bezeichnete Spalte giebt von 1^0 bis 3^0 die Differenzen der Entfernungen d von 3 zu 3 Minuten, und von 3^0 bis 11^0 diese Differenzen von 6 zu 6 Minuten.

Diese Spalte drückt zugleich den äussersten, bei der Messung möglichen Fehler aus, wenn man annimmt, der Fehler in der Winkelmessung betrage $^1/_{10}{}^0$, oder 6 Minuten. Genügt die erlangte Genauigkeit nicht für den Zweck der Messung, und hat man Zeit, so kann man, wie Beispiel 5 näher ausführt, von B' (Taf. II. Fig. 6.) nach C', von B'' nach C'' u. s. w. die Messung wiederholen, und ein Mittel nehmen; oder noch besser, wenn es angeht, bei grösseren Entfernungen die Basis BC in einer Länge von 50^R anstatt von $50^\times$ abmessen. Man erhält dann die Entfernung d in Ruthen.

Die Distanzen von $A = 1^0$ bis $A = 3^0$ sind in der Voraussetzung berechnet, man habe aus mehreren Winkelmessungen ein Mittel genommen, welches bis auf $^1/_{20}{}^0$ richtig sei.

Es ist noch zu erwähnen, dass nach der üblichen Construction der Boussole die Magnetnadel an dem rechts liegenden Punkte B stets mehr zeigt, als an dem links liegenden Punkte C.

Beispiel 1. Die Entfernung eines Punktes A von B aus soll gefunden werden. (Taf. II. Fig. 2.)

Man messe $BC = 10^R = 50^\times$, indem man zugleich von B gegen A visirt.

Die Magnetnadel zeige . . . . $284{,}8^0$

Darauf visire man von C gegen A. Die Nadel zeige $281{,}3^0$

Man erhält $A = 3{,}5^0$

Neben 3,5 findet man in Tafel I. die Entfernung $d = 817^\times$ mit einem muthmasslichen Fehler von $^{24}/_2 = 12^\times$ **).

*) Ich wähle für Ruthen die Bezeichnung ^{R}, anstatt der gebräuchlichen ^{0}, weil letztere auch für Grade gebraucht wird, und sie hier oft zu Verwechselungen Anlass geben würde.

**) Der muthmassliche Fehler ist von dem möglichen zu unterscheiden. Der letztere dürfte doppelt so gross anzunehmen sein.

Digitized by Google

Beispiel 2. Man verfahre wie in Beispiel 1. und erhalte

bei *B* . . . . 85,6°
„ *C* erhalte man . . . . 79,7°

$A = 5{,}9°$.

Neben $A = 5{,}9°$ findet man die Entfernung $d = 484^{\times}$ mit einem muthmasslichen Fehler von $^8/_2 = 4^{\times}$.

Beispiel 3. In einem ähnlichen Falle erhalte man bei

B . . . . 2,7°
C . . . . 358,9°

Abgezogen von 362,7° giebt $A = 3{,}8°$,

wofür man die Entfernung findet $d = 753^{\times}$ mit einem muthmasslichen Fehler von $^{20}/_2 = 10^{\times}$.

Beispiel 4. Eine sehr kurze Entfernung *AB*, etwa die Breite eines Flusses sei zu messen.

Man messe von *B* nach *C* nur $2^R = 10^{\times}$ ab. Man visire in *B* nach *A*, und erhalte . . . . 134,4°
darauf visire man von *C* nach *A*, und erhalte 123,7°

Abgezogen giebt 10,7°.

Man suche zu $A = 10{,}7°$ die Entfernung $265^{\times}$, welche mit 0,2 multiplicirt $53^{\times}$ als die Breite des Flusses giebt, mit einem muthmasslichen Fehler von $0{,}3^{\times}$.

Beispiel 5. Es soll die Entfernung eines sehr entlegenen Punktes gefunden werden. (Taf. II. Fig. 6.)

Man messe $BC = 50^{\times}$ fünfmal, aber an etwas verschiedenen Stellen, so dass die Punkte *B'*, *B''*, *B'''* u. s. w. etwa 1^R aus einander liegen, und ebenso die Punkte *C'*, *C''* *C'''* u. s. w. Man visire von *B'*, *B''* u. s. w. und von *C'*, *C''* u. s. w. fünfmal gegen *A*. Man erhalte

Digitized by Google

bei B'	236,1°	bei C'	234,6°
„ B''	236,0	„ C''	234,4
„ B'''	235,8	„ C'''	234,3
„ B^{IV}	235,6	„ C^{IV}	234,1
„ B^{V}	235,5	„ C^{V}	234,0
Mittel $B = 235{,}80°$		Mittel $C = 234{,}28°$	

Diff. $B - C = 1{,}52°$ *).

Man findet neben $A = 1{,}55°$ die Entfernung $d = 1848^{\times}$ und mit Hinzurechnung von $^3/_5$ der Differenz aus der dritten Spalte mit 37 ergiebt sich die gesuchte Entfernung $d = 1885^{\times}$ mit einer muthmasslichen Unsicherheit von $^{61}/_2 = 30\frac{1}{2}{}^{\times}$.

Hätte man, anstatt die Visirung fünfmal zu wiederholen, die Basis BC fünffach so lang, $= 50^R$ gemessen, so würde man für $A = 7{,}7°$ die Entfernung $d = 370^R$ mit einem muthmasslichen Fehler von $^5/_2{}^R = 12\frac{1}{2}{}^{\times}$ gefunden haben. Um Schritte zu erhalten, wurde 370 mit 5 multiplicirt, was $1850^{\times}$ ergab **).

§. 10.

Beispiele.

Geht es nicht an, oder ist es nicht bequem, BD (Taf. II. Fig. 7.) beinahe senkrecht auf AB zu messen, oder will man aus BD

---

*) Die genaueren Maasse würden folgende gewesen sein:

bei B'	236°	6'	28,8"	bei C'	234°	34'	4,4"
„ B'' . . .	235	57	14,4	„ C'' . . .	„	24	50,2
„ B'''		48	0,0	„ C''' . . .	„	15	36,0
„ B^{IV} . . .		38	45,6	„ C^{IV} . . .	„	6	21,8
„ B^{V}		29	31,2	„ C^{V} . . .	233	57	7,6
Mittel $B = 235°\ 48'\ 0''$ $= 235{,}80°$				Mittel $C = 234°\ 15'\ 36''$ $= 234{,}26°$			

Diff. $B - C = 1°\ 32'\ 24'' = 1{,}54°$.

**) Die richtige Entfernung würde $1859{,}8^{\times}$ gewesen sein. Die Differenz von bezüglich $-25^{\times}$ oder $+10^{\times}$, je nachdem man aus einer fünfmaligen Anvisirung von A ein Mittel nahm, oder aber eine fünffach so grosse Basis abmass, diese Differenz entsteht daraus, dass man bei genauer Messung nicht $A = 1{,}52°$, sondern 1,54 und bezüglich nicht $A = 7{,}7° = 7°42'$, sondern $A = 7{,}656° = 7°\ 39'\ 21{,}5''$ hätte erhalten müssen; eine Differenz von 0,044°, welche die vorausgesetzte Genauigkeit des Messinstruments nicht gewährte. Man ersieht übrigens aus

Digitized by Google

die Entfernung von Punkten bestimmen, welche gegen *BC* eine erheblich schräge Lage haben, so ist man genöthigt, sich der Tafel II. zu bedienen.

Man bestimmt zuerst *AB* aus Tafel I., wie gewöhnlich. Alsdann sucht man entweder $(A+B)$ oder C in einer der ersten beiden Colonnen von Tafel II. Der daneben stehende Werth von p wird mit *AB* multiplicirt. Das Produkt $AB.p = AB'$ nach Wegwerfung von drei Decimalstellen, giebt die gesuchte Entfernung des Punktes A.

Wäre daran gelegen, auch *AC* zu finden, so verfährt man ebenso, sucht jedoch $(A + C)$ anstatt $(A + B)$ oder B anstatt C in einer der beiden ersten Colonnen von Tafel II.

Häufig wird es bequem sein, *AB* nicht mit p, sondern mit der dekadischen Ergänzung von p zu multipliciren, und das Produkt von *AB* abzuziehen. Der Rest ergiebt dann die gesuchte Entfernung AB'.

Beispiel 6. (Taf. II. Fig. 7.) Es sei in einem Falle, wo sich *BC* nicht beinahe senkrecht auf *AB* messen liess, $A = 3{,}9^0$ gefunden. Man erhielt daneben $d = 733$✕. Es sei aber der Winkel, welchen *BC* mit *AB* bildet, nämlich $B = 59^0$, also $(A + B) = 62{,}9^0$. Neben $62{,}9^0$ findet man mit Berücksichtigung der Differenz in der 3ten Spalte $p = 0{,}892$.

Durch Multiplication erhält man $733 \times 0{,}892 = 733 - 733 \times 0{,}108 = 733 - 79 = 654$✕ $= AB$, als die gesuchte Entfernung. Der muthmassliche Fehler wird in dem Verhältnisse kleiner, als *BD* kleiner wird. Er beträgt also in dem vorliegenden Beispiel $^{20}/_2 \times 0{,}9 = 9$✕.

Beispiel 7. Gegeben $A = 2{,}40^0$ und $B = 131{,}3^0$, also $(A + B) = 133{,}7^0$. Man findet aus Tafel I. $d = 1193$, und neben 134^0 mit Berücksichtigung der Differenz, $p = 0{,}725$, mithin $AB = 1193 \times 0{,}725 = 865$✕, mit einem muthmasslichen Fehler von $^{25}/_2 \times 0{,}7 = 9$✕.

Beispiel 8. Es sei $A = 9{,}8^0$ und $B = 80^0$, also $A + B = 89{,}8^0$. Man suche aus Tafel I. zu $9{,}8^0$ die Entfernung $d = 290$✕, und

---

Beispiel 5., dass, wo es angeht, die Abmessung einer längeren Basis vorzuziehen ist. Die Annahme eines Mittels gab $30\frac{1}{2}$✕ als den muthmasslichen Fehler, die längere Basis dagegen nur $12\frac{1}{2}$✕. Der Fehler, $7{,}7^0$ anstatt $7{,}656^0$, wurde absichtlich sehr gross angenommen.

Digitized by Google

zu $A + B = 90^0$ die Verhältnisszahl $p = 1{,}002$, so erhält man $AB = 290 \times 1{,}002 = 291$ als die gesuchte Entfernung, mit einem muthmasslichen Fehler von $^3/_2 = 1{,}5^{\times}$. Man ersieht, dass die Berücksichtigung der schrägen Richtung von BC vernachlässigt werden konnte.

§. 11.

Beispiele.

Es mögen hier noch einige Aufgaben der militairischen Feldmesskunst folgen, um die Anwendbarkeit des Verfahrens zu zeigen.

Beispiel 9. Aus einem gegebenen Punkte die Lage eines anderen Punktes zu bestimmen. (Taf. II. Fig. 2.).

Der gegebene Punkt, an welchem sich der Beobachter befindet, sei B, derjenige, dessen Lage bestimmt werden soll, sei A. Man messe aus B eine Basis, BC, von $50^{\times}$ oder bezüglich von 50^{R} ab (je nach der Entfernung von A) ungefähr senkrecht auf AB *). Man visirt von B gegen A und findet die Richtung von AB durch die Magnetnadel. Ferner visirt man von C gegen A, und durch beide Visirlinien erhält man den Winkel A. Für den Winkel A findet man aus Tafel I. die Entfernung des Punktes A, und da man auch die Richtung von AB kennt, so ist die Lage des Punktes A gegen B bestimmt **).

Beispiel 10. Aus einem gegebenen Punkte A die Lage des Punktes B zu bestimmen, wo sich der Beobachter befindet.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist eben so, wie im Beispiel 9. ***).

Beispiel 11. Eine grosse Standlinie zu geometrischen Zwecken, etwa eine Viertelmeile lang zu messen. (Taf. II. Fig. 6.)

Nachdem man die Endpunkte der gewählten Standlinie deutlich bezeichnet hat, messe man senkrecht auf dieselbe eine Basis

*) Vergl. §. 5. am Ende.

**) So ist in den Beispielen 1. bis 5. überall nicht nur die Entfernung von A, sondern auch dessen Lage gegen B bekannt.

***) Bekanntlich sind zur Lösung dieser Aufgabe nach den gewöhnlichen Methoden, mit Hülfe der Boussole zwei, ohne diese drei gegebene Punkte in günstiger Lage erforderlich. Vergl. v. Wedell, das militairische Aufnehmen, §. 38.

BC, von 50^R Länge, und verfahre dabei, wie in Beispiel 5., indem man den Punkt A aus verschiedenen, eine Ruthe aus einander liegenden Punkten der Basis BC anvisirt, und aus 5 Messungen ein Mittel nimmt.

Man habe folgende Richtungen der Visirlinie AB erhalten:

Bei	B'	$66,1^0$
	B''	66,0
	B'''	65,9
	B^{IV}	65,8
	B^{V}	65,7
	Mittel	$B = 65,90^0$
Bei	C'	$60,5^0$
	C''	60,3
	C'''	60,2
	C^{IV}	60,1
	C^{V}	60,0
	Mittel	$C = 60,22$
		$A = 5,68^0$ *).

Man erhält bei $A = 5,68$ eine Länge der Standlinie $d = 502,8^R$, mit einem muthmasslichen Fehler von $= 2\frac{1}{4}^R$, oder etwa 0,44 Procent der gemessenen Länge. Mit einer halb so grossen Genauigkeit, also mit einem Fehler von 0,88% wird man von den Endpunkten dieser Standlinie aus verschiedene Punkte der Umgegend bis zu einer zehnfach so grossen Entfernung, also bis gegen 5000^R oder $2\frac{1}{2}$ Meilen bestimmen können. Der muthmassliche Fehler in der Lage dieser Punkte würde also sein $0,44 + 0,88 = 1,32 = 1\frac{1}{3}$% etwa **).

---

*) Genauer würde die Messung folgende gewesen sein:

Bei	B'	$66^0\ 8'\ 6''$		Bei	C'	$60^0\ 27'\ 16'''$
	B''	„ 1 17			C''	„ 20 27
	B'''	65 54 28			C'''	„ 13 38
	B^{IV}	„ 47 39			C^{IV}	„ 6 40
	B^{V}	„ 40 50			C^{V}	„ 0 0
	Mittel	$B = 65^0\ 54'\ 28''$			Mittel	$C = 60^0\ 13'\ 38''$

Diff. $B - C = A = 5^0\ 40'\ 50'' = 5,6806^0$

**) Es sei die richtig gemessene Standlinie d, die daraus richtig abgeleitete Entfernung eines Punktes sei Fd, wo F irgend eine Funktion von d bedeutet. Nun sei die fehlerhaft bestimmte Standlinie $d' = d \pm sd$, und die Funktion F werde um $s'F$ fehlerhaft, so ergiebt sich die

Digitized by Google

Man ersieht, dass eine solche Genauigkeit in Fällen ausreichen dürfte, wo es an Zeit und Gelegenheit gebricht, genauere Operationen vorzunehmen.

Beispiel 12. Von einem gegebenen Punkte B aus verschiedene Punkte der Umgegend zu bestimmen. (Taf. II. Fig. 8.)

Man messe von B aus eine Basis, $BC = 10^R$ in solcher Lage, dass man von da aus nach den gesuchten Punkten A, A', A'' u. s. w. in nicht allzu schräger Richtung sehen kann. Sollten einige Punkte, A^{IV}, A^{V} u. s. w. gegen die Basis BC eine zu schräge Stellung haben, so messe man von B aus noch eine zweite Basis, BC' in günstigerer Lage gegen diese Punkte.

Von BC, oder nach Befinden von BC' aus, messe man die Entfernungen AB, $A'B$, $A''B$ u.s.w. mit Hülfe von Tafel I. und Tafel II. Die Richtung der Linien AB, $A'B$, $A''B$ u. s. w., wird gleichzeitig durch die Magnetnadel gegeben.

Ist ein Theil der gesuchten Punkte von B aus weit entfernt, so wird man für diese Punkte BC und $BC' = 50^R$ messen, für die näheren gleichzeitig Bc und $Bc' = 10^R = 50^{\times}$. Man kann sich alsdann der kürzeren, oder der längeren Basis beliebig bedienen. Tafel I. giebt dann selbstredend die Entfernung in dem jedesmal zu Grunde gelegten Maasse.

Die Messung auf der kurzen Basis dürfte eine sehr ausgebreitete Anwendung zulassen. Zunächst wird sie in fast allen Fällen ausreichen, wo eine Terrainaufnahme mit grosser Zeitersparniss ausgeführt werden soll. Aus Beispiel 11. ersieht man, dass sie sogar genügt, um eine Standlinie von beträchtlicher Länge zu messen. Für Detailaufnahmen aber, zu militairischen Zwecken, möchte sie wohl überall eine hinlängliche Genauigkeit gewähren.

Man bedient sich jetzt in Preussen dazu vorzugsweise der sogenannten Kippregel. Bekanntlich besteht das dabei beobachtete Verfahren darin, dass ein Gehülfe eine in Decimalzolle eingetheilte, 80 solcher Zolle lange Distanzlatte an diejenigen Punkte trägt, deren Ort bestimmt werden soll. Der Beobachter liest durch ein ziemlich starkes Fernrohr auf der Latte die An-

---

fehlerhaft bestimmte Entfernung $d'F' = (d \pm sd)(F \pm Fs') = (Fd \pm Fsd \pm Fs'd + ss'Fd = Fd(1 \pm s \pm s' + ss') = Fd\,[1 \pm (s + s')]$ weil $s's$ wegen seiner Kleinheit verschwindet, mithin $Fd - F'd' = \pm(s + s')$.

zahl Zolle ab, welche innerhalb von drei, resp. zwei Parallelfäden im Okular des Fernrohrs erscheinen. Die abgelesenen Zolle geben die gleiche, bezüglich die doppelte Anzahl Ruthen, welche jedoch, nach dem vorher ermittelten Fehler des Instruments, und zwar in Beziehung auf das Auge des jedesmaligen Beobachters, reducirt werden müssen. Man rechnet, dass sich mit der Kippregel und Distanzlatte, bei bestem Licht Entfernungen bis zu 600× mit hinlänglicher Schärfe schätzen lassen*). Wie gross dabei die Unsicherheit sein mag, ist nicht bekannt. Es sei jedoch bemerkt, dass bei der Kippregel die zum Grunde gelegte Basis (für 600× = 120^{R}) nur 0,6 Ruthen, bei der Messung auf der kurzen Basis dagegen 10 Ruthen beträgt, also $16^2/_3$ mal so gross ist. Die Entfernung von 600× würde durch die Messung auf der kurzen Basis bei einem Winkel $A = 4{,}8^0$ etwa mit einer Unsicherheit von 6× also von 1% der gemessenen Entfernung zu entnehmen sein.

Vor Allem dürfte die Messung auf der kurzen Basis für **artilleristische Zwecke** ein brauchbares, ja wohl das einzig praktisch brauchbare Mittel abgeben, um die Entfernungen der Schussziele zu bestimmen. Man hat zahlreiche und kostspielige Versuche gemacht, die Entfernungen durch Beobachtung von einem einzigen Standort aus zu schätzen, und der Verfasser dieses Aufsatzes ist selbst nicht frei von dem Vorwurf geblieben, dergleichen Versuche angestellt zu haben. Das Gelingen solcher Versuche ist jedoch in keiner Weise zu hoffen. Die unüberwindliche Schwierigkeit liegt in der, für die kleinsten Bewegungen ungenügenden Festigkeit der angewendeten Materialien, Eisen, Messing oder Holz, und in der daraus entspringenden Unmöglichkeit, den Collimationsfehler der Instrumente festzuhalten. Wenn ein Kanonenrohr, auf den Zapfen liegend, sich an beiden Enden abwärts biegt wie der Spinnenfaden im Okular des Fernrohrs, ja, wenn die festeste Mauer dem Druck der menschlichen Hand merkbar weicht**), so darf es nicht Wunder nehmen, wenn auch das solidest gebaute Instrument

*) H. v. Wedell, das militairische Aufnehmen, S. 146.: „Die Länge aller übrigen Entfernungen, so weit sie nicht schon aus der Aufnahme (mit dem Messtisch) selbst hervorgeht, wird in den grösseren Maassstäben durch die Kette ermittelt, in den kleineren dagegen werden die längeren Linien abgeschritten, die kürzeren nach dem Augenmaasse bestimmt," in so weit man sich nicht der Kippregel und Distanzlatte bedient. (S. 90.)

**) v. Littrow, Die Wunder des Himmels. 5. Auflage, S. 829.

Digitized by Google

innerhalb sehr feiner Grenzen nur schwankende, und damit unbrauchbare Angaben gewähren kann. Es würde Letzteres der Fall sein, selbst wenn ein solches Instrument nicht bestimmt wäre, beim Transport, und bei der Handhabung im Felde eine ziemlich rohe Behandlung zu ertragen.

Folgende Erörterung dürfte diese Behauptung noch etwas näher begründen. Jede optische Distanzmessung, ohne Ausnahme, beruht, und kann nur beruhen auf dem Winkel, den zwei Visirlinien, von den Endpunkten einer Basis ausgehend, gegen irgend einen anderen Punkt hin bilden. Je kleiner jene Basis, um so grösser muss die Genauigkeit der Winkelmessung sein, und umgekehrt ist bei einer grösseren Basis eine genauere Winkelmessung entbehrlich. Wäre z. B. eine Basis von 6 Fuss (die Mannshöhe des Gegners) genau messbar, wie sie es keineswegs ist, so würde es möglich sein, daraus die Entfernung des Feindes mit eben so grosser Genauigkeit abzuleiten, wie durch die vorgeschlagene Messung auf der kurzen Basis, aus einer solchen Basis von $50^{\times} = 10^{R} = 120$ Fuss, sobald das gebrauchte Instrument eine zwanzigfach so grosse Genauigkeit gewährte, als die Boussole. Wenn also Letztere möglicher Weise um $0{,}1^{0} = 6'$ fehlte, so würde jenes supponirte Instrument keinen Fehler über $^{6}/_{20} = 18''$ zulassen dürfen, um eine gleich grosse Genauigkeit zu gewähren.

Das vollkommenste Messinstrument, welches ohne solides Stativ gebraucht wird, ist wohl der Spiegelsextant; und seit seiner, jetzt mehr als anderthalbhundertjährigen Erfindung haben die grössten Gelehrten, und die geschicktesten Künstler gewetteifert, ihm denjenigen Grad von Vollkommenheit zu geben, deren er fähig ist. Mit diesem Instrument kann ein geübter Beobachter, bei gehöriger Ruhe und Sorgfalt, auf dem Lande Sonnenhöhen nehmen, mit einer Genauigkeit, welche einen Fehler von 47″ für den gemessenen Winkel (die doppelte Sonnenhöhe) nicht übersteigt*). Dieses ist der Fall bei Objecten der allerdeutlichsten Art, wie solche bei terrestrischen Beobachtungen niemals vorkommen, auch unter den allergünstigsten Verhältnissen nicht. Ist nun wohl irgend eine Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass ein Instrument erfunden werde, welches in den Händen eines minder geschickten Beobachters, bei minder deutlichen Objecten, in der

---

*) Bohnenberger, geographische Ortsbestimmung, S. 145. Es ist hier allerdings von dem möglichen Fehler die Rede, der wahrscheinliche ist beträchtlich geringer.

Unruhe des Gefechts über $2\frac{1}{2}$ mal mehr leiste, als der Spiegelsextant unter den günstigsten Verhältnissen?

Gleichwohl würde man Unrecht haben, wollte man es aufgeben, nach einer brauchbaren Methode zur sicheren und schnellen Auffindung von Entfernungen, der Schussziele zumal, zu suchen. Wenn früher vorzugsweise dem Artilleristen die Kenntniss dieser Entfernungen Bedürfniss war, so ist seit Einführung der fern treffenden Infanteriegewehre eine richtige Bestimmung der Distanzen noch mehr für die Infanterie unentbehrlich, will man nicht das (allerdings in seinen Erfolgen zweifelhafte) Fernschiessen gänzlich aufgeben. Denn die Infanterie hat nicht einmal die Möglichkeit, Probeschüsse zu thun, womit sich wohl die Artillerie hilft. Aber auch bei Probeschüssen, wenn solche überhaupt möglich sind, was nicht immer der Fall ist, geht Zeit und Material verloren, welche durch eine vorgängige Messung, meist ohne alle Gefährdung der Batterie erspart werden können. Sollten darum für die Ermittelung der Distanz auch einige Minuten verloren gehen, so würde der Zeitverlust durch die weit grössere Zahl der Treffer überreich ersetzt werden. Es lässt sich aber auch kaum begreifen, wie überhaupt ein Zeitverlust durch genaue Abmessung der Entfernungen eintreten könnte. Sobald nur ein einigermaassen deutliches Ziel sichtbar ist, können die Messungen jederzeit vor Beginn des Gefechtes, oder in den Pausen desselben, ja sogar während die Batterie in Bewegung ist, oder im Feuer steht, vorgenommen werden. Nichts hindert den Artilleristen, schon während der Messung, und bevor diese vollendet ist, eben so gut, oder eben so schlecht zu schiessen, als er es jetzt kann. Hat man aber einmal die Entfernung des stehenden Feindes, oder bestimmter fester Punkte, so ist nichts leichter, als diese Entfernung fest zu halten, und ihre Veränderung, auch in der schnellsten Gangart, genau zu controlliren, und zu berücksichtigen.

Die Bedingungen einer militairischen Distanzmessung sind vor Allem folgende: erstens, Dauerhaftigkeit und Unveränderlichkeit des Instrumentes, auch bei unvorsichtiger Behandlung im Transport und im Gebrauch; zweitens, leichte und übersichtliche Berechnung; drittens, Zuverlässigkeit in solchem Grade, als es die Schusswaffe verlangt; erst die vierte und entbehrlichste Bedingung ist Zeitersparniss. Es wäre ein Missgriff, wollte man dieser letzten Bedingung irgend einen Punkt jener drei ersten aufopfern.

Die Boussole ist ein Instrument, welches eine ziemlich rohe

Digitized by Google

en
u-
e.
uf
es
t,
ıst

lie
n-
a-
er

Digitized by Google

Behandlung ohne Nachtheil verträgt. Die damit ausgeführten Beobachtungen sind, innerhalb gegebener Grenzen, durchaus zuverlässig, und frei von Störungen durch äussere Umstände. Die Berechnung nach der Methode der Messung auf der kurzen Basis geht nicht über die Kenntniss eines Soldaten hinaus, welcher die Dorfschule besucht hat, sie ist dabei leicht zu controlliren. Der Zeitverlust endlich ist gering, und kommt, wie gezeigt wurde, nicht in Betracht.

Verbesserungen des Verfahrens sind allerdings möglich. Sie können aber nur gefunden werden in Verbesserungen des angewendeten Instrumentes, der Boussole nämlich, und ihres Stativs im Sinne grösserer Genauigkeit, und wohl auch grösserer Schnelligkeit in der Beobachtung.

VI.

Eine auffällige Eigenheit der Richtungen der, durch ein Prisma oder durch mehrere Prismen mit parallelen Kanten, gebrochenen Lichtstrahlen.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka,*

Professor an der Hochschule zu Prag.

Bei einer, zur Verwendung in meinen diessemestralen Vorlesungen über Optik ausgeführten analytisch - geometrischen Untersuchung der Brechung von Lichtstrahlen, welche auf ein Prisma nach beliebiger Richtung — also nicht allein, wie in den Lehrbüchern der Physik überall vorausgesetzt, zur brechenden Kante desselben senkrecht — treffen, entdeckte ich eine Eigenheit der durch selbes gebrochenen Strahlen, die selbst in den optischen Handbüchern von Herschel (Verhulst, Quetelet), E. Schmidt und Littrow nicht angeführt wird und einer öffentlichee Mittheilung mir nicht unwerth erscheint, zumal auch noch meine hier folgende Begründung derselben höchst einfach und leicht ist.

Die angedeutete Eigenheit spricht sich in folgenden Sätzen aus.

1. Wird ein Lichtstrahl durch ein, von einem bestimmten Medium umgebenes, Prisma gebrochen, so tritt er unter dem nemlichen Neigungswinkel gegen eine gewisse Richtung der brechenden Kante dieses Prisma wieder ins Mittel hinaus, unter dem er ursprünglich ins Prisma eingetreten ist.

2. Geht ein Lichtstrahl durch eine Reihe von, das Licht verschieden brechenden Mitteln, welche durch Ebenen, die allesammt zu einer feststehenden Geraden — der **Parallellinie** — parallel sind, von einander abge-

Digitized by Google

sondert werden, also durch ein System, der Ordnung nach an einander sich anschliessender, Prismen mit lauter unter sich parallelen brechenden Kanten hindurch; und tritt er nach allen erfahrenen Brechungen endlich ins ursprüngliche Mittel wieder hinaus: so geschieht sein Austritt unter demselben Neigungswinkel gegen eine bestimmte Richtung jener Parallellinie, unter welchem sein Eintritt erfolgt war.

Beide Sätze sind eigentlich höchst nahe liegende Folgerungen aus demjenigen Lehrsatze, den ich in diesem Archiv, 1860, Th. XXXIV. S. 321. in meinem Aufsatze: „Interessante Abänderung des Ausspruchs des Gesetzes der gewöhnlichen Lichtbrechung", 2. Abs., in folgender Fassung aufgestellt habe:

„Bei der (gewöhnlichen) Brechung des Lichtes an einer, zwei Mittel scheidenden, Ebene ist das beständige sogenannte Brechungsverhältniss auch gleich dem Verhältnisse der Cosinus der Winkel, welche der einfallende und der gebrochene Lichtstrahl, nach der Richtung ihrer Fortpflanzung genommen, mit was immer für einer zur Trennungsebene gleichlaufenden Richtung bilden."

Sind nemlich erstens μ, μ', μ'' die Winkel, welche beziehungsweis der in ein Prisma eintretende, der darin (gebrochen) sich fortbewegende und der aus ihm ins ursprüngliche, das Prisma umgebende, Mittel wieder hinausfahrende Lichtstrahl mit einer gewissen Richtung der brechenden Kante bildet, und stellt n den Brechungsindex beim Uebergange des Lichtes aus dem Mittel (z. B. Luft) ins Prisma (z. B. Glas) vor: so hat man, weil diese brechende Kante in beiden Trennungsebenen (den Wänden des Prisma) liegt, zufolge des erwähnten Satzes, bei der ersten Brechung im Prisma die Proportion

$$\cos\mu:\cos\mu'=n:1,$$

bei der zweiten Brechung, dem Wiederaustritt ins Mittel, aber die Proportion

$$\cos\mu':\cos\mu''=1:n;$$

mithin folgt aus beiden sofort

$$\cos\mu''=\cos\mu,$$

und da solche Winkel jedesmal als hohl ($<180^0$) aufgefasst werden, ist auch

$$\mu''=\mu.$$

Sind ferner im zweiten, allgemeinen Falle die Trennungsebenen

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \ldots \mathfrak{T}_i, \ldots \mathfrak{T}_r,$$

von $r+1$, der Reihe nach paarweis an einander grenzenden, verschiedenen lichtbrechenden Mitteln zu einer feststehenden Geraden g parallel, also auch ihre Durchschnittlinien (brechenden Kanten) zu dieser Geraden und folglich auch unter einander parallel; so seien

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_i, \ldots \mu_r$$

die (durchaus hohlen) Winkel, welche der einfallende Strahl und die sämmtlichen r an jenen Trennungsebenen gebrochenen Strahlen nach der Ordnung mit der Parallellinie g bilden. Zugleich seien die sogenannten absoluten Brechungsexponenten sämmtlicher nach einander folgender Mittel den Quotienten oder reciproken Werthen

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \ldots \frac{1}{n_i}, \ldots \frac{1}{n_r}$$

proportionirt, welche der Vibrationstheorie des Lichtes zufolge den Geschwindigkeiten der Fortpflanzung desselben in dieser Kette von Mitteln proportional sind; folglich seien die relativen Brechungsverhältnisse zwischen den nach einander kommenden Paaren dieser Mittel

$$\frac{1}{n}:\frac{1}{n_1}, \quad \frac{1}{n_1}:\frac{1}{n_2}, \quad \frac{1}{n_2}:\frac{1}{n_3}, \quad \text{u. s. f.}$$

Da nun die Parallellinie g zu allen angeführten Trennungsebenen parallel ist, so hat man an der Trennungsebene $\mathfrak{T}_1$ die Proportion

$$\cos\mu : \cos\mu_1 = \frac{1}{n}:\frac{1}{n_1}$$

oder kürzer die Productengleichung

$$n\cos\mu = n_1\cos\mu_1.$$

Aus gleichen Gründen besteht ähnlich

an der Trennungsebene $\mathfrak{T}_2$ die Gleichung $n_1\cos\mu_1 = n_2\cos\mu_2$
„ „ „ $\mathfrak{T}_3$ „ „ $n_2\cos\mu_2 = n_3\cos\mu_3$
u. s. w.

mithin zusammengefasst an den Trennungsebenen

$$\mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{T}_2, \quad \mathfrak{T}_3, \ldots \mathfrak{T}_i \ldots \mathfrak{T}_r$$

die Gleichungen

$$n\cos\mu = n_1\cos\mu_1 = n_2\cos\mu_2 = n_3\cos\mu_3 = \ldots = n_i\cos\mu_i = \ldots = n_r\cos\mu_r.$$

Digitized by Google

Ist dann das $(r+1)$te Mittel hinter der letzten Trennungsebene $\mathfrak{T}_r$ wieder das ursprüngliche Mittel, so ist

$$n_r = n, \text{ folglich } \cos\mu_r = \cos\mu, \text{ und hiernach auch } \mu_r = \mu.$$

Aus der letzten Kette von Gleichheiten zieht man noch ganz leicht folgende Schlüsse.

I. Für einen mittleren oder Zwischenstrahl, z. B. den, der an der Trennungsebene $\mathfrak{T}_i$ im $(i+1)$ten Mittel gebrochen wird, besteht die Gleichung

$$n_i \cos\mu_i = n \cos\mu,$$

also gibt sie

$$\cos\mu_i = \frac{n}{n_i} \cdot \cos\mu.$$

Der Neigungswinkel irgend eines Zwischenstrahls gegen die Parallellinie hängt demnach lediglich ab vom gleichartigen Winkel des einfallenden Strahles und von den absoluten Brechungsindices oder vom relativen Brechungsverhältnisse derjenigen zwei Mittel, in denen sich diese beiden Strahlen bewegen, keineswegs aber von den absoluten Brechungsindices oder den diesbeziehlichen optischen Beschaffenheiten der vom Lichtstrahle sonst schon durchwanderten Zwischenmittel.

II. Sind sonach die absoluten Brechungsexponenten zweier Zwischenmittel gleich, so sind die diese Mittel durchlaufenden gebrochenen Lichtstrahlen gegen die Parallellinie auch gleichgeneigt.

III. Weil die Brechungsindices jederzeit absolut (unbezogen) genommen werden, so müssen alle hier vorkommenden Cosinus einstimmig, folglich die in Rede stehenden Neigungswinkel allesammt gleichartig, d. i. durchweg entweder spitze oder rechte oder stumpfe sein. Ist demnach der einfallende Lichtstrahl gegen die Parallellinie (brechenden Kanten) unter einem spitzen, rechten oder stumpfen Winkel geneigt, so sind es auch alle gebrochenen Strahlen ebenso.

Sollten übrigens diese von mir, auf einem anderen Wege selbständig, aufgefundenen Sätze bereits vorlängst in einer mir unbekannten Schrift aufgestellt worden sein, was heut zu Tage ganz leicht möglich wäre; so würde ich eine anständige Belehrung hierüber, wie sie selbst von tiefst gelehrten Männern auszugehen pflegt, gern entgegen nehmen.

Prag 30. Jäner 1867.

Digitized by Google

VII.

Das Aneroid als Instrument zur Messung der Aenderungen der Schwere.

Von

Herrn Professor *H. Schramm*
in Wiener-Neustadt.

Unter diesem Titel finden wir in Nr. 7. der östereichischen Zeitschrift für Meteorologie einen Aufsatz von Sr. Excell. B. Freih. von Wüllerstorf-Urbair, in welchem der geehrte Verfasser darauf hinweiset, dass das Aneroid von der Anziehungskraft der Erde und des Mondes nicht derart beeinflusst wird, als das Quecksilber-Barometer. Man könne also aus der Differenz der Angaben des Aneroides und eines Barometers auf die Zunahme der Schwere mit der geografischen Breite schliessen; ebenso könne man die Abnahme der Schwere mit der Höhe, so wie deren Einfluss auf die Schwankungen der Ebbe und Fluth des Luftmeeres messen. Diese Ideen sind an und für sich ganz richtig; es frägt sich nur, ob derlei Messungen mit den genannten Instrumenten in ihrer gegenwärtigen Form ausführbar sind und ob sie zu brauchbaren, verlässlichen Resultaten führen können.

Da ferner der geehrte Verfasser am Schlusse seines Aufsatzes die Männer, deren Beruf es ist, die Wissenschaft zu pflegen, auffordert, sich diesen Gegenstand anzueignen, in der Hoffnung, dass es vielleicht Andern gelingen werde, sich mit derlei Untersuchungen auf eingehendere Weise zu befassen, als es bei ihm der Fall sein kann, so möge es gestattet sein, die Ausführbarkeit eines solchen Messungsverfahrens zu erörtern.

Diese Frage können wohl nur Zahlen beantworten, und zwar jene Zahlen, welche uns die entsprechende Benutzung der einfachsten Attraktions-Gesetze liefert.

Digitized by Google

Bezeichnet man mit G und G' die Gewichte einer Quecksilbersäule, welche dieselbe in den Entfernungen R und $(R+H)$ vom Erdmittelpunkte besitzt, so ist bekanntlich:

$$G : G' = (R+H)^2 : R^2.$$

Sollen aber zwei Quecksilbersäulen von gleichem Querschnitte und ungleichem Gewichte einer und derselben Luftsäule das Gleichgewicht halten, so müssen ihre Höhen h und h' in umgekehrtem Verhältnisse zu deren Gewichten stehen, d. h.

$$h' : h = G : G'.$$

Im vorliegenden Falle, wo es sich um vorläufige Schätzungen handelt, kann man R und H in runden Zahlen annehmen:

$$r = 6377000 \text{ Meter},$$
$$H = 1000 \text{ Meter}.$$

Gesetzt, man habe in dieser Höhe von 1000 Metern über der Meeresfläche einen Luftdruck von 680^{mm} am Quecksilberbarometer abgelesen, so findet man mit Hilfe obiger Proportionen, dass die Quecksilbersäule in Folge ihres verminderten Gewichtes um

$$0{\cdot}21^{mm}$$

zu gross sein muss, daher ein zugleich abgelesenes Aneroid um dieselbe Grösse von 0.21^{mm} weniger anzeigen wird. Eingehendere sorgfältige Untersuchungen der Aneroide haben jedoch gezeigt, dass die Unsicherheit im Ablesen derselben, selbst bei guten Instrumenten, circa 0·2 bis 0·4 Millim. beträgt. Wir verweisen hiemit auf die Untersuchungen über die Leistungen der Bourdon'schen Metallbarometer von J. F. Schmidt, welcher die Unsicherheit im Ablesen auf 0·1 bis 0·2 par. L. angibt; ferner auf die von Dr. Pierre (1860) veröffentlichten Untersuchungen, worin die zufälligen Schwankungen des Zeigers auf 1 bis 2^0 geschätzt werden, was abermals einem Ablesefehler von 0·2 bis $0{\cdot}4^{mm}$ entspricht. Ebenso finden wir in den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, 1862. XLV. eine Abhandlung von Prof. J. Wastler, worin der wahrscheinliche Fehler eines von ihm durch längere Zeit geprüften Bourdon'schen Aneroides mit $\pm 0{\cdot}36^{mm}$ angegeben ist.

Wenn also der geehrte Verfasser des Eingangs erwähnten Aufsatzes die Bemerkung macht, er habe bei einem Versuche auf dem 1000 Fuss hohen Felsenberge Gibraltars seine Voraussetzungen in sehr befriedigender Weise bestätiget gefunden, so dürften wohl die damals (1859) beobachteten Unterschiede beider

Digitized by Google

Instrumente weit eher dem unregelmässigen Gange des Aneroides, als dem Einflusse der Schwere zuzuschreiben sein, indem der letztere Einfluss, wie die Rechnung zeigt, für eine Erhebung von 1000 Fuss höchstens

$$0\cdot08^{mm}$$

betragen kann. Man sehe nur, welche bedeutenden Differenzen das Aneroid bei abnehmendem Drucke zeigt, wenn es mit einem Quecksilber-Barometer verglichen wird. So z. B. ergaben sich bei zwei, vom Astronomen J. F. Schmidt unter der Luftpumpe geprüften Aneroiden Differenzen, die bis zu 5 Millim. stiegen, und es ist bisher noch nicht gelungen, ein Aneroid herzustellen, welches von dieser Art der Unregelmässigkeit im Gange gänzlich frei wäre.

Ueberdies machte Professor J. Wastler noch eine andere überraschende Bemerkung, nemlich jene, dass das Aneroid seinen Gang auch mit der Zeit beträchtlich ändert. So z. B. stand das von ihm beobachtete Aneroid am 1. April 1860 nur um $1\cdot2^{mm}$ höher als ein gleichzeitig beobachteter Kapeller; diese Differenz nahm später immer zu und betrug am 15. Oktober desselben Jahres schon $17\cdot3^{mm}$. Von dieser Zeit an wurden die Differenzen etwas geringer und der Gang des Instrumentes konstanter.

Hieraus lässt sich wohl schliessen, dass die Elastizität des Metalles keine so konstante Kraft ist als man es erwartet hatte, und daher mag es kommen, dass ein Aneroid, dessen Gang nicht innerhalb der benutzten Druckhöhen genau geprüft wurde, leicht zu irrigen Schlüssen veranlassen kann.

Die Abnahme der Schwere mit der geografischen Breite liesse sich in der besprochenen Weise eher wahrnehmen; denn benützt man zu deren Berechnung den in der barometrischen Höhenformel vorkommenden Ausdruck

$$G = G' \frac{1 - 0\cdot002588 \cos 2\psi'}{1 - 0\cdot002588 \cos 2\psi},$$

wobei ψ die geografische Breite bedeutet, setzt ferner $\psi' = 45^0$, und substituirt für die Gewichte die Höhen h und h' der Quecksilbersäule, so erhält man:

$$h' = \frac{h}{1 - 0\cdot002588 \cos 2\psi}.$$

Für $\psi = 0$ und $h = 760^{mm}$ gibt uns die Formel

$$h' = 761\cdot97^{mm}$$

Digitized by Google

d. h. es wird an einem um 45° nördlicher gelegenen Orte A das Barometer unter sonst gleichen Verhältnissen um $1{\cdot}97^{mm}$ tiefer stehen als am südlicheren Orte B. Diese Differenz könnte man allerdings am Aneroide ablesen, obwohl auch sie in Anbetracht der grossen Differenz von 45° und der besprochenen Unsicherheit im Ablesen dieser Instrumente kaum hinreicht, um als Basis für weitere Schlüsse zu dienen. Jedenfalls wird sie die Genauigkeit der Pendelmessungen bei Weitem nicht erreichen.

Endlich finden wir in demselben Aufsatze eine Hinweisung darauf, dass die Ebbe und Fluth des Luftmeeres mittelst des Aneroides weit besser zu messen wäre, indem durch die Anziehung des Mondes die Schwere eine veränderliche wird, und es daher unmöglich ist, mittelst des gewöhnlichen Barometers ein entsprechendes Resultat zu erzielen.

Sehen wir daher nach, um wie viel die Anziehung des Mondes das Gewicht des Quecksilbers vermindert.

Bezeichnet M und R die Masse und den Radius der Erde und ebenso M' und D die Masse und Entfernung des Mondes, so ist bekanntlich:

$$G:G'=h':h=\frac{M}{R^2}:\frac{M'}{D^2}.$$

Die mittleren Werthe von M' und D sind aber:

$$M'=\frac{M}{87{\cdot}7},\quad D=60{\cdot}3R;$$

und man findet daraus für $h=760^{mm}$:

$$h'=0{\cdot}0024^{mm}.$$

Um diese Grösse h' wird die Quecksilbersäule beim Neumonde zu gross, beim Vollmonde zu klein sein; dieses gibt zusammen eine Differenz von

$$0{\cdot}0048^{mm},$$

welche weder am Aneroide, noch am Barometer abgelesen werden kann. Es wird also die Ebbe und Fluth des Luftmeeres, insoweit sie vom Monde erzeugt ist, auf beide Instrumente nahezu die gleiche Wirkung ausüben.

Die Anziehung der Sonne und die daraus folgende Zu- und Abnahme des Gewichtes liesse sich auf diese Art eher konstatiren; denn man findet durch eine der früheren ähnliche Rechnung, dass sie die Quecksilbersäule des Mittags um $0{\cdot}48^{mm}$ zu gross, Mitternachts um eben so viel zu klein macht.

Digitized by Google

Diese Betrachtungen führen also zu dem Resultate, dass sich die Aneroide in ihrer gegenwärtigen Form zu den im zitirten Aufsatze vorgeschlagenen Messungen nicht eignen. Sie müssten zu diesem Zwecke in einem weit grösseren Massstabe verfertigt und deren Empfindlichkeit um ein Beträchtliches gesteigert werden.

Dabei ist jedoch nicht zu übersehen, dass damit auch alle Unregelmässigkeiten des Ganges, deren das Aneroid in reichlichem Masse besitzt, vergrössert würden, und dass wir, um ein Aneroid zu prüfen, noch kein anderes Mittel besitzen, als dasselbe mit einem guten Quecksilberbarometer zu vergleichen. Es wäre daher auch unter den letzteren Voraussetzungen die Genauigkeit der gehofften Resultate sehr zweifelhaft.

Trotz allen diesen Uebelständen ist das Aneroid dennoch ein brauchbares Instrument. Denn darin stimmen alle früher angeführten Untersuchungen überein, dass man es nach vorausgegangener Prüfung und Ermittelung aller seiner Correctionen ebenso wie ein anderes Barometer verwenden könne; ja es bietet bei Höhenmessungen noch den Vortheil der grösseren Bequemlichkeit dar und steht dem Barometer an Genauigkeit ziemlich nahe.

VIII.

Geometrischer Ort aller der Punkte, welche von einem Ellipsoide gleich stark angezogen werden.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor am Polytechnikum in Wien.

Nennt man

$$2a, \ 2b, \ 2c$$

die Hauptaxen eines Ellipsoids und sind

Digitized by Google

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

die Coordinaten eines Punktes, der sich im Inneren oder auf der Oberfläche des Ellipsoides befindet, so ergeben sich als Componenten der Kräfte, mit welchen das Ellipsoid den Punkt anzieht (falls das Newton'sche Anziehungsgesetz vorausgesetzt wird):

$$A = 4\pi\mu f\varrho\alpha \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{bc\cos^2\theta \sin\theta d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}},$$

$$B = 4\pi\mu f\varrho\beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{ac\cos^2\theta \sin\theta d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}},$$

$$C = 4\pi\mu f\varrho\gamma \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{ab\cos^2\theta \sin\theta d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)}};$$

m. s. 1. Band Seite 153 der deutschen von Stern besorgten Uebersetzung des Poisson'schen Lehrbuchs der Mechanik; und diese Componenten lassen sich kurz so schreiben:

$$A = \alpha\varphi_1(a, b, c) = \alpha\varphi(a, b, c),$$
$$B = \beta\varphi_2(a, b, c) = \beta\varphi(b, c, a),$$
$$C = \gamma\varphi_3(a, b, c) = \gamma\varphi(c, a, b).$$

Hieraus folgt als Resultirende:

$$R^2 = \alpha^2\varphi_1^2 + \beta^2\varphi_2^2 + \gamma^2\varphi_3^2.$$

Ist R constant und gleich λ, so ist der Ort aller der Punkte α, β, γ, für welche

$$\alpha^2\varphi_1^2 + \beta^2\varphi_2^2 + \gamma_2\varphi_3^2 = \lambda^2$$

ist, ein Ellipsoid, dessen Axen

$$\frac{2\lambda}{\varphi_1(a, b, c)}, \quad \frac{2\lambda}{\varphi_2(a, b, c)}, \quad \frac{2\lambda}{\varphi_3(a, b, c)}$$

sind. Es liegen sonach alle Punkte, welche von einem Ellipsoide gleich stark angezogen werden, auf der Oberfläche eines durch die Gleichung

$$\alpha^2\varphi_1^2 + \beta^2\varphi_2^2 + \gamma^2\varphi_3^2 = \lambda^2$$

bestimmten Ellipsoids.

Digitized by Google

IX.

Ueber merkwürdige Punkte der Spiegel- und Linsen-Systeme.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Gewisse merkwürdige Punkte der Spiegel- und Linsen-Systeme haben die Aufmerksamkeit der Mathematiker in neuester Zeit wieder mehrfach in Anspruch genommen, es sind darüber verschiedene besondere Schriften und Abhandlungen erschienen, ja man hat besondere optische Theorieen, die aber nach meiner Meinung für die Optik im Ganzen und Allgemeinen wenig leisten und ziemlich unfruchtbar sind, auch der nothwendigen Allgemeinheit entbehren, entwickelt, um die Eigenschaften der merkwürdigen Punkte der Spiegel- und Linsen-Systeme daraus abzuleiten. Diesen Bestrebungen und Arbeiten gegenüber muss ich mir die Bemerkung erlauben, dass, wenn man sich nur erst im Besitz ganz allgemeiner, der gesammten Optik zur Grundlage dienender Formeln und Gleichungen befindet, aus denselben die ganze Lehre von den in Rede stehenden merkwürdigen Punkten sich mit der grössten Leichtigkeit und besonderer Eleganz und Allgemeinheit ableiten lässt, und dass man also dazu besonderer Apparate, wie man sie in neuester Zeit nach meiner Meinung in ziemlich unvollkommener Weise an's Licht zu stellen versucht hat, gar nicht bedarf; ja es hat gar keine Schwierigkeit, mittelst der erwähnten allgemeinen Formeln die bisher bekannten merkwürdigen Punkte noch mit neuen nicht unerheblich zu vermehren.

Digitized by Google

In dem ersten Theile meiner

„Optischen Untersuchungen“,

von denen drei Theile erschienen sind*), nämlich:

Erster Theil. Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope. Leipzig. 1846., auch unter dem Titel: Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope, zugleich als ein Lehrbuch der elementaren Optik. Leipzig. 1846.

Zweiter Theil. Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre. Leipzig. 1847**).

Dritter Theil. Theorie der zweifachen achromatischen Oculare. Leipzig. 1851.

habe ich solche ganz allgemeine Formeln entwickelt, in diesem Werke jedoch auf die dem Zwecke desselben ferner liegenden merkwürdigen Punkte keine weitere Rücksicht genommen. Die diesen Gegenstand betreffenden neueren Arbeiten geben mir jetzt aber Veranlassung, hier zu zeigen, wie derselbe mittelst der von mir gegebenen allgemeinsten optischen Grundformeln mit der grössten Leichtigkeit und in völliger Allgemeinheit ohne jeden besonderen Hülfsapparat sich erledigen, diese Theorie sich auch, wenn man es für wünschenswerth halten sollte, mit neuen merkwürdigen Punkten bereichern lässt.

§. 2.

Um aber das Folgende den Lesern zu völligem Verständniss zu bringen, will ich aus meinem genannten Werke die den folgenden Betrachtungen lediglich zu Grunde liegenden Formeln angeben und ausführlicher erläutern, indem ich wegen der Ent-

---

*) Hierzu kommen noch meine „Beiträge zur meteorologischen Optik. I. Leipzig. 1848.“, worin u. A. der Regenbogen, die Dämmerung mit besonderer Rücksicht auf Lambert's Beobachtungen, die Luftspiegelung u. s. w. u. s. w. eine sehr ausführliche Behandlung gefunden haben.

**) Worin die zweifachen und dreifachen achromatischen Objective nach allen bisher in Anwendung gebrachten Principien sehr ausführlich behandelt und zur unmittelbaren praktischen Anwendung geeignete Formeln gegeben worden sind. Eben so im dritten Theile für die zweifachen achromatischen Oculare.

Digitized by Google

wickelung dieser Formeln natürlich auf das Werk selbst verweisen muss.

Jede Kugelfläche, welche die Lichtstrahlen nach den gewöhnlichen Gesetzen der Zurückwerfung reflectirt, wird ein sphärischer Spiegel, und jeder von zwei Kugelflächen begränzte Körper, welcher die Lichtstrahlen nach den gewöhnlichen Gesetzen der Brechung bricht, wird eine Linse genannt. Spiegel und Linsen, welche eine solche Lage im Raume haben, dass die Mittelpunkte der sämmtlichen dieselben bestimmenden Kugelflächen in einer und derselben geraden Linie liegen, bilden ein Spiegel- und Linsen-System, und die in Rede stehende gerade Linie wird die Axe dieses Systems genannt. Die einzelnen Spiegel und Linsen, aus denen ein Spiegel- und Linsen-System besteht, sollen dessen Elemente, und zwar, wenn das System aus i Elementen besteht, nach der Reihe das

1ste, 2te, 3te, 4te, ... $i$te

Element genannt werden. Die Punkte, in denen die Axe des Systems von den die Elemente desselben bestimmenden Kugelflächen geschnitten wird, heissen die Scheitel der entsprechenden Elemente. Jede Linse hat zwei Scheitel, von denen wir immer den, welcher der von den einfallenden Strahlen getroffenen Kugelfläche entspricht, den vorderen Scheitel, den anderen den hinteren Scheitel nennen wollen. Jeder Spiegel hat natürlich im eigentlichen Sinne nur einen Scheitel. Indess wollen wir im Folgenden der Kürze des Ausdrucks wegen auch jedem Spiegel zwei Scheitel, einen vorderen und einen hinteren, beilegen, wobei aber nicht zu übersehen ist, dass in diesem Falle die beiden Scheitel zusammenfallen, ihre Entfernung von einander also verschwindet.

Durch alle Scheitel der Elemente denken wir uns sämmtlich unter einander parallele rechtwinklige dreiaxige Coordinatensysteme gelegt, deren erste Axen alle in die Axe des Systems fallen, bezeichnen die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen des vorderen Scheitels des 2ten Elements von dem hinteren Scheitel des 1sten Elements, des vorderen Scheitels des 3ten Elements von dem hinteren Scheitel des 2ten Elements, des vorderen Scheitels des 4ten Elements von dem hinteren Scheitel des 3ten Elements, u. s. w., des vorderen Scheitels des $i$ten Elements von dem hinteren Scheitel des $(i-1)$ten Elements, wobei diese Entfernungen natürlich von den hinteren Scheiteln des 1sten, 2ten, 3ten, 4ten u. s. w. $(i-1)$ten Elements an gerechnet werden, nach der Reihe durch:

Digitized by Google

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4, \ldots .\ E_{i-1};$$

und betrachten die Halbmesser aller einzelnen Kugelflächen als positiv oder negativ, jenachdem sie von den entsprechenden Scheiteln an nach der Seite der positiven oder nach der Seite der negativen ersten Coordinaten hin liegen. Ferner sollen unter diesen Voraussetzungen die Moduli des

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... $i$ten

Elements respective durch:

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5, \ldots .\ M_i$$

bezeichnet werden.

Der Begriff des **Modulus** eines Spiegels oder einer Linse ist von mir in die Optik eingeführt worden, und hat sich mir bei allen meinen optischen Untersuchungen als sehr fruchtbar erwiesen. Hier kann ich über denselben nur Folgendes bemerken, was auch für die weiteren Entwickelungen vollständig genügt.

Der Modulus M eines Spiegels, dessen nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder als negativ betrachteter Halbmesser R ist, wird durch die Formel:

$$M = -\tfrac{1}{2}R$$

bestimmt.

Der Modulus M einer Linse, deren dem vorderen und hinteren Scheitel entsprechende, und nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder negativ betrachtete Halbmesser R und R' sind, und deren hinterer Scheitel von dem vorderen die nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung D hat, d. h. wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, deren nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder negativ betrachtete Dicke D ist, wird, wenn n das negativ genommene Brechungsverhältniss bezeichnet, mittelst der Formel:

$$M = \frac{RR'}{(n+1)(R - R' - \frac{n+1}{n} D)}$$

oder:

$$M = -\left\{(n+1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) + \frac{n+1}{R} \cdot \frac{n+1}{R'} \cdot \frac{D}{n}\right\}^{-1}$$

gefunden.

Wir denken uns nun einen strahlenden Punkt, dessen Coor-

Digitized by Google

dinaten in Bezug auf das durch den vorderen Scheitel des Isten Elements als Anfang gelegte Coordinatensystem p, q, r sind, und bezeichnen die in Bezug auf das durch den hinteren Scheitel des $i$ten Elements als Anfang gelegte Coordinatensystem genommenen Coordinaten des dem $i$ten Elemente, nachdem die Strahlen an allen Elementen des Systems Ablenkungen erfahren haben, entsprechenden Bildes dieses Punktes durch p_i, q_i, r_i.

Die Gränzen, welchen bei unserem aus i Elementen bestehenden Systeme die Grössen p und p_i sich nähern, wenn sich respective der absolute Werth von p_i und p dem Unendlichen nähert, bezeichnen wir beziehungsweise durch F_i und F_i'. Die Werthe, welche F_i, F_i' für die einzelnen Elemente des Systems erhalten, bezeichnen wir der Reihe nach durch:

$$f_1, f_1'; \quad f_2, f_2'; \quad f_3, f_3'; \quad f_4, f_4'; \ldots f_i, f_i'.$$

Die, jenachdem das Element ein Spiegel oder eine Linse ist, positiv oder negativ genommenen Quadrate der Moduli des Isten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... $i$ten Elements bezeichnen wir respective durch:

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \mathfrak{M}_5, \ldots \mathfrak{M}_i$$

und berechnen die Grössen:

$$\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{N}_4, \ldots \mathfrak{N}_{i-1}$$

mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_1 &= E_1 - f_1' + f_2, \\
\mathfrak{N}_2 &= E_2 - f_2' + f_3, \\
\mathfrak{N}_3 &= E_3 - f_3' + f_4, \\
\mathfrak{N}_4 &= E_4 - f_4' + f_5, \\
&\text{u. s. w.} \\
\mathfrak{N}_{i-1} &= E_{i-1} - f_{i-1}' + f_i;
\end{aligned}$$

so wie ferner die Grössen:

$$Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \ldots Z_{i-1}$$

mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 1, \\
Z_1 &= \mathfrak{N}_1, \\
Z_2 &= Z_1 . \mathfrak{N}_2 + Z_0 . \mathfrak{M}_2, \\
Z_3 &= Z_2 . \mathfrak{N}_3 + Z_1 . \mathfrak{M}_3,
\end{aligned}$$

$$Z_4 = Z_3 . \mathfrak{N}_4 + Z_2 . \mathfrak{M}_4,$$

u. s. w.

$$Z_{i-1} = Z_{i-2} . \mathfrak{N}_{i-1} + Z_{i-3} . \mathfrak{M}_{i-1}.$$

Bezeichnen wir dann die Anzahl der in dem Systeme vorkommenden Linsen durch l, wo denn natürlich $i-l$ die Anzahl der in dem Systeme vorkommenden Spiegel ist; so haben wir die beiden folgenden allgemein gültigen Formeln:

$$(p-F_i)(p_i-F_i') = (-1)^{i+l-1}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots . M_i}{Z_{i-1}}\right\}^2,$$

$$\frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1} . \frac{Z_{i-1}(p-F_i)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots . M_i}.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen:

$$J_i = \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots . M_i}{Z_{i-1}},$$

so werden die vorstehenden wichtigen Formeln:

$$(p-F_i)(p_i-F_i') = (-1)^{i+l-1} . (J_i)^2,$$

$$\frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1} . \frac{p-F_i}{J_i} = (-1)^l . \frac{J_i}{p_i-F_i'}.$$

Also ist:

$$p-F_i = (-1)^{i-1} . \frac{q}{q_i} J_i = (-1)^{i-1} . \frac{r}{r_i} J_i,$$

$$p_i-F_i' = (-1)^l . \frac{q_i}{q} J_i = (-1)^l . \frac{r_i}{r} J_i.$$

Auch ist, wie sich leicht ergiebt:

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_i}\right)^2 = (-1)^{i+l-1} . \frac{p-F_i}{p_i-F_i'}.$$

Mittelst dieser Formeln*), von denen ich schon in dem angeführten Werke die vielfachsten Anwendungen gemacht habe, lässt sich nun die Theorie der merkwürdigen Punkte der Spiegel- und Linsen-Systeme leicht und allgemein auf folgende Art entwickeln.

---

*) Zu verweisen erlaube ich mir noch auf meine Abhandlung: Ueber die Grundformeln der Dioptrik und Katoptrik im Archiv. Thl. II. Nr. XV. S. 145.

Digitized by Google

§. 3.

Eine besonders bemerkenswerthe Singularität bieten die als Object und Bild einander entsprechenden Punkte (pqr) und $(p_i q_i r_i)$ dar, für welche zwischen den Coordinaten q, q_i und r, r_i, wenn μ eine beliebige bestimmte oder constante Zahl bezeichnet, die Relationen:

$$\frac{q}{q_i}=\frac{r}{r_i}=\mu$$

Statt finden, wo wir nun versuchen wollen, die Coordinaten p, p_i, also die Punkte der Axe des Systems zu bestimmen, für welche oder in welchen die obigen Relationen gelten.

Bezeichnen wir zu dem Ende die Werthe von p, p_i, für welche die in Rede stehenden Relationen gelten, respective durch P, P_i: so haben wir nach den allgemeinen Formeln des vorhergehenden Paragraphen die folgenden Gleichungen:

$$(P-F_i)(P_i-F_i')=(-1)^{i+l-1}.(J_i)^2,$$
$$(-1)^{i-1}.\frac{P-F_i}{J_i}=(-1)^l.\frac{J_i}{P_i-F_i'}=\mu;$$

oder:

$$(P-F_i)(P_i-F_i')=(-1)^{i+l-1}.(J_i)^2,$$
$$P-F_i=(-1)^{i-1}.\mu J_i,\quad P_i-F_i'=(-1)^l.\frac{J_i}{\mu};$$

wo sich die beiden letzten Gleichungen auch unter der Form:

$$P=F_i+(-1)^{i-1}.\mu J_i,\quad P_i=F_i'+(-1)^l.\frac{J_i}{\mu}$$

schreiben lassen.

Bezeichnen wir die, natürlich mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der durch F_i, F_i' bestimmten Punkte der Axe von den durch P, P_i bestimmten Punkten respective durch Φ_i, Φ_i'; so ist nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten völlig allgemein:

$$F_i=P+\Phi_i,\quad F_i'=P_i+\Phi_i';$$

also:

$$P-F_i=-\Phi_i,\quad P_i-F_i'=-\Phi_i'$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\Phi_i.\Phi_i'=(-1)^{i+l-1}.(J_i)^2;$$

$$\Phi^i = -(-1)^{i-1}.\mu J_i, \quad \Phi_i' = -(-1)^l.\frac{J_i}{\mu}.$$

Bezeichnen wir ferner die immer mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der durch p, p_i bestimmten Punkte der Axe von den durch P, P_i bestimmten Punkten durch $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}_i$; so ist wie vorher:

$$p = P + \overline{\omega}, \quad p_i = P_i + \overline{\omega}_i;$$

also nach dem Obigen:

$$p - F_i = \overline{\omega} - \Phi_i, \quad p_i - F_i' = \overline{\omega}_i - \Phi_i';$$

folglich:

$$(\overline{\omega} - \Phi_i)(\overline{\omega}_i - \Phi_i') = (p - F_i)(p_i - F_i'),$$

also nach den allgemeinen Formeln des vorhergehenden Paragraphen:

$$(\overline{\omega} - \Phi_i)(\overline{\omega}_i - \Phi_i') = (-1)^{i+l-1}.(J_i)^2,$$

und daher nach dem Obigen:

$$(\overline{\omega} - \Phi_i)(\overline{\omega}_i - \Phi_i') = \Phi_i \Phi_i',$$

woraus sich durch Entwickelung des Products auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, wenn man zugleich aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung:

$$\overline{\omega}\Phi_i' + \overline{\omega}_i\Phi_i = \overline{\omega}\overline{\omega}_i,$$

oder:

$$\frac{\Phi_i}{\overline{\omega}} + \frac{\Phi_i'}{\overline{\omega}_i} = 1,$$

ergiebt.

Ferner ist nach den allgemeinen Formeln des vorhergehenden Paragraphen und nach den obigen Formeln:

$$\frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1}.\frac{\overline{\omega} - \Phi_i}{J_i},$$

$$\frac{q_i}{q} = \frac{r_i}{r} = (-1)^l.\frac{\overline{\omega}_i - \Phi_i'}{J_i};$$

aber:

$$\frac{1}{J_i} = -\frac{(-1)^{i-1}.\mu}{\Phi_i} = -\frac{(-1)^l}{\mu\Phi_i'},$$

also:

$$\frac{q}{q_i}=\frac{r}{r_i}=-\frac{\mu(\overline{\omega}-\Phi_i)}{\Phi_i},$$

$$\frac{q_i}{q}=\frac{r_i}{r}=-\frac{\overline{\omega}_i-\Phi_i'}{\mu\Phi_i'};$$

oder auch:

$$\frac{q}{q_i}=\frac{r}{r_i}=-(-1)^{i+l-1}\cdot\frac{\overline{\omega}-\Phi_i}{\mu\Phi_i'},$$

$$\frac{q_i}{q}=\frac{r_i}{r}=-(-1)^{i+l-1}\cdot\frac{\mu(\overline{\omega}_i-\Phi_i')}{\Phi_i}.$$

Folglich ist:

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)^2=\left(\frac{r}{r_i}\right)^2=(-1)^{i+l-1}\cdot\frac{(\overline{\omega}-\Phi_i)(\overline{\omega}-\Phi_i)}{\Phi_i\Phi_i'}=(-1)^{i+l-1}\cdot\frac{\overline{\omega}-\Phi_i}{\overline{\omega}_i-\Phi_i'}.$$

Nach dem Obigen ist ferner:

$$\frac{q}{q_i}=\frac{r}{r_i}=\mu\left(1-\frac{\overline{\omega}}{\Phi_i}\right),$$

$$\frac{q_i}{q}=\frac{r_i}{r}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{\overline{\omega}_i}{\Phi_i'}\right);$$

also:

$$\frac{\overline{\omega}}{\Phi_i}=1-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{q}{q_i}=1-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{r}{r_i}=\frac{\mu q_i-q}{\mu q_i}=\frac{\mu r_i-r}{\mu r_i},$$

$$\frac{\overline{\omega}_i}{\Phi_i'}=1-\mu\frac{q_i}{q}=1-\mu\frac{r_i}{r}=\frac{q-\mu q_i}{q}=\frac{r-\mu r_i}{r};$$

folglich:

$$\frac{\mu\overline{\omega}q_i}{\Phi_i}=-\frac{\overline{\omega}_i q}{\Phi_i'}=\mu q_i-q,$$

$$\frac{\mu\overline{\omega}r_i}{\Phi_i}=-\frac{\overline{\omega}_i r}{\Phi_i'}=\mu r_i-r;$$

und hieraus:

$$\frac{\mu\overline{\omega}q_i}{\Phi_i}+\frac{\overline{\omega}_i q}{\Phi_i'}=0,$$

$$\frac{\mu\overline{\omega}r_i}{\Phi_i}+\frac{\overline{\omega}_i r}{\Phi_i'}=0;$$

oder:

$$\Phi_i\cdot\frac{q}{\overline{\omega}}+\Phi_i'\cdot\frac{\mu q_i}{\overline{\omega}_i}=\Phi_i\cdot\frac{r}{\overline{\omega}}+\Phi_i'\cdot\frac{\mu r_i}{\overline{\omega}_i}=0.$$

Wenn Φ_i, Φ_i' und für irgend einen Punkt $\overline{\omega}$, q, r als gegeben angesehen werden, so hat man nach dem Obigen zur Bestimmung von $\overline{\omega}_i$, q_i, r_i die folgenden Formeln:

Digitized by Google

$$\overline{\omega}_i = \frac{\Phi_i'}{\overline{\omega} - \Phi_i}\overline{\omega}$$

und

$$q_i = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\Phi_i}{\overline{\omega} - \Phi_i}q = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\overline{\omega}_i - \Phi_i'}{\Phi_i'}q,$$

$$r_i = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\Phi_i}{\overline{\omega} - \Phi_i}r = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\overline{\omega}_i - \Phi_i'}{\Phi_i'}r;$$

oder auch:

$$q_i = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}}\cdot\frac{\Phi_i}{\Phi_i'}q, \quad r_i = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}}\cdot\frac{\Phi_i}{\Phi_i'}r.$$

Zwei den Werthen P, P_i von p, p_i entsprechende Werthe von q, q_i und r, r_i seien Q, Q_i und R, R_i. Die Gleichungen der durch jede zwei Punkte wie (PQR) und $(P_iQ_iR_i)$ gehenden Geraden in Bezug auf das durch den ersten Scheitel des Spiegel- und Linsen-Systems gelegte Coordinatensystem sind, wenn E die Entfernung des letzten Scheitels des Spiegel- und Linsen-Systems von dessen erstem Scheitel bezeichnet, offenbar:

$$\frac{x-P}{P-E-P_i} = \frac{y-Q}{Q-Q_i} = \frac{z-R}{R-R_i}.$$

Es ist aber:

$$Q - Q_i = Q - \frac{1}{\mu}Q = \frac{\mu-1}{\mu}Q,$$

$$R - R_i = R - \frac{1}{\mu}R = \frac{\mu-1}{\mu}R;$$

und die vorstehenden Gleichungen sind also:

$$\frac{x-P}{P-E-P_i} = \frac{\mu}{\mu-1}\cdot\frac{y-Q}{Q} = \frac{\mu}{\mu-1}\cdot\frac{z-R}{R}.$$

Für $y=0$, $z=0$ ist:

$$\frac{x-P}{P-E-P_i} = -\frac{\mu}{\mu-1}, \quad x-P = -\frac{\mu}{\mu-1}(P-E-P_i);$$

also:

$$x = P - \frac{\mu}{\mu-1}(P-E-P_i) = -\frac{P-\mu(E+P_i)}{\mu-1},$$

und folglich gleichzeitig:

$$x = -\frac{P-\mu(E+P_i)}{\mu-1}, \quad y=0, \quad z=0.$$

Digitized by Google

Für $\mu = 1$ wird die Abscisse x unendlich, für $\mu = -1$ wird dieselbe $\frac{1}{2}(P + P_i + E)$.

Alle durch Punkte wie (PQR) und $(P_iQ_iR_i)$ gezogene Gerade laufen also in dem durch die Abscisse

$$x = -\frac{P - \mu(E + P_i)}{\mu - 1}$$

bestimmten Punkte der Axe des Systems zusammen, oder sind dieser Axe für $\mu = 1$ parallel.

Die durch P, P_i bestimmten Punkte der Axe des Systems wollen wir beziehungsweise durch H_i, H_i' bezeichnen; die durch die Entfernungen Φ_i, Φ_i' von den Punkten H_i, H_i' bestimmten Punkte der Axe des Systems, welche mit dem durch F_i, F_i' bestimmten Punkte der Axe des Systems einerlei sind, mögen beziehungsweise durch (Φ_i), (Φ_i') bezeichnet werden; endlich wollen wir zwei beliebige als Object und Bild einander entsprechende Punkte (pqr) und $(p_iq_ir_i)$ durch L und L_i bezeichnen.

Die Gleichungen der Geraden $\overline{L(\Phi_i)}$ in Bezug auf ein durch H_i als Anfang gelegtes Coordinatensystem, für welches wir die laufenden Coordinaten durch X, Y, Z bezeichnen wollen, sind offenbar:

$$\frac{X - \Phi_i}{\overline{\omega} - \Phi_i} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r}.$$

Für $X = 0$ wird:

$$Y = -\frac{\Phi_i}{\overline{\omega} - \Phi_i}q, \quad Z = -\frac{\Phi_i}{\overline{\omega} - \Phi_i}r;$$

also, weil nach dem Obigen:

$$\frac{\Phi_i}{\overline{\omega} - \Phi_i}q = -\mu q_i, \quad \frac{\Phi_i}{\overline{\omega} - \Phi_i}r = -\mu r_i$$

ist:

$$Y = \mu q_i, \quad Z = \mu r_i.$$

Für $\mu = \pm 1$ ist:

$$Y = \pm q_i, \quad Z = \pm r_i.$$

Die Gleichungen der Geraden $\overline{L_i(\Phi_i')}$ in Bezug auf ein durch H_i' als Anfang gelegtes Coordinatensystem, für welches wir die laufenden Coordinaten durch X', Y', Z' bezeichnen wollen, sind offenbar:

$$\frac{X' - \Phi_i'}{\overline{\omega}_i - \Phi_i'} = \frac{Y'}{q_i} = \frac{Z'}{r_i}.$$

Digitized by Google

Für $X' = 0$ wird:

$$Y' = -\frac{\Phi_i'}{\omega_i - \Phi_i'} q_i, \quad Z' = -\frac{\Phi_i'}{\omega_i - \Phi_i'} r_i;$$

also, weil nach dem Obigen:

$$\frac{\Phi_i'}{\omega_i - \Phi_i'} q_i = -\frac{1}{\mu} q, \quad \frac{\Phi_i'}{\omega_i - \Phi_i'} r_i = -\frac{1}{\mu} r$$

ist:

$$Y' = \frac{1}{\mu} q, \quad Z' = \frac{1}{\mu} r.$$

Für $\mu = \pm 1$ ist:

$$Y' = \pm q, \quad Z' = \pm r.$$

Für $\mu = +1$ heissen die Punkte H_i und H_i' die Hauptpunkte des Spiegel- und Linsen-Systems. Wenn diese Punkte und auch die Punkte (Φ_i) und (Φ_i'), welche die Brennpunkte genannt werden, gegeben sind, kann man mittelst der vorher bewiesenen Ausdrücke zu jedem Punkte L leicht sein Bild L_i mittelst einer in der durch die Axe des Systems und den Punkt L gelegten Ebene, welche man als Ebene der xy annimmt, auszuführenden Construction finden. Zu dem Ende errichte man (Fig. I.) auf die Axe $\overline{AB}$ des Spiegel- und Linsen-Systems in H_i und H_i' Perpendikel, ziehe durch L und (Φ_i) eine Gerade, welche das in H_i auf die Axe errichtete Perpendikel in M schneidet, ferner durch L eine Parallele mit der Axe, welche das in H_i' auf die Axe errichtete Perpendikel in M_i schneidet; zieht man dann durch M_i und (Φ_i') eine Gerade, so ist der Durchschnittspunkt L_i dieser Geraden mit der durch M parallel mit der Axe gezogenen Geraden das gesuchte Bild des Punktes L.

Wenn die Punkte H_i und H_i' nicht wie vorher dem Falle $\mu = +1$, sondern dem Falle $\mu = -1$ entsprechen, so kann man das Bild des Punktes L durch folgende, aus den oben bewiesenen Formeln sich unmittelbar ergebende Construction, welche etwas weniger einfach als die vorhergehende ist, finden. Man errichte wieder (Fig. II.) in H_i und H_i' Perpendikel auf die Axe des Spiegel- und Linsen-Systems. Auf der anderen Seite der Axe $\overline{AB}$ bestimme man den symmetrisch mit L liegenden Punkt L', ziehe durch L' und (Φ_i) eine Gerade, welche das in H_i auf die Axe errichtete Perpendikel in M' schneidet, ferner durch L' eine Parallele mit der Axe, welche das in H_i' auf die Axe errichtete Perpendikel in M_i' schneidet; zieht man dann durch M_i' und (Φ_i') eine Gerade, so ist der Durchschnittspunkt L_i dieser Ge-

Digitized by Google

raden mit der durch M' parallel mit der Axe gezogenen Geraden das gesuchte Bild des Punktes L.

Dass die beiden vorhergehenden Constructionen sehr verschiedene Bilder des Punktes L geben, hat — was kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht — natürlich seinen Grund darin, dass in diesen beiden Constructionen die Punkte H_i und H_i' sehr von einander verschiedene Bedeutungen haben.

§. 4.

Alle Anwendungen der vorhergehenden Theorie setzen zunächst und vor allen Dingen voraus, dass man die Brennpunkte des Spiegel- und Linsen-Systems kennt; dieselben können natürlich nur in jedem einzelnen Falle durch Versuche bestimmt werden, wozu man am Besten mittelst der folgenden Methode gelangt.

Durch drei Versuche bestimme man drei Paare einander entsprechender Werthe von p, p_i, welche wir durch:

$$p,\ p_i;\quad p',\ p_i';\quad p'',\ p_i''$$

bezeichnen wollen; dann hat man nach §. 2. die folgenden Gleichungen:

$$p\ - F_i = (-1)^{i-1}.\frac{q}{q_i}J_i,$$

$$p' - F_i = (-1)^{i-1}.\frac{q'}{q_i'}J_i,$$

$$p'' - F_i = (-1)^{i-1}.\frac{q''}{q_i''}J_i$$

und

$$p_i\ - F_i' = (-1)^i.\frac{q_i}{q}J_i,$$

$$p_i' - F_i' = (-1)^i.\frac{q_i'}{q'}J_i,$$

$$p_i'' - F_i' = (-1)^i.\frac{q_i''}{q''}J_i;$$

also auch:

$$(p\ - F_i)(p_i\ - F_i') = (-1)^{i+i-1}.(J_i)^2,$$
$$(p' - F_i)(p_i' - F_i') = (-1)^{i+i-1}.(J_i)^2,$$
$$(p'' - F_i)(p_i'' - F_i') = (-1)^{i+i-1}.(J_i)^2;$$

wie bekannt. Also ist:

Digitized by Google

$$(p\ -F_i)(p_i\ -F_i') = (p'\ -F_i)(p_i'\ -F_i'),$$
$$(p'-F_i)(p_i'-F_i') = (p''-F_i)(p_i''-F_i'),$$
$$(p''-F_i)(p_i''-F_i') = (p\ -F_i)(p_i\ -F_i');$$

welche Gleichungen man leicht auf die folgende Form bringt:

$$p\,p_i\ -p'p_i' = (p_i\ -p_i')F_i + (p\ -p')F_i',$$
$$p'p_i'\ -p''p_i'' = (p_i'\ -p_i'')F_i + (p'-p'')F_i',$$
$$p''p_i''-p\,p_i\ = (p_i''-p_i\ )F_i + (p''-p\ )F_i';$$

wo natürlich jede Gleichung eine Folge aus den beiden anderen ist.

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man die Gleichungen:

$$(p-p')(p'p_i'-p''p_i'')-(p'-p'')(pp_i-p'p_i')$$
$$=\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}F_i,$$

$$(p_i'-p_i'')(pp_i-p'p_i')-(p_i-p_i')(p'p_i'-p''p_i'')$$
$$=\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}F_i'.$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von den beiden identischen Gleichungen:

$$\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}p$$
$$=(p-p')(pp_i'-pp_i'')-(p'-p'')(pp_i-pp_i'),$$

$$\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}p_i$$
$$=(p_i'-p_i'')(pp_i-p'p_i)-(p_i-p_i')(p'p_i-p''p_i)$$

ab, die $\begin{pmatrix}\text{zweiten}\\ \text{ersten}\end{pmatrix}$ Seiten von den $\begin{pmatrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{pmatrix}$ Seiten; so erhält man mittelst leichter Rechnung die folgenden Gleichungen:

$$\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}(p-F_i)$$
$$=(p-p')(p-p'')(p_i'-p_i''),$$

$$\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}(p_i-F_i')$$
$$=-(p'-p'')(p_i-p_i')(p_i-p_i'');$$

also:

$$\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}^2.(p-F_i)(p_i-F_i')$$
$$=-(p-p')(p'-p'')(p''-p).(p_i-p_i')(p_i'-p_i'')(p_i''-p_i);$$

folglich nach dem Obigen:

$$(-1)^{i+l-1}.\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}^2.(J_i)^2$$
$$=-(p-p')(p'-p'')(p''-p).(p_i-p_i')(p_i'-p_i'')(p_i''-p_i),$$

also:

$$(J_i)^2 = -(-1)^{i+l-1}.\frac{(p-p')(p'-p'')(p''-p).(p_i-p_i')(p_i'-p_i'')(p_i''-p_i)}{\{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')\}^2}$$

$$= -(-1)^{i+l-1}.\frac{(p-p')(p'-p'')(p''-p).(p_i-p_i')(p_i'-p_i'')(p_i''-p_i)}{\{p(p_i'-p_i'')+p'(p_i''-p_i)+p''(p_i-p_i')\}^2}$$

$$= -(-1)^{i+l-1}.\frac{(p-p')(p'-p'')(p''-p).(p_i-p_i')(p_i'-p_i'')(p_i''-p_i)}{\{p_i(p'-p'')+p_i'(p''-p)+p_i''(p-p')\}^2};$$

und nach dem Vorhergehenden:

$$p-F_i = \frac{(p-p')(p-p'')(p_i'-p_i'')}{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')}$$

$$= \frac{(p-p')(p-p'')(p_i'-p_i'')}{p(p_i'-p_i'')+p'(p_i''-p_i)+p''(p_i-p_i')}$$

$$= -\frac{(p-p')(p-p'')(p_i'-p_i'')}{p_i(p'-p'')+p_i'(p''-p)+p_i''(p-p')},$$

$$p_i-F_i' = -\frac{(p'-p'')(p_i-p_i')(p_i-p_i'')}{(p-p')(p_i'-p_i'')-(p'-p'')(p_i-p_i')}$$

$$= -\frac{(p'-p'')(p_i-p_i')(p_i-p_i'')}{p(p_i'-p_i'')+p'(p_i''-p_i)+p''(p_i-p_i')}$$

$$= \frac{(p'-p'')(p_i-p_i')(p_i-p_i'')}{p_i(p'-p'')+p_i'(p''-p)+p_i''(p-p')}.$$

Mittelst dieser Formeln findet man $(J_i)^2$, F_i, F_i' ohne alle Zweideutigkeit. Wenn man J_i selbst finden will, muss man wenigstens bei einer der drei Beobachtungen, etwa bei der ersten, wissen, ob das Bild aufrecht oder verkehrt steht, ob nämlich $\frac{q}{q_i}$ positiv oder negativ ist; dann kann man etwa mittelst der Formel:

$$p-F_i = (-1)^{i-1}.\frac{q}{q_i}J_i$$

immer sicher über das Vorzeichen von J_i entscheiden, und dasselbe also ohne alle Zweideutigkeit bestimmen.

Die Verhältnisse:

$$\frac{q}{q_i},\quad \frac{q'}{q_i'},\quad \frac{q''}{q_i''}\quad \text{und}\quad \frac{q_i}{q},\quad \frac{q_i'}{q'},\quad \frac{q_i''}{q''}$$

erhält man dann mittelst der Formeln:

$$\frac{q}{q_i} = (-1)^{i-1}.\frac{p-F_i}{J_i},\quad \frac{q_i}{q} = (-1)^l.\frac{p_i-F_i'}{J_i};$$

Digitized by Google

$$\frac{q'}{q_i'} = (-1)^{i-1}.\frac{p'-F_i}{J_i}, \quad \frac{q_i'}{q'} = (-1)^l.\frac{p_i'-F_i'}{J_i};$$

$$\frac{q''}{q_i''} = (-1)^{i-1}.\frac{p''-F_i}{J_i}, \quad \frac{q_i''}{q''} = (-1)^l.\frac{p_i''-F_i'}{J_i}.$$

Weil nach §. 2. bekanntlich:

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)^2 = (-1)^{i+l-1}.\frac{p-F_i}{p_i-F_i'}$$

ist, so ist nach dem Obigen auch:

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)^2 = -(-1)^{i+l-1}.\frac{(p-p')(p-p'')(p_i'-p_i'')}{(p'-p'')(p_i-p_i')(p_i-p_i'')},$$

und in ähnlicher Weise für die beiden anderen Beobachtungen.

Die Grössen P und P_i werden nun mittelst der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Formeln:

$$P = F_i + (-1)^{i-1}.\mu J_i, \quad P_i = F_i' + (-1)^l.\frac{J_i}{\mu}$$

gefunden, und dadurch die der Bedingung:

$$\frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = \mu$$

entsprechenden Punkte der Axe des Spiegel- und Linsen-Systems, also für $\mu = 1$ auch die Hauptpunkte, bestimmt.

Bemerken wollen wir noch Folgendes: Wenn vier Beobachtungen oder Versuchen die Werthe:

$$p, p_i; \quad p', p_i'; \quad p'', p_i''; \quad p''', p_i'''$$

von p, p_i entsprechen, so haben wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(p-F_i)(p_i-F_i') &= (-1)^{i+l-1}.(J_i)^2,\\
(p'-F_i)(p_i'-F_i') &= (-1)^{i+l-1}.(J_i)^2,\\
(p''-F_i)(p_i''-F_i') &= (-1)^{i+l-1}.(J_i)^2,\\
(p'''-F_i)(p_i'''-F_i') &= (-1)^{i+l-1}.(J_i)^2;
\end{aligned}$$

welche man leicht auf die Form:

$$\begin{aligned}
pp_i-p_iF_i \quad -pF_i'+F_iF_i'-(-1)^{i+l-1}.(J_i)^2 &= 0,\\
p'p_i'-p_i'F_i \quad -p'F_i'+F_iF_i'-(-1)^{i+l-1}.(J_i)^2 &= 0,\\
p''p_i''-p_i''F_i-p''F_i'+F_iF_i'-(-1)^{i+l-1}.(J_i)^2 &= 0,\\
p'''p_i'''-p_i'''F_i-p'''F_i'+F_iF_i'-(-1)^{i+l-1}.(J_i)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Digitized by Google

bringt. Durch Subtraction erhält man hieraus die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
pp_i-p'p_i' &-(p_i-p_i')F_i-(p-p')F_i' &= 0,\\
p'p_i'-p''p_i'' &-(p_i'-p_i'')F_i-(p'-p'')F_i' &= 0,\\
p''p_i''-p'''p_i''' &-(p_i''-p_i''')F_i-(p''-p''')F_i' &= 0;
\end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination von F_i und F_i' die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&(pp_i-p'p_i')\{(p_i'-p_i'')(p''-p''')-(p_i''-p_i''')(p'-p'')\}\\
+&(p'p_i'-p''p_i'')\{(p_i''-p_i''')(p-p')-(p_i-p_i')(p''-p''')\}\\
+&(p''p_i''-p'''p_i''')\{(p_i-p_i')(p'-p'')-(p_i'-p_i'')(p-p')\}
\end{aligned}\right\}=0,$$

welche Relation man leicht auf die Form:

$$\left.\begin{aligned}
&pp_i\{p_i'(p''-p''')+p_i''(p'''-p')+p_i'''(p'-p'')\}\\
+&p'p_i'\{p_i''(p-p''')+p_i(p'''-p'')+p_i'''(p''-p)\}\\
+&p''p_i''\{p_i'''(p-p')+p_i(p'-p''')+p_i'(p'''-p)\}\\
+&p'''p_i'''\{p_i'(p-p'')+p_i(p''-p')+p_i''(p'-p)\}
\end{aligned}\right\}=0$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
&pp_i\{p'(p_i''-p_i''')+p''(p_i'''-p_i')+p'''(p_i'-p_i'')\}\\
+&p'p_i'\{p(p_i'''-p_i'')+p'''(p_i''-p_i)+p''(p_i-p_i''')\}\\
+&p''p_i''\{p(p_i'-p_i''')+p'(p_i'''-p_i)+p'''(p_i-p_i')\}\\
+&p'''p_i'''\{p(p_i''-p_i')+p''(p_i'-p_i)+p'(p_i-p_i'')\}
\end{aligned}\right\}=0$$

bringt.

§. 5.

Statt wie im vorhergehenden Paragraphen drei Versuche oder Beobachtungen zu Grunde zu legen, kann man allerdings auch mit nur zweien auskommen; aber dann muss man ausser den Grössen p, p_i; p', p_i' auch die Grössen q, q_i; q', q_i' der Objecte und ihrer Bilder messen. Unter dieser Voraussetzung hat man die Gleichungen:

$$p-F_i=(-1)^{i-1}.\frac{q}{q_i}J_i,$$

$$p'-F_i=(-1)^{i-1}.\frac{q'}{q_i'}J_i$$

und

$$p_i-F_i'=(-1)^i.\frac{q_i}{q}J_i,$$

$$p_i'-F_i'=(-1)^i.\frac{q_i'}{q'}J_i;$$

Digitized by Google

aus denen sich die Gleichungen:

$$\frac{p - F_i}{p' - F_i} = \frac{qq_i'}{q_iq'}, \quad \frac{p_i - F_i'}{p_i' - F_i'} = \frac{q_iq'}{qq_i'};$$

also:

$$pq_iq' - p'qq_i' = (q_iq' - qq_i')F_i,$$
$$p_iqq_i' - p_i'q_iq' = (qq_i' - q_iq')F_i';$$

folglich die Formeln:

$$F_i = \frac{pq_iq' - p'qq_i'}{q_iq' - qq_i'},$$
$$F_i' = \frac{p_i'q_iq' - p_iqq_i'}{q_iq' - qq_i'}$$

ergeben.

Hat man F_i, F_i' auf diese Weise gefunden, so erhält man J_i mittelst eines der folgenden Ausdrücke:

$$J_i = (-1)^{i-1}.\frac{q_i}{q}(p - F_i) = (-1)^{i-1}.\frac{q_i'}{q'}(p' - F_i)$$
$$= (-1)^i.\frac{q}{q_i}(p_i - F_i') = (-1)^i.\frac{q'}{q_i'}(p_i' - F_i'),$$

und endlich P, P_i mittelst der Formeln:

$$P = F_i + (-1)^{i-1}.\mu J_i, \quad P_i = F_i' + (-1)^i.\frac{J_i}{\mu}.$$

Weil aber die Messung der Grösse der Bilder schwerlich mit nur einigermassen hinreichender Genauigkeit zu bewerkstelligen ist, so ist diese Methode*) jedenfalls als eine ganz unpraktische zu bezeichnen, die kein sorgfältiger Beobachter anwenden wird. Deshalb hat sich offenbar auch Gauss**) nur der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Methode dreier Beobachtungen oder Versuche bedient, indem er zugleich ganz richtig auch rücksichtlich dieser Methode bemerkt: „Da die Ausführung der Versuche immer nur einen gewissen beschränkten Grad von Schärfe zulässt, so ist es für die Zuverlässigkeit der Resultate keineswegs gleichgültig, was für Combinationen gewählt werden. Im Allgemeinen kann als Regel gelten, dass durch drei Versuche,

---

*) M. s. die Schrift: Die Haupt- und Brenn-Punkte eines Linsen-Systems. Von Carl Neumann. Leipzig. 1866. S. 40.

**) M. s. die Schrift: Dioptrische Untersuchungen von C. F. Gauss. Göttingen. 1841. 4°. Nr. 15. S. 23.

Digitized by Google

von denen zwei unter wenig verschiedenen Umständen gemacht sind, jedenfalls nicht alle drei Elemente mit Schärfe bestimmt werden können.“

§. 6.

Wir wollen jetzt zwei Punkte K_i, K_i' in der Axe des Spiegel- und Linsen-Systems durch die Entfernungen:

$$P' = F_i - (-1)^l . J_i, \quad P_i' = F_i' - (-1)^{i-1} . J_i$$

von dem ersten und letzten Scheitel der Elemente bestimmen; dann ist:

$$\begin{aligned} P' - p &= F_i - p - (-1)^l . J_i \\ &= -(-1)^{i-1} . \frac{q}{q_i} J_i - (-1)^l . J_i \\ &= -\frac{(-1)^{i-1} . q + (-1)^l . q_i}{q_i} J_i, \\ P_i' - p_i &= F_i' - p_i - (-1)^{i-1} . J_i \\ &= -(-1)^l . \frac{q_i}{q} J - (-1)^{i-1} . J_i \\ &= -\frac{(-1)^{i-1} . q + (-1)^l . q_i}{q} J_i; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{P' - p}{P_i' - p_i} = \frac{p - P'}{p_i - P_i'} = \frac{q}{q_i}.$$

Beziehen wir nun alle folgenden Gleichungen auf das durch den ersten Scheitel des Spiegel- und Linsen-Systems gelegte Coordinatensystem, so sind die Gleichungen der Linien $\overline{LK_i}$ und $\overline{L_i K_i'}$ offenbar respective:

$$y = \frac{q}{p - P'}(x - P'),$$

$$y = \frac{q_i}{p_i - P_i'}(x - E - P_i');$$

und weil nun nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{q}{p - P'} = \frac{q_i}{p_i - P_i'}$$

ist, so haben die Punkte K_i und K_i' die merkwürdige Eigenschaft, dass die Geraden $\overline{LK_i}$ und $\overline{L_i K_i'}$ immer einander parallel sind.

Die Gleichungen der Linien $\overline{L(\Phi_i)}$ und $\overline{L_i(\Phi_i')}$ sind respective:

$$y=\frac{q}{p-F_i}(x-F_i),$$

$$y=\frac{q_i}{p_i-F_i'}(x-E-F_i').$$

Bezeichnen wir die Entfernungen der Durchschnittspunkte der Linien $\overline{L(\Phi_i)}$ und $\overline{L_i(\Phi_i')}$ mit den in K_i und K_i' auf die Axe errichteten Perpendikeln durch u_i und u_i'; so ist, indem man in vorstehenden Gleichungen für x respective P' und $E+P_i'$ setzt:

$$u_i=\frac{q}{p-F_i}(P'-F_i),$$

$$u_i'=\frac{q_i}{p_i-F_i'}(P_i'-F_i');$$

also nach dem Obigen:

$$u_i=-(-1)^l.\frac{q}{p-F_i}J_i,$$

$$u_i'=-(-1)^{i-1}.\frac{q_i}{p_i-F_i'}J_i.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$J_i=(-1)^{i-1}.\frac{q_i}{q}(p-F_i)=(-1)^l.\frac{q}{q_i}(p_i-F_i'),$$

also:

$$u_i=-(-1)^{i+l-1}.q_i,\quad u_i'=-(-1)^{i+l-1}.q.$$

Enthielte das System nur Linsen, so wäre $i+l-1=2l-1$, also:

$$u_i=q_i,\quad u_i'=q.$$

Es würden also auch die Punkte K_i und K_i' zu einer Construction des Bildes L_i von L benutzt werden können, wie von selbst in die Augen fällt.

Noch wollen wir zwei Punkte N_i und N_i' in der Axe des Spiegel- und Linsen-Systems durch die Entfernungen:

$$P''=F_i+(-1)^l.J_i,\quad P_i''=F_i'+(-1)^{i-1}.J_i$$

von dem ersten und letzten Scheitel der Elemente bestimmen; dann ist:

$$\begin{aligned}
P''-p &= \quad F_i-p+(-1)^l.J_i \\
&= -(-1)^{i-1}.\frac{q}{q_i}J_i+(-1)^l.J_i \\
&= -\frac{(-1)^{i-1}.q-(-1)^l.q_i}{q_i}J_i, \\
P_i''-p_i &= \quad F_i'-p_i+(-1)^{l-1}.J_i \\
&= -(-1)^l.\frac{q_i}{q}J_i+(-1)^{i-1}.J_i \\
&= \quad \frac{(-1)^{i-1}.q-(-1)^l.q_i}{q}J_i;
\end{aligned}$$

also:

$$\frac{P''-p}{P_i''-p_i}=\frac{p-P''}{p_i-P_i''}=-\frac{q}{q_i}.$$

Beziehen wir alle folgenden Gleichungen auf dasselbe Coordinatensystem wie vorher, so sind die Gleichungen der Linien $\overline{LN_i}$ und $\overline{L_iN_i'}$ offenbar respective:

$$y=\frac{q}{p-P''}(x-P''),$$

$$y=\frac{q_i}{p_i-P_i''}(x-E-P_i'');$$

und weil nun nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{q}{p-P''}=-\frac{q_i}{p_i-P_i''}$$

ist, so haben die Punkte N_i und N_i' die merkwürdige Eigenschaft, dass die Linien $\overline{LN_i}$ und $\overline{L_iN_i'}$ immer gegen die Axe unter gleichen Winkeln geneigt sind, ohne einander parallel zu sein.

Die Gleichungen der Linien $\overline{L(\Phi_i)}$ und $\overline{L_i(\Phi_i')}$ sind wie vorher respective:

$$y=\frac{q}{p-F_i}(x-F_i),$$

$$y=\frac{q_i}{p_i-F_i'}(x-E-F_i').$$

Bezeichnen wir die Entfernungen der Durchschnittspunkte der Linien $\overline{L(\Phi_i)}$ und $\overline{L_i(\Phi_i')}$ mit den in N_i und N_i' auf die Axe errichteten Perpendikeln durch v_i und v_i'; so ist, indem man in vorstehenden Gleichungen für x respective P'' und $E+P_i''$ setzt:

$$v_i = \frac{q}{p-F_i}(P''-F_i),$$

$$v_i' = \frac{q_i}{p_i-F_i'}(P_i''-F_i');$$

also nach dem Obigen:

$$v_i = (-1)^l . \frac{q}{p-F_i} J_i,$$

$$v_i' = (-1)^{i-1} . \frac{q_i}{p_i-F_i'} J_i.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$J_i = (-1)^{i-1} . \frac{q_i}{q}(p-F_i) = (-1)^l . \frac{q}{q_i}(p_i-F_i'),$$

also:

$$v_i = (-1)^{i+l-1} . q_i, \quad v_i' = (-1)^{i+l-1} . q.$$

Besteht das System nur aus Linsen, so ist $i+l-1 = 2l-1$, also:

$$v_i = -q_i, \quad v_i' = -q.$$

Auch auf die Punkte N_i und N_i' würde man eine Construction des Bildes L_i von L gründen können.

Schliesslich bemerke ich, dass die vorstehenden Betrachtungen sich lediglich auf die durch die Axe des Systems und den Punkt L gelegte Ebene als Ebene der xy beziehen.

Das Vorhergehende wird hinreichen, zu zeigen, dass sich aus den allgemeinen Grundformeln, von denen wir hier ausgegangen sind, noch viele in Bezug auf ein Spiegel- und Linsen-System gewisse Merkwürdigkeiten oder Singularitäten besitzende Punkte würden ableiten lassen, weshalb ich diese Betrachtungen hier abbreche.

Digitized by Google

X.

Beweis eines die Pfaff'sche Integrationsmethode betreffenden Lehrsatzes.

Von

Herrn Prof. Dr. *Ladislaus Zajączkowski*

in Warschau.

Pfaff*) hat gelehrt lineare Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen mehreren Variabeln, nämlich Differentialgleichungen von folgender Form:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sum_{r=1}^{r=n} X_r dx_r = 0,$$

zu integriren; er hat gezeigt, dass solche Differentialgleichungen, falls nicht in Form einer einzigen, doch wenigstens in Form einer ganz bestimmten kleinsten Anzahl von Urgleichungen integrirbar sind, und zwar ist diese kleinste Anzahl von Urgleichungen entweder gleich $\frac{1}{2}n$ oder gleich $\frac{1}{2}(n+1)$, je nachdem die Anzahl n der Variabeln eine gerade oder eine ungerade ist.

Diese Integrationsmethode beruht bekanntlich auf der successiven Verminderung der Anzahl der Variabeln um eine Variable.

---

*) Abhandlungen der Berliner Academie der Wissenschaften vom Jahre 1814: „Methodus generalis aequationes differentiarum particularium, nec non etc."; — auch in Crelle's Journal. Band II. Seite 347. ist eine Abhandlung von Jacobi über denselben Gegenstand; — ebenfalls in Raabe's Differential- und Integralrechnung. Bd. II. b. Kap. X. §. II.

Digitized by Google

Ist in der Differentialgleichung die Anzahl der Variabeln eine gerade, so lassen sich nach einer von **Pfaff** gegebenen Regel die Substitutionen:

$$(2) \ldots\ldots \quad x_r = \varphi_r(x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \quad [r = 1, 2, \ldots, n-1],$$

wo $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ $n-1$ neue Variabeln bezeichnen, berechnen, denen zu Folge die Gleichung (1) in eine andere:

$$(3) \ldots\ldots \quad \sum_{s=1}^{s=n-1} Y_s dy_s = 0$$

zwischen den $n-1$ neuen Variabeln y übergeht.

In diesem Falle führt die Verminderung der Variabeln keine Relation zwischen den ursprünglichen Variabeln ein.

Ist dagegen die Anzahl der Variabeln in der Differentialgleichung eine ungerade, so muss man, um die besagte Verminderung der Anzahl der Variabeln zu erzielen, eine ganz willkürliche Relation zwischen den ursprünglichen Variabeln annehmen, indem die **Pfaff**'sche Regel für diesen Fall nur dann gilt, wenn die gegebene Differentialgleichung in Form einer einzigen Urgleichung integrirbar ist.

In den Darstellungen dieser **Pfaff**'schen Integrationsmethode scheint ein Punkt nicht beachtet worden zu sein, wenigstens fehlt, soviel mir bekannt ist, der Beweis eines für die Anwendung dieser Methode auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wichtigen Lehrsatzes.

Der fragliche Lehrsatz lautet folgendermassen:

> Ist die ursprüngliche Differentialgleichung (1) in Form einer einzigen Urgleichung integrirbar, und bestimmt man nach der **Pfaff**'schen Regel die Substitutionen (2), denen zu Folge (1) in (3) übergeht, so wird auch die Differentialgleichung (3) in Form einer einzigen Urgleichung integrirbar sein.

Den analytischen Beweis habe ich in einer Versammlung hiesiger Mathematiker gegeben.

Ist die Gleichung (1) in Form einer einzigen Urgleichung integrirbar, so müssen bekanntlich die Coefficienten X den Gleichungen von folgender Form:

$$X_\alpha\left(\frac{\partial X_\beta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial X_\gamma}{\partial x_\beta}\right) + X_\beta\left(\frac{\partial X_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\gamma}\right) + X_\gamma\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = 0,$$

Digitized by Google

wo α, β, γ irgend drei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind, identisch genügen.

Setzt man allgemein:

$$\frac{\partial X_u}{\partial x_v} - \frac{\partial X_v}{\partial x_u} = (u, v),$$

und überdiess:

$$X_\alpha(\beta, \gamma) + X_\beta(\gamma, \alpha) + X_\gamma(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta, \gamma),$$

so kann man obige Bedingungsgleichung symbolisch so darstellen:

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Mittels der nach der Pfaff'schen Regel berechneten Substitutionsformeln (2) geht nun die Gleichung (1) in (3) über, und es ist:

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots Y_s = \sum_{t=1}^{t=n-1} X_t \frac{\partial x_t}{\partial y_s} \qquad [s = 1, 2, \ldots, n-1].$$

Ist diese Gleichung (3) ebenfalls in Form einer einzigen Urgleichung integrirbar, so müssen wieder die Coefficienten Y den Gleichungen von folgender Form:

$$Y_h\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}\right) + Y_i\left(\frac{\partial Y_k}{\partial y_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial y_k}\right) + Y_h\left(\frac{\partial Y_h}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_h}\right) = 0,$$

wo h, i, k irgend welche Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n \quad 1$ sind, identisch genügen.

Setzt man wieder

$$\frac{\partial Y_u}{\partial y_v} - \frac{\partial Y_v}{\partial y_u} = (u, v),$$

und überdiess

$$Y_h(i, k) + Y_i(k, h) + Y_k(h, i) = (h, i, k),$$

so lässt sich obige Bedingungsgleichung symbolisch so schreiben:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots (h, i, k) = 0.$$

Es ist nun zu beweisen, dass die Bedingungsgleichungen (6) nothwendig erfüllt werden müssen, wenn jene (4) erfüllt sind.

Mögen die Indexe α, β, γ den Indexen h, i, k gliedweise entsprechen, und schreiben wir nach (5):

(7)

$$Y_h = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} X_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_h}, \quad Y_i = \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} X_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}, \quad Y_k = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n-1} X_\gamma \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_k}.$$

Differentiert man die zweite dieser Gleichungen (7) nach y_k, und die dritte nach y_i, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} X_\beta \frac{\partial^2 x_\beta}{\partial y_i \partial y_k} + \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n-1} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_k} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i},$$

und

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n-1} X_\gamma \frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial y_i \partial y_k} + \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n-1} \frac{\partial X_\gamma}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_i} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_k}.$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab und benutzt die oben eingeführten Symbole, so erhält man die erste Gleichung folgender Gruppe:

$$(i,\ k) = \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n-1} (\beta,\ \gamma) \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_k},$$

$$(k,\ h) = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n-1} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} (\gamma,\ \alpha) \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_k} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_h},$$

$$(h,\ i) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} (\alpha,\ \beta) \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_h} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i};$$

die beiden letzten erhalten wir auf ähnliche Weise aus der dritten und ersten, so wie aus der ersten und zweiten obiger Gleichungen (7).

Multiplicirt man nun die drei Gleichungen letzter Gruppe mit den entsprechenden Gleichungen (7), addirt die Producte und benutzt die oben eingeführten Symbole, so erhält man die Gleichung:

$$(8)\ldots(h,\ i,\ k) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n-1} (\alpha,\ \beta,\ \gamma) \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_h} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_k},$$

aus welcher sich unmittelbar ergiebt, dass die Bedingungsgleichungen (6) nothwendig erfüllt werden müssen, wenn die Bedingungsgleichungen (4) erfüllt sind.

Hiermit ist der oben ausgesprochene Lehrsatz bewiesen.

Digitized by Google

XI.

Integration der Gleichung

$$a_{m+n}y^{(m+n)}+a_{m+n-1}y^{(m+n-1)}+\dots+a_{m+1}y^{(m+1)}+(a_m+x)y^{(m)}$$
$$+a_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0, \quad \dots\dots (1)$$

in welcher

$$a_{m+n},\ a_{m+n-1},\dots a_{m+1},\ a_m,\ a_{m-1},\dots a_1,\ a_0$$

constante Zahlen bezeichnen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor am Polytechnikum in Wien.

Ich setze das Integral obiger Differentialgleichung in folgender Form voraus:

$$y=\int_{u_1}^{u_2}\varphi(u+x)V du, \quad \dots\dots (2)$$

woselbst $\varphi(x)$ eine solche Function von x bezeichnet, welche der Differentialgleichung

(3)

$$(a_m+x)\varphi^{(m)}(x)+a_{m-1}\varphi^{(m-1)}(x)+\dots+a_1\varphi'(x)+a_0\varphi(x)=0$$

Genüge leistet, V eine einstweilen noch unbestimmte Function von u bedeutet, und u_1, u_2 constante, einstweilen noch unbekannte Zahlen repräsentiren.

Aus (2) folgt:

Digitized by Google

$$y' = \int_{u_1}^{u_2} \varphi'(u+x)\, V du,$$

$$y'' = \int_{u_1}^{u_2} \varphi''(u+x)\, V du,$$

$$y''' = \int_{u_1}^{u_2} \varphi'''(u+x)\, V du;$$

. . . .

und werden diese Werthe in (1) eingeführt, so erhält man:

(4)

$$\int_{u_1}^{u_2} V \{ a_{m+n}\varphi^{(m+n)}(u+x) + a_{m+n-1}\varphi^{(m+n-1)}(u+x) + \ldots$$
$$\ldots + a_{m+1}\varphi^{(m+1)}(u+x) + (a_m + x)\varphi^{(m)}(u+x)$$
$$+ a_{m-1}\varphi^{(m-1)}(u+x) + \ldots + a_1\varphi'(u+x) + a_0\varphi(u+x) \} du = 0.$$

Aus der Gleichung (3) folgt, wenn man in selber $u+x$ statt x setzt:

$$(a_m + u + x)\varphi^{(m)}(u+x) + a_{m-1}\varphi^{(m-1)}(u+x) + \ldots$$
$$\ldots + a_1\varphi'(u+x) + a_0\varphi(u+x) = 0,$$

und mittelst dieser Gleichung vereinfacht sich die Gleichung (4) und geht über in:

(5)

$$\int_{u_1}^{u_2} V \{ a_{m+n}\varphi^{(m+n)}(u+x) + a_{m+n-1}\varphi^{(m+n-1)}(u+x) + \ldots$$
$$\ldots + a_{m+1}\varphi^{(m+1)}(u+x) - u\varphi^{(m)}(u+x) \} du = 0.$$

Nun ist aber, wie leicht einzusehen:

(6)

$$\int_{u_1}^{u_2} a_{m+r}\varphi^{(m+r)}(u+x)\, V du$$
$$= a_{m+r} \{ V\varphi^{(m+r-1)}(u+x) - V'\varphi^{(m+r-2)}(u+x) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{r-1} V^{(r-1)}\varphi^{(m)}(u+x) \}_{u_1}^{u_2}$$
$$+ (-1)^r \int_{u_1}^{u_2} a_{m+r} V^{(r)}\varphi^{(m)}(u+x)\, du.$$

Demnach gestaltet sich die Gleichung (5) folgendermassen:

Digitized by Google

(7)

$$\Big\{ a_{m+n} V \varphi^{(m+n-1)}(u+x)$$
$$+(a_{m+n-1} V - a_{m+n} V')\varphi^{(m+n-2)}(u+x)$$
$$+(a_{m+n-2} V - a_{m+n-1} V' + a_{m+n} V'')\varphi^{(m+n-3)}(u+x)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(a_{m+1} V - a_{m+2} V' + a_{m-3} V'' - \ldots + (-1)^{n-1} a_{m+n} V^{(n-1)})\varphi^{(m)}(u+x)\Big\}_{u_1}^{u_2}$$
$$+\int_{u_1}^{u_2} \Big\{(-1)^n a_{m+n} V^{(n)} + (-1)^{n-1} a_{m+n-1} V^{(n-1)}$$
$$+ (-1)^{n-2} a_{m+n-2} V^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{m+2} V'' - a_{m+1} V' - u V\Big\} \varphi^{(m)}(u+x)\,du = 0.$$

Dieser Gleichung genügt man, wenn man V so wählt, auf dass

(8)

$$(-1)^n a_{m+n} V^{(n)} + (-1)^{n-1} a_{m+n-1} V^{(n-1)} + (-1)^{n-2} a_{m+n-2} V^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{m+2} V'' - a_{m+1} V' - u V = 0$$

ist, und u_1, u_2 so, auf dass für selbe nachfolgender Ausdruck verschwindet:

(9)

$$a_{m+n} V \varphi^{(m+n-1)}(u+x)$$
$$+(a_{m+n-1} V - a_{m+n} V')\varphi^{(m+n-2)}(u+x)$$
$$+(a_{m+n-2} V - a_{m+n-1} V' + a_{m+n} V)\varphi^{(m+n-3)}(u+x)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(a_{m+1} V - a_{m+2} V' + a_{m+3} V'' - \ldots + (-1)^{n-1} a_{m+n} V^{(n-1)})\varphi^{(m)}(u+x) = 0.$$

Die Gleichung (8) lässt sich mittelst der Laplace'schen Methode durch Ausdrücke von der Form

$$V = \int_{v_1}^{v_2} e^{vx}\, W dv,$$

woselbst W eine Function von v bezeichnet, vollständig integriren. Das Integral der vorgelegten Gleichung der $(m+n)$ten Ordnung hängt demnach ab von der Auflösung zweier linearer Differentialgleichungen, von denen eine der $m$ten, die andere der $n$ten Ordnung angehört.

Digitized by Google

XII.

Ueber Kreisvierecke, in welchen die Seiten, die Diagonalen, der Radius des Kreises und die Fläche rationale Zahlenwerthe haben.

Von

Herrn Doctor *W. Ligowski*,

Professor der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und am See-Cadetten-Institut in Berlin.

In dem Viereck $ABCD$ sei

$$AB=a,\quad BC=b,\quad CD=c,\quad DA=d,$$

die Diagonalen $AC=p$ und $BD=q$, und der Radius des umschriebenen Kreises r. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen heisse O. Ferner mögen die Inhalte der Dreiecke, welche durch die Diagonalen und Seiten gebildet werden, ABC, ACD, ABD und BCD der Reihe nach durch f_1, f_2, f_3, f_4, und der Inhalt des Vierecks durch f bezeichnet werden.

Nach bekannten Sätzen ist bei den obigen Bezeichnungen:

1) . . . . $pq = ac + bd$

und

2) . . . . $\dfrac{p}{q} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$.

Aus 1) und 2) folgt:

3) . . . . . $p^2(ab+cd) = (ac+bd)(ad+bc)$,

und hieraus:

4) . . . . $(a^2+b^2-p^2)cd + ab(c^2+d^2) = abp^2$.

Setzt man:

$$c = u + v \quad \text{und} \quad d = u - v,$$

dann ist:

$$cd = u^2 - v^2 \quad \text{und} \quad c^2 + d^2 = 2(u^2 + v^2).$$

Diese Werthe von cd und $c^2 + d^2$ in 4) eingesetzt geben:

5) . . . $((a+b)^2 - p^2)u^2 + (p^2 - (a-b)^2)v^2 = abp^2.$

Setzt man für a, b, p der Reihe nach die Ausdrücke:

$$x(y^2+1), \quad y(x^2+1) \quad \text{und} \quad (x+y)(xy-1),$$

so wird nach meiner Abhandlung über rationale Dreiecke *) f_1, also auch r, rational.

Es ist nun:

6) . . . . $(a+b)^2 - p^2 = 4xy(x+y)^2,$

7) . . . . $p^2 - (a-b)^2 = 4xy(xy-1)^2$

und

8) . . . $abp^2 = xy(x^2+1)(y^2+1)(x+y)^2(xy-1)^2.$

Aus 5) ergiebt sich bei Einsetzung der Ausdrücke aus 6), 7) und 8):

9) . . $4u^2(x+y)^2 + 4v^2(xy-1)^2 = (x^2+1)(y^2+1)(x+y)^2(xy-1)^2.$

Wenn

$$u^2 = z^2(xy-1)^2 \quad \text{und} \quad v^2 = t^2(x+y)^2$$

gesetzt wird, dann entsteht:

10) . . . . . . $4(z^2 + t^2) = (x^2+1)(y^2+1),$

oder durch Umformung:

11) . . . . . $4(z^2 + t^2) = (xy+1)^2 + (x-y)^2$

und

12) . . . . . $4(z^2 + t^2) = (xy-1)^2 + (x+y)^2.$

Der Gleichung 11) genügen die Werthe:

$$z^2 = \frac{(xy+1)^2}{4} \quad \text{und} \quad t^2 = \frac{(x-y)^2}{4}.$$

Es ist daher:

13) . . . . $u = \dfrac{(xy+1)(xy-1)}{2}$

und

14) . . . . $v = \dfrac{(x+y)(x-y)}{2},$

*) Thl. XLVI. Nr. XXV. S. 503.

Digitized by Google

mithin:

$$15) \ldots c = u + v = \frac{x^2y^2 - 1 + x^2 - y^2}{2} = \frac{(x^2-1)(y^2+1)}{2},$$

$$16) \ldots d = u - v = \frac{x^2y^2 - 1 - x^2 + y^2}{2} = \frac{(x^2+1)(y^2-1)}{2}.$$

Aus a, b, c, d und p ergeben sich nun nach den bekannten Formeln:

$$17)\ q = \frac{(xy + x - y + 1)(xy - x + y + 1)}{2}.$$

$$18)\ r = \frac{(x^2+1)(y^2+1)}{4}.$$

$$19)\ f_1 = xy(x+y)(xy-1) = \frac{abp}{4r}.$$

$$20)\ f_2 = \tfrac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)(x+y)(xy-1) = \frac{cdp}{4r}.$$

$$21)\ f_3 = \frac{x}{4}(y^2-1)(xy+x-y+1)(xy-x+y+1) = \frac{adq}{4r}.$$

$$22)\ f_4 = \frac{y}{4}(x^2-1)(xy+x-y+1)(xy-x+y+1) = \frac{bcq}{4r}.$$

$$23)\ f = \tfrac{1}{4}(x+y)(xy-1)(xy+x-y+1)(xy-x+y+1).$$

Für $x = 3$ und $y = 4$ erhält man:

$a = 51$, $b = 40$, $c = 68$, $d = 75$, $p = 77$, $q = 84$, $r = 42{,}5$, $f_1 = 924$, $f_2 = 2310$, $f_3 = 1890$, $f_4 = 1344$ und $f = 3234$.

Der Gleichung 12) genügen:

$$z^2 = \frac{(xy-1)^2}{4} \quad \text{und} \quad t^2 = \frac{(x+y)^2}{4};$$

für diese Werthe von z^2 und t^2 erhält man:

$$u = \frac{(xy-1)^2}{2} \quad \text{und} \quad v = \frac{(x+y)^2}{2},$$

mithin ist:

$$24) \ldots c = \frac{(xy-1)^2 + (x+y)^2}{2} = \frac{(x^2+1)(y^2+1)}{2} = 2r,$$

also gleich dem Durchmesser des umschriebenen Kreises;

$$25)\ d = \frac{(xy-1)^2 - (x+y)^2}{2} = \frac{(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)}{2}.$$

Digitized by Google

Wie oben ergeben sich nun:

26) $p = (x+y)(xy-1)$,

27) $q = \frac{1}{2}(x^2+1)(y^2-1)$,

28) $f_1 = xy(x+y)(xy-1)$,

29) $f_2 = \frac{1}{4}(x+y)(xy-1)(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$,

30) $f_3 = \frac{1}{4}x(y^2-1)(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$,

31) $f_4 = \frac{1}{4}y(y^2-1)(x^2+1)^2$,

32) $f = \frac{1}{4}(x+y)(xy-1)(x^2-1)(y^2-1)$.

Für $x=3$ und $y=4$ ergeben sich:

$$a=51,\quad b=40,\quad c=85,\quad d=36,\quad p=77,\quad q=75,\quad r=42{,}5,$$
$$f_1=924,\quad f_2=1386,\quad f_3=810,\quad f_4=1500,\quad f=2310.$$

Bezeichnet man AO durch z, OC durch t, BO und OD durch u und v, dann ist, wenn zur Abkürzung

$$\frac{p}{ad+bc} = \frac{q}{ab+dc} = n$$

gesetzt wird:

$$z = adn,\quad t = bcn,\quad v = cdn,\quad u = abn.$$

Es ist nun:

$$u^2 + t^2 = b^2n^2(a^2+c^2).$$

Für das zuerst betrachtete Viereck ist, wie sich leicht zeigen lässt:

$$n^2(a^2+c^2) = 1,$$

woraus folgt, dass bei diesem Viereck die Diagonalen sich unter rechten Winkeln schneiden. Beim zweiten Viereck sind die Dreiecke BCD und ACD rechtwinklig. Soll bei einem Kreisviereck nur der Inhalt rational sein, so kann man die folgenden, durch Verallgemeinerung der Formeln für rationale Dreiecke gefundenen Ausdrücke benutzen:

$$a = 2y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2x(yz+1),$$
$$b = 2x^2(y+z) + z^2(x+y) + 2y(xz+1),$$
$$c = z^2(x+y) + 2z(xy-1),$$
$$d = a+b+c-4(x+y),$$
$$f = 4(x+y)(x+z)(y+z)(xy+xz+yz-1).$$

Für $x=1$, $y=2$ und $z=1$ findet man:

$$a=25,\quad b=17,\quad c=5,\quad d=35 \text{ und } f=288.$$

Digitized by Google

XIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wie sind die folgenden Sätze zu beweisen:

1. Wenn (Taf. III. Fig. 2.) in der Seite AB des Dreiecks ABC der Punkt D so bestimmt ist, dass

$$AD:BD=n:m$$

ist, und CD gezogen wird; so ist:

$$m.\overline{AC}^2+n.\overline{BC}^2=(m+n)(\overline{AD}\times\overline{BD}+\overline{CD}^2).$$

---

2. Wenn A, B, C (Taf. III. Fig. 3.) drei Punkte eines Kegelschnitts sind und F ein Brennpunkt desselben ist, so findet man die Directrix desselben durch Construction auf folgende Art.

Man halbire die Winkel AFB und BFC durch die Linien FD und FE und errichte in F auf diese Linien die Perpendikel FG und FH; zieht man dann die Linien AB und BC und bestimmt deren Durchschnittspunkte M und N mit den Perpendikeln FG und FH, so ist die durch die Punkte M und N bestimmte Gerade die gesuchte Directrix.

---

3. Wenn $ABCD$ (Taf. III. Fig. 4.) ein in einen Kegelschnitt beschriebenes Viereck, oder wenn um das Viereck $ABCD$ ein Kegelschnitt beschrieben ist, so liegen die Durchschnittspunkte E, F der einander gegenüberliegenden Seiten des Vierecks und die Durchschnittspunkte G, H der in den einander gegenüberstehenden Ecken des Vierecks an den Kegelschnitt gezogenen Berührenden in einer Geraden.

XIV.

Miscellen.

Die einfachste Auflösung zweier Gleichungen von der Form:

$$x^3+y^3=a,\quad x^2y+xy^2=b$$

dürfte die folgende sein.

Stellt man diese Gleichungen auf folgende Art dar:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=a,\quad xy(x+y)=b;$$

so erhält man durch Division:

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1=\frac{a}{b},$$

also, wenn man

$$\frac{x}{y}=u,\quad \frac{y}{x}=\frac{1}{u}$$

setzt:

$$u+\frac{1}{u}=\frac{a}{b}+1,\quad u^2-\frac{a+b}{b}u=-1.$$

Bestimmt man hieraus u, so ist $x=uy$, folglich:

$$(1+u^3)y^3=a,\quad y=\sqrt[3]{\frac{a}{1+u^3}};$$

und man hat also zur Bestimmung von x, y die folgenden Formeln:

$$u^2-\frac{a+b}{b}u=-1,\quad x=u\sqrt[3]{\frac{a}{1+u^3}},\quad y=\sqrt[3]{\frac{a}{1+u^3}};$$

deren weitere Entwickelung keiner Schwierigkeit unterliegt.

G.

Digitized by Google

Historische Notiz.

Von dem Herausgeber.

Die Erfindung des Princips des (Kater'schen) Reversionspendels wird, so viel ich weiss, meistens oder wenigstens häufig Bohnenberger zugeschrieben. Allerdings sagt auch dieser sehr verdiente deutsche Mathematiker und Astronom in seiner trefflichen, immer noch sehr zu empfehlenden „Astronomie. Tübingen. 1811. S. 447." am Ende dieser Seite: „Namentlich können der Aufhängungspunkt und der Mittelpunkt des Schwungs mit einander verwechselt werden, und die Schwingungen um die durch diese Punkte gehenden einander parallelen Axen bleiben von gleicher Dauer", worin also das Princip des Reversionspendels ganz bestimmt und deutlich ausgesprochen ist. Vielleicht aber hat man übersehen, dass Bohnenberger an dieser Stelle auch ganz bestimmt auf „Hugenii Horologium oscillatorium. P. IV. Prop. XX." verweist. In diesem merkwürdigen, jetzt sehr seltenen Werke des berühmten niederländischen Mathematikers und Physikers, dessen vollständiger Titel folgender ist:

> Christiani Hugenii Zulichemii. Const. F. Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad Horologia aptato demonstrationes geometricae. Parisiis. 1673. Fol.

findet sich in der „Pars quarta", worin De centro Oscillationis ausführlich gehandelt wird, auf pag. 125. die folgende

Propositio XX.

Centrum Oscillationis et punctum suspensionis inter se convertuntur.

In figura *) superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspensionem ex D, erit tunc centrum osillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione praecedenti manifestum est.

Hiernach ist also ohne allen Zweifel Niemand anders als Christian Huygens der Erfinder des Princips des Reversionspendels, so wie der Theorie des physischen Pendels und des Oscillations-Centrums überhaupt. Ich habe diese gelegentliche Notiz hier nur aus dem Grunde eingeschaltet, um dem genannten

*) Die Figur, auf welche Huygens sich hier bezieht, theile ich, vollständiger Deutlichkeit wegen, auf Taf. III. Fig. 5. mit.

grossen Manne sein unbestreitbares Eigenthum und seinem Vaterlande die Ehre einer der wichtigsten Erfindungen für alle Zeiten zu wahren, da, wie schon erinnert, dies, wie es mir wenigstens geschienen hat, nicht immer so geschieht und geschehen ist, wie es die Gerechtigkeit und die Ehre der Wissenschaft fordern.

Das „Horologium oscillatorium“ enthält bekanntlich noch viele andere sehr merkwürdige und wichtige Theorien und Anwendungen derselben; namentlich handelt z. B. Pars tertia ausführlich: De linearum curvarum evolutione et dimensione, was ja bekanntlich auch eine wichtige Erfindung des unvergleichlichen Mannes ist.

Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln.

N°. 20. Tafel II. S. 446. Diff. zwischen logtg 40° 23′ 10″ und 20″ statt 227 lies 427.

Druckfehler und Berichtigungen.

Thl. XXII. S. 387. Z. 8. muss in dem Ausdrucke von ∂t^2 das Minuszeichen (—) vor dem Bruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gestrichen werden.

Thl. XXVIII. S. 445. Z. 4. v. u. statt (Thl. XXV. Nr. VI.) setze man (Thl. XXIV. Nr. VI.).

Thl. XLIV. S. 475. Z. 10. v. u. ist statt des Zeichens $=$ das Zeichen $\succeq$ zu setzen.

Thl. XLIV. S. 447. Z. 11. v. u. fehlt am Ende der Zeile hinter der Klammer der Factor i.

Thl. XLV. S. 267. Z. 12. v. u. statt „bezeichnet.“ s. m. „bezeichnet, ergiebt.“ Es fehlt nämlich am Ende der Zeile das Wort „ergiebt.“

Thl. XLVI. S. 184. Z. 3. v. u. lese man η_1 statt η_2.

In Taf. III. Fig. 5. muss der Buchstabe J weiter rechts an den Durchschnittspunkt der Linien HC und AY gesetzt werden.

Digitized by Google

XV.

Ueber einige Curven höheren Grades.

Von

Herrn Dr. *Hochheim*,

Lehrer an der Realschule in Magdeburg.

Bei einer Untersuchung der Fusspunktencurven der Neil'schen Parabel ergaben sich einige sehr einfache Resultate, die in dem Folgenden enthalten sind.

I. Der feste Pol, durch welchen alle auf die Tangenten gefällten Lothe gehen mögen, sei der Scheitelpunkt der Neil'schen Parabel. Derselbe Punkt sei zugleich Anfangspunkt des Coordinatensystems, so dass die Gleichung der Neil'schen Parabel die Form

$$ky^2 = x^3$$

besitzt.

Die drei Gleichungen, welche zur Bestimmung der Gleichung des geometrischen Ortes aller Fusspunkte der Lothe ausreichen, sind dann:

$$ky^2 - x^3 = 0,$$
$$3x^2\xi - 2ky\eta - ky^2 = 0,$$
$$3x^2\eta + 2ky\xi = 0;$$

in welchen ξ und η die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Tangente und des Lothes sind. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Variabeln x, y, so ergiebt sich eine Relation zwischen ξ und η, welche die Gleichung der Fusspunktencurve ist:

$$27\eta^2\xi^2 + 27\eta^4 - 4k\xi^3 = 0.$$

Digitized by Google

Führt man $\frac{3}{8}p$ an die Stelle von k ein, wo p der Parabel zugehört, deren Evolute die Neil'sche Parabel ist, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$\text{(F)} \;\ldots\ldots\ldots\; 2\eta^4 + 2\eta^2\xi^2 - p\xi^3 = 0,$$

und geht man durch die Substitution

$$\eta = r\sin\varphi, \quad x = r\cos\varphi$$

zu Polarcoordinaten über, so entsteht die Polargleichung

$$2r^4 = pr^3\cos\varphi\cot^2\varphi,$$

$$\text{(G)} \;\ldots\ldots\; r^3 = 0; \quad 2r = p\cos\varphi\cot^2\varphi.$$

Setzt man in der Gleichung (F) $\xi = 0$, so wird auch $\eta = 0$, die Curve wird also durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems gehen.

Da (F) nur gerade Potenzen von η enthält, so werden sich für jeden Werth von ξ immer zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von η ergeben, die Curve wird also symmetrisch zur ξ-Axe liegen.

Für $\varphi = 0$ in (G) ist $r = \infty$, die Curve wird sich also in ihrem Verlaufe zu beiden Seiten der x-Axe nähern, ohne sie zu erreichen.

Giebt man in (G) den Winkel φ alle möglichen Werthe zwischen 90^0 und 270^0, so erhält man nur negative Werthe für r, oder giebt man in (F) ξ negative Werthe, so wird man für η stets imaginäre Werthe erhalten: die Curve wird sich demnach nur auf der rechten Seite der η-Axe ausbreiten.

Setzt man in (G) $\varphi = 30^0$ oder $= 330^0$, so erhält man für r denselben Werth, der sich für den Radiusvector der Neil'schen Parabel ergiebt, so bald man φ in der Polargleichung derselben dieselben Werthe ertheilt; es wird $r = \frac{3}{4}\sqrt{3}.p$.

Die Neil'sche Parabel und die Fusspunktencurve werden sich demnach für $\varphi = 30^0$ und $= 330^0$ in der Entfernung $\frac{3}{4}\sqrt{3}.p$ vom Anfangspunkte durchschneiden.

Die beiden ersten Differentialquotienten sind:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3p\xi^2 - 4\eta^2\xi}{4\eta\xi^2 + 8\eta^3}$$

oder:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{-\sqrt{\frac{1}{2}p\xi+\frac{1}{4}\xi^2}\pm\frac{1}{2}(\frac{3}{2}p+\xi)}{2\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}\xi}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}p\xi+\frac{1}{4}\xi^2}-\frac{1}{2}\xi}},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\frac{32\eta^4\xi^4-64\eta^8+96p\xi\eta^6-9p^2\xi^6+96p\eta^4\xi^3-36p^2\eta^2\xi^4}{128\eta^9+192\eta^7\xi^2+96\eta^5\xi^4+16\eta^3\xi^6}.$$

$\frac{d\eta}{d\xi}$ nimmt für $\xi=-\frac{3}{2}p$ den Werth 0 an. Bei Einsetzung dieses Werthes von ξ in die Gleichung (F) ergiebt sich aber für η ein imaginärer Werth, nämlich $\eta=p\sqrt{-\frac{54}{32}}$, es kann demnach hier von keinem Maximum oder Minimum die Rede sein, besonders da sich die Curve nicht in den II. und III. Quadranten erstreckt.

Der zweite Ausdruck für $\frac{d\eta}{d\xi}$ wird für $\xi=0$ unendlich gross, die Tangente im Anfangspunkte des Coordinatensystems wird also mit der Y-Axe zusammenfallen.

Der Krümmungsradius der Curve ist

$$\varrho=-\frac{\{(4\eta\xi^2+8\eta^3)^2+(3p\xi^2-4\eta^2\xi)^2\}^{\frac{3}{2}}}{32\eta^4\xi^4-64\eta^8+96p\xi\eta^6-9p^2\xi^6+96p\eta^4\xi^3-36p^2\eta^2\xi^4}.$$

Da für $\xi=0$ auch $\eta=0$ ist, so besitzt der Krümmungsradius der Curve im 0-Punkte den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$.

Ertheilt man p in der Gleichung (F) alle möglichen Werthe zwischen 0 und ∞, so wird (F) nicht mehr eine einzige Curve, sondern ein ganzes System von Curven repräsentiren. Für $p=0$ wird (F) $\eta^2+\xi^2=0$, beide Coordinaten müssen demnach immer $=0$ sein, die Curve wird dann in den Anfangspunkt des Coordinatensystems verschwinden. Setzt man $p=\infty$, so erhält man $\xi^3=0$ oder $\xi=0$, d. h. die Fusspunktencurve geht in die Y-Axe über.

Alle Curven, die auf diese Weise durch (F) dargestellt werden, sind Fusspunktencurven von Neil'schen Parabeln, denen die betreffenden Werthe von p zugehören. Alle Curven dieses Systems gehen durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems und werden, so lange p nicht ∞ wird, die X-Axe zur Asymptote haben.

Um die Orthogonale dieses Curvensystems zu bestimmen bildet man die Gleichung

$$\frac{dF}{d\xi}d\eta=\frac{dF}{d\eta}d\xi,$$

eliminirt aus ihr und der Gleichung (F) die Veränderliche p und integrirt die daraus entstehende Differentialgleichung.

Es ist nun:

$$\frac{dF}{d\xi} = 4\eta^2\xi - 3p\xi^2,$$

$$\frac{dF}{d\eta} = 4\eta\xi^2 + 8\eta^3.$$

Der Werth von p aus F entwickelt ist

$$\frac{2\eta^2\xi^2 + 2\eta^4}{\xi^3}.$$

Die zu integrirende Differentialgleichung wird demnach sein:

$$\{2\xi^3 + 4\xi\eta^2\}\,d\xi + \{\eta\xi^2 + 3\eta^3\}\,d\eta = 0.$$

Da dieselbe homogen ist, so lassen sich die Variabeln trennen, indem man $\eta = \xi t$, also $d\eta = \xi dt + t d\xi$ setzt; man erhält dann:

$$\{4\xi^3 t^2 + 2\xi^3\}\,d\xi + \{3\xi^3 t^3 + \xi^3 t\}(\xi dt + t d\xi) = 0,$$

oder:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{(t^3 + \frac{1}{3}t)\,dt}{t^4 + \frac{5}{3}t^2 + \frac{2}{3}} = 0.$$

Der Nenner des zweiten Bruches lässt sich in zwei Factoren $(t^2+1)(t^2+\frac{2}{3})$ zerlegen.

An die Stelle von t^2+1 möge $\mathfrak{z}$ gesetzt werden, es ist dann $d\mathfrak{z} = 2t\,dt$, die Differentialgleichung wird demnach die Gestalt annehmen:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{d\mathfrak{z}}{2}\cdot\frac{\mathfrak{z} - \frac{2}{3}}{\mathfrak{z}(\mathfrak{z} - \frac{1}{3})} = 0.$$

Zerlegt man den zweiten Bruch in Parialbrüche $\frac{\alpha}{\mathfrak{z}} + \frac{\beta}{\mathfrak{z} + \frac{1}{3}}$, so besitzt α den Werth $+2$, β dagegen ist $= -1$.

Das Integral dieser Differentialgleichung ist

$$l\xi + l\mathfrak{z} - \tfrac{1}{2}\,l(\mathfrak{z} - \tfrac{1}{3}) = C,$$

also:

$$e^{l\xi + l\mathfrak{z} - \frac{1}{2}l(\mathfrak{z} - \frac{1}{3})} = e^c,$$

oder:

$$\xi^2\mathfrak{z}^2 = M(\mathfrak{z} - \tfrac{1}{3});$$

$\mathfrak{z}$ ist aber für t^2+1 eingesetzt,

$$\xi^2(t^2+1)^2 = M(t^2 + \tfrac{2}{3}).$$

Digitized by Google

Da nun $t = \frac{\eta}{\xi}$ ist, so findet man als Integral der obigen Differentialgleichung:

$$(\Phi) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\eta^2 + \xi^2)^2 = M\eta^2 + \tfrac{2}{3}M\xi^2.$$

M ist eine beliebige Constante, der man jeden Werth ertheilen kann, daher repräsentirt die Gleichung (Φ) eine ganze Schaar von Curven, die alle Curven des Systems (F) unter rechten Winkeln schneiden werden.

Die Gleichung (Φ) gehört der Fusspunktencurve einer Ellipse zu, deren Halbaxen $\sqrt{M}$ und $\sqrt{\tfrac{2}{3}M}$ sind.

Die Fusspunktencurve (F) der Neil'schen Parabel wird also rechtwinklich durchschnitten von der Fusspunktencurve einer Ellipse, deren Mittelpunkt zusammenfällt mit dem Scheitelpunkte der Neil'schen Parabel und deren Halbaxen in dem Verhältniss $1 : \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ zu einander stehen.

Jede Curve (Φ) wird die X-Axe in den Entfernungen $+\sqrt{\tfrac{2}{3}M}$ und $-\sqrt{\tfrac{2}{3}M}$ und die Y-Axe in den Entfernungen $+\sqrt{M}$ und $-\sqrt{M}$ vom 0-Punkte durchschneiden. Für $M = 0$ wird die Curve in den 0-Punkt zusammenschwinden.

Da die Gleichung (Φ) nur gerade Potenzen von ξ und η enthält, so wird die Curve symmetrisch zu den beiden Coordinatenaxen liegen; es wird daher nur nöthig sein, den Lauf derselben im ersten Quadranten zu betrachten.

Führt man statt η und ξ Polarcoordinaten r und φ ein, so entsteht die Polargleichung:

$$r^4 = r^2 M (\sin^2\varphi + \tfrac{2}{3}\cos^2\varphi),$$

die sich in die beiden Gleichungen

$$r^2 = 0 \text{ und } r^2 = M(\sin^2\varphi + \tfrac{2}{3}\cos^2\varphi)$$

zerlegen lässt. Die Gleichung schliesst also den 0-Punkt als besonderen Punkt in sich.

Die beiden ersten Differentialquotienten der Gleichung (Φ) sind:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\tfrac{2}{3}M\xi - 2\eta^2\xi - 2\xi^3}{2\eta^3 + 2\eta\xi^2 - M\eta}$$

oder:

Digitized by Google

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\xi^3+4\xi\eta^2}{\eta\xi^2+3\eta^3},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{2\xi^5\eta'-2\xi^4\eta+14\xi^3\eta^2\eta'-14\xi^2\eta^3+12\xi\eta^4\eta'-12\eta^5}{(\eta\xi^2+3\eta^3)^2},$$

wo $\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$ ist.

Betrachtet man die Curve nur im ersten Quadranten, so findet man, dass $\frac{d\eta}{d\xi}$ für alle positiven Werthe von ξ und η einen negativen Werth besitzt, die Curve wird demnach eine herabsteigende sein. Für $\xi = 0$ wird auch $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, die Tangente der Curve läuft also für $\xi = 0$ der X-Axe parallel. Die Gleichung (Φ) nimmt in diesem Falle die Gestalt an:

$$\eta = \pm\sqrt{M}.$$

Die Ordinate η besitzt demnach für $\xi = 0$ oberhalb der X-Axe einen Maximalwerth $+\sqrt{M}$ und unterhalb der X-Axe einen Minimalwerth $-\sqrt{M}$.

Setzt man $\xi = \sqrt{\frac{2}{3}M}$, so nimmt $\frac{d\eta}{d\xi}$ einen unendlich grossen Werth an. Die Tangente wird daher in dem Punkte, wo die Curve die X-Axe schneidet, der Y-Axe parallel laufen.

Der Krümmungsradius der Curve ist

$$\varrho = -\frac{[(\eta\xi^2+3\eta^3)^2+(2\xi^3+4\xi\eta^2)^2]^{\frac{3}{2}}}{(\eta\xi^2+3\eta^3)(2\xi^5\eta'-2\xi^4\eta+14\xi^3\eta^2\eta'-14\xi^2\eta^3+12\xi\eta^4\eta'-12\eta^5)}.$$

Für $\xi = \sqrt{\frac{2}{3}M}$ und $\eta = 0$ wird

$$\varrho = -\infty,$$

die Curve ist an dieser Stelle eingedrückt.

Für $\xi = 0$ und $\eta = \sqrt{M}$ wird

$$\varrho = \tfrac{3}{4}\sqrt{M}.$$

II. Der Pol, durch den sämmtliche Lothe gezogen werden, sei der Scheitelpunkt der Parabel, welcher die gegebene Neil-sche Parabel als Evolute zugehört. Dieser Punkt sei zugleich Anfangspunkt des Coordinatensystems; die Gleichung der Neil-schen Parabel ist dann:

$$y^2 = \tfrac{8}{27}\cdot\frac{(x-p)^3}{p}.$$

Digitized by Google

Für jeden Punkt (xy) der Curve ist die Gleichung der Tangente:

$$y-\eta = \tfrac{3}{2}\frac{(x-p)^2}{py}(x-\xi),$$

und die Gleichung des vom 0-Punkte aus auf sie gefällten Lothes ist:

$$\eta = -\frac{9py}{4(x-p)^2}\xi,$$

wo $\xi\eta$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser beiden geraden Linien sind.

Nach Eliminirung von xy aus diesen drei Gleichungen ergiebt sich die Gleichung des geometrischen Ortes aller Fusspunkte der Lothe:

$$(\text{F}') \quad \ldots\ldots \quad 2\eta^2(\eta^2+\xi^2) = p\xi(2\eta^2+\xi^2).$$

Nimmt man den 0-Punkt zum Pol und die X-Axe zur Polaraxe, so ergiebt sich die Polargleichung dieser Curve:

$$(\text{G}') \quad \ldots\ldots \quad 2r^4\sin^2\varphi = pr^3\cos\varphi(1+\sin^2\varphi),$$

oder:

$$r^3=0;\ 2r = p(\cot\varphi\,\text{cosec}\,\varphi+\cos\varphi).$$

Setzt man in (F') $\xi=0$, so wird auch $\eta=0$, die Curve geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems; sie liegt ferner symmetrisch zur X-Axe, denn die Gleichung (F') enthält nur gerade Potenzen von η.

Eür die Werthe von φ zwischen 90^0 und 270^0 liefert (G') nur negative Werthe von r; entsprechend erhält man aus (F'), wenn man ξ alle möglichen negativen Werthe ertheilt, imaginäre Werthe für η, die Curve kann daher nur auf der rechten Seite der η-Axe im I. und IV. Quadranten liegen.

Setzt man in (G') $\varphi=0$, so wird r unendlich gross; die Curve wird sich also zu beiden Seiten der ξ-Axe ausbreiten und dieselbe erst in der Unendlichkeit durchschneiden.

Da für $\xi=0$ auch $\eta=0$ ist, so besitzt der erste Differentialquotient

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2p\eta^2+3p\xi^2-4\eta^2\xi}{8\eta^3+4\eta\xi^2-4p\eta\xi}$$

den unbestimmten Werth $^0/_0$.

Digitized by Google

Ertheilt man auch in der Gleichung (F′) der Constanten p alle möglichen Werthe zwischen 0 und ∞, so stellt (F′) ebenfalls ein ganzes System von Curven dar, von denen jede die vorher angegebenen Eigenschaften besitzt. Für $p=0$ wird die Fusspunktencurve in den Anfangspunkt des Coordinatensystems zusammenschwinden, sie wird dagegen in die Y-Axe übergehen, sobald p den Grenzwerth ∞ erreicht.

Um die Orthogonalcurve dieses Systems zu bestimmen, bildet man:

$$\frac{dF'}{d\xi} = 8\eta^3 + 4\eta\xi^2 - 4p\eta\xi,$$

$$\frac{dF'}{d\eta} = 4\eta^2\xi - 2p\eta^2 - 3p\xi^2$$

und eliminirt aus (F′) und der Differentialgleichung

$$(8\eta^3 + 4\eta\xi^2 - 4p\eta\xi)\,d\eta = (4\eta^2\xi - 2p\eta^2 - 3p\xi^2)\,d\xi$$

die Grösse p; es ergiebt sich dann:

$$\{(18\eta^3 + 4\eta\xi^2)(2\xi\eta^2 + \xi^3) - 8\eta^5\xi - 8\eta^3\xi^3\}\,d\xi$$
$$= \{8\xi^2\eta^4 + 4\eta^2\xi^4 - (2\eta^2 + 3\xi^2)(2\eta^4 + 2\eta^2\xi^2)\}\,d\eta$$

oder:

$$\{4\eta^2\xi^3 + 2\xi^5 + 4\eta^4\xi\}\,d\xi + \{2\eta^5 + \eta^3\xi^2 + \eta\xi^4\}\,d\eta = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist ebenfalls homogen, die Integration derselben wird sich daher ausführen lassen, wenn man durch Substitution von ξt statt η die Variabeln separirt: man erhält dann:

$$\{4\xi^5t^4 + 4\xi^5t^2 + 2\xi^5\}\,d\xi + \{\xi^5t + \xi^5t^3 + 2\xi^5t^5\}(t\,d\xi + \xi\,dt) = 0,$$

oder:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{dt}{2}\cdot\frac{2t^5 + t^3 + t}{t^6 + \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{2}t^2 + 1} = 0,$$

oder, da der Nenner des zweiten Bruches $= (t^2+1)(t^4+\frac{3}{2}t^2+1)$ ist,

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{t\,dt\,(t^4 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2})}{(t^2+1)(t^4+\frac{3}{2}t^2+1)} = 0.$$

Substituirt man $\mathfrak{z}$ für t^2, also $d\mathfrak{z}$ für $2t\,dt$, so ist:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{d\mathfrak{z}}{2}\cdot\frac{\mathfrak{z}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{z} + \frac{1}{2}}{(\mathfrak{z}+1)(\mathfrak{z}^2+\frac{3}{2}\mathfrak{z}+1)} = 0.$$

Der zweite Bruch lässt sich in Partialbrüche zerlegen von der Form

$$\frac{\alpha}{\zeta+1}+\frac{\beta}{\zeta^2+\frac{3}{2}\zeta+1},$$

wo α den Werth $+2$, β den Werth $-(\zeta+\frac{1}{2})$ besitzt.

Führt man nun die Integration der Differentialgleichung aus, so ergiebt sich:

$$\int\frac{d\xi}{\xi}+\int\frac{d\zeta}{\zeta+1}-\frac{1}{4}\int\frac{d\zeta(\zeta+\frac{3}{4})}{[(\zeta+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16}]}-\sqrt{\tfrac{9}{28}}\int\frac{\frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{7}{16}}}}{\left[\left(\frac{\zeta+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}}}\right)^2+1\right]}=\Gamma,$$

also:

$$l\xi+l(\zeta+1)-\frac{1}{4}l[(\zeta+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16}]-\sqrt{\tfrac{9}{28}}.\mathrm{arctg}\left(\frac{\zeta+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}}}\right)=\Gamma.$$

Für ζ wieder t^2 eingesetzt:

$$l\xi+l(t^2+1)-\frac{1}{4}l[(t^2+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16}]-\sqrt{\tfrac{9}{28}}.\mathrm{arctg}\left(\frac{t^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}}}\right)=\Gamma,$$

und da $t=\frac{\eta}{\xi}$ ist:

$$l\xi+l\left(\frac{\eta^2}{\xi^2}+1\right)-\frac{1}{4}l\left[\left(\frac{\eta^2}{\xi^2}+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]-\sqrt{\tfrac{9}{28}}.\mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{\eta^2}{\xi^2}+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}}}\right)=\Gamma,$$

oder:

(N)

$$l(\eta^2+\xi^2)+\frac{1}{4}l(\eta^4+\frac{3}{2}\eta^2\xi^2+\xi^4)-\sqrt{\tfrac{9}{28}}.\mathrm{arctg}\left(\frac{\eta^2+\frac{3}{4}\xi^2}{\sqrt{\frac{7}{16}}.\xi^2}\right)=\Gamma.$$

Da man der Grösse Γ jeden beliebigen Werth ertheilen kann, so stellt die Gleichung (N) ein ganzes System von Curven dar, von denen jede das System (F′) unter rechten Winkeln schneidet. Alle Curven dieses Systems sind transcendent.

Für $\xi=0$ nimmt (N) die Gestalt an:

$$l\eta^2-\frac{1}{4}l\eta^4-\frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{9}{28}}\cdot\pi=\Gamma,$$

daher:

$$\eta=\pm e^{\Gamma+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{28}}\cdot\pi}.$$

Jede der Curven wird also die Y-Axe zweimal durchscheiden in den Entfernungen

$$\pm e^{\Gamma+\sqrt{\frac{9}{28}}\cdot\frac{1}{4}\pi}$$

vom 0-Punkte.

Setzt man $\eta=0$, so erhält man:

$$\xi=\pm e^{\Gamma+\sqrt{\frac{9}{28}}\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{9}{7}}}$$

Die X-Axe wird daher ebenfalls zu beiden Seiten des 0-Punktes von jeder Curve durschnitten.

Die beiden ersten Differentialquotienten von (N) sind:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{4\eta^2\xi^3+2\xi^5+4\eta^4\xi}{2\eta^5+\eta^3\xi^2+\eta\xi^4},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{\left\{\begin{matrix} 8\eta^9-8\eta^8\xi\eta'+20\eta^7\xi^2-20\eta^6\xi^3\eta'+12\eta^5\xi^4-12\eta^4\xi^5\eta' \\ +2\eta^3\xi^6-2\eta^2\xi^7\eta'+2\eta\xi^8-2\xi^9\eta' \end{matrix}\right\}}{(2\eta^5+\eta^3\xi^2+\eta\xi^4)^3},$$

wo $\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$ ist.

Im ersten Quadranten wird $\frac{d\eta}{d\xi}$ immer negativ sein, daher ist hier die Curve eine herabsteigende. Für alle negativen η und positiven ξ (also im IV. Quadranten) ist $\frac{d\eta}{d\xi}$ stets positiv, die Curve ist demnach hier eine emporsteigende. Aehnliche Schlüsse lassen sich für den II. und III. Quadranten ziehen.

Für $\xi=0$ wird auch $\frac{d\eta}{d\xi}=0$, die Ordinate η besitzt für $\xi=0$ einen Maximal- und einen Minimal-Werth:

$$\eta = \pm e^{\Gamma+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\pi};$$

die Tangenten in den beiden Punkten, in denen die Curve die Y-Axe schneidet, werden demnach der X-Axe parallel laufen.

Für die beiden Abscissen

$$\xi = \pm e^{\Gamma+\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

laufen die Tangenten der Curve der Y-Axe parallel, da $\frac{d\eta}{d\xi}$ für diese Punkte der Curve ∞ wird.

Der Krümmungsradius der Curve ist:

$$\varrho = -\frac{\{(2\eta^5+\eta^3\xi^2+\eta\xi^4)^2+(2\xi^5+4\eta^2\xi^3+4\eta^4\xi)^2\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\begin{matrix}(2\eta^5+\eta^3\xi^2+\eta\xi^4)(8\eta^9-8\eta^8\xi\eta'+20\eta^7\xi^2-20\eta^6\xi^3\eta'+12\eta^5\xi^4 \\ -12\eta^4\xi^5\eta'+2\eta^3\xi^6-2\eta^2\xi^7\eta'+2\eta\xi^8-2\xi^9\eta')\end{matrix}\right\}}.$$

Setzt man $\xi=0$, so wird:

$$\varrho = -\tfrac{1}{3}\eta = \mp\tfrac{1}{3}e^{\Gamma+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\pi}.$$

Für $\eta=0$ dagegen nimmt der Krümmungsradius den Werth an:

$$\varrho = -\frac{(2\xi^5)^2}{0} = \mp\infty.$$

Digitized by Google

XVI.

Platon's Geometrie im Menon und die Parabole des Pythagoras bei Plutarch.

Zwei mathematisch-philologische Abhandlungen

von

Herrn *Fr. Carl Wex*,

Director des Gymnasiums in Schwerin in Mecklenburg.

I. Platon's Geometrie im Menon.

1. Die mathematische Stelle im Menon p. 87. a.

Ueber die mathematische Stelle in Platon's Menon p. 87. a. sind bereits vier und zwanzig Abhandlungen *) erschienen. Keine derselben hat eine irgendwie befriedigende Erklärung der Stelle geliefert. Nach solchem Vorgange mag es bedenklich erscheinen, mit einem neuen Versuche hervorzutreten, doch vielleicht wird die Methode der Untersuchung Beifall finden und dem gewonnenen Resultate Zustimmung verschaffen.

---

*) Gedike und Michelsen in der Ausgabe des Menon von Biester. Berlin. 1780. 1790. — Observations sur un passage du dialogue de Platon, intitulé Menon, lu à l'Académie de Berlin par M. Jean Trembley. 1799. Siehe Mémoires de l'Académie Royale. Berlin. 1800. p. 241.—263. — Joh. Wolfgang Müller, Commentar über zwei dunkle mathematische Stellen in Platon's Schriften. Nürnberg. 1797 — F. Schleiermacher in den Anmerkungen zu seiner Uebersetzung des Platon. Th. II, 1. p. 517. — Ferd. Nickel in den Schlesischen

Digitized by Google

Socrates will durch ein aus der Geometrie entlehntes Beispiel klar machen, was eine Hypothesis, eine Voraussetzung (Annahme) sei. Die Frage, ob die Tugend lehrbar sei, sagt er, lässt sich nicht beantworten, ehe man weiss, was die Tugend ist. Wohl aber kann man von einer Voraussetzung ausgehen und z. B. sagen, die Tugend ist lehrbar, wenn sie eine Erkenntniss ist, ähnlich wie die Geometer verfahren, die bei einer vorgelegten Frage, wie: lässt sich in diesen Kreis u. s. w. so reflectiren: wenn u. s. w. Aus dem Zusammenhange also ergiebt sich, dass es sich nicht um die Auflösung einer gestellten mathematischen Aufgabe handelt, sondern vielmehr um die Bedingung, unter welcher das in der Aufgabe Verlangte möglich ist.

Fassen wir vor Allem die aufgestellte mathematische Frage in's Auge. Platon lässt den Geometer fragen: *εἰ οἷόντε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι;* Dies übersetzte man ehedem: „Lässt sich in diesen Kreis dieses Dreieck einschreiben.“ Aber diese Auffassung der Worte, bei welcher keine

---

Provinzialblättern. 1812. Heft VIII. — C. Brandanus Mollweide, Commentationes mathematico-philologicae tres. Lipsiae. 1813. — Philipp Buttmann, Excurs in seiner Ausgabe des Menon. Berlin. 1822. 1830. — Fr. Carolus Wex, Commentatio de loco mathematico in Platonis Menone. Halis. 1825. Recensirt in der Allgemeinen Schulzeitung. Abthl. II. Nr. 5. 1827. — Joh. Wolfgang Müller, Vollständige Auflösung der Aufgabe, in einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben. Zur Prüfung der von Dr. Wex versuchten Erklärung der mathematischen Stelle in Platon's Menon. Nürnberg. 1826. — Godofr. Stallbaum in seiner Ausgabe von Platon's Menon. Lipsiae. 1827. Recensirt in Jahn's Jahrbüchern der Philologie. 1828. Bd. VI. p. 163 sq. — E. F. August, Zwei Abhandlungen physikalischen und mathematischen Inhalts. Berlin. 1829. Recensirt in Jahn's Jahrbüchern. 1830. Bd. XII. p. 190 sq. — Jul. Fr. Wurm, Ueber die Stelle in Platon's Menon in Jahn's Jahrbüchern. 1829. Bd. IX. p. 223.—232. — Guil. Korten, Commentarius in locum mathematicum in Platonis Menone. Aachen. 1830. — Arnold Schmitz, Animadversiones in Platonis Menonem. Cöln. 1830. — G. F. Ph. Patze, Commentatio de loco mathematico in Platonis Menone. Soest. 1832. In dieser Schrift sind die Erklärungen der Vorgänger kurz referirt. — Marx, De locis mathematicis in Platonis Menone. Coesfeld. 1836. — J. J. Ch. Thomas, Ueber die mathematische Stelle im Menon. Arnstadt. 1841. — König, Explanatio loci in Platonis Menone. Eutin. 1843. — L. Hoffmann, Ueber die Stelle im Menon. Berlin. 1853. — Wöpcke in Mützell Zeitschrift für das Gymnasialwesen. X. Jahrg. 1856. p. 879 sq. — Beyer in Mützell Zeitschrift. XIII. Jahrg. 1859. p. 886 sq. — Richter in Mützell Zeitschrift. XV. Jahrg. 1861. p. 820.

Digitized by Google

irgendwie erträgliche Erklärung der ganzen Stelle möglich ist, erscheint schon sprachlich als durchaus unzulässig. Denn nach dem Sprachgebrauche der griechischen Mathematiker würde jene Frage so heissen müssen: *εἰ οἷόντε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ τρίγωνον ἐγγραφῆναι.* Ein der Gestalt nach gegebenes Dreieck nennen die Griechen nur *τρίγωνον.* Platon aber sagt *τόδε τὸ χωρίον*, „diese Fläche", und ebenso vorher: *ἐπειδάν τις αὐτοὺς ἔρηται περὶ χωρίου.* Manche nun behaupteten, *χωρίον τρίγωνον* sei hier ganz dasselbe wie *τρίγωνον*, denn *χωρίον* werde oft bei den Mathematikern für **Figur** gebraucht. Wenn nicht die liebe deutsche Gründlichkeit geböte, diese irrige Meinung näher zu beleuchten*), könnten wir kurz sagen, diese Streitfrage, ob *χωρίον* zuweilen **Figur** bedeute, sei für unsere Stelle darum von keiner Bedeutung, weil, gesetzt auch es könnte *χωρίον τρίγωνον* für das einfache *τρίγωνον* gebraucht werden, es doch an unserer Stelle aus sprachlichen Gründen *τόδε τὸ τρίγωνον χωρίον* heissen müsste, nicht *τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον.* Denn beim Hinzutreten des Artikels muss das Adjectivum immer vor dem Substantivum stehen**). Bei der jetzigen Wortstellung hört das Adjectivum *τρίγωνον* auf, Attribut von *χωρίον* zu sein, es muss vielmehr mit *ἐνταθῆναι* verbunden werden***). Es heisst also, wie auch **August** richtig bemerkt hat: „**Kann diese Fläche in diesen Kreis als Dreieck eingespannt werden?**"

---

*) Vgl. hierüber auch **Wurm** in **Jahn's** Jahrbüchern der Philologie. IX. Band. 1829. p. 223 sq.

**) Dass der Artikel hierbei die Hauptsache ist, übersahen Manche und behaupteten, man sage nicht *χωρίον τρίγωνον*, sondern *τρίγωνον χωρίον.* Wo der Artikel fehlt, sind beide Wortstellungen zulässig; der Unterschied würde blos ein rhetorischer sein, wobei es darauf ankömmt, welcher der beiden Begriffe hervorgehoben werden soll.

***) Mancher wird vielleicht geneigt sein, das nachgesetzte Adjectivum *τρίγωνον* durch *τρίγωνον ὄν* zu erklären, so dass es eine hinzutretende Nebenbestimmung enthielte: „diese **Fläche**, welche eine dreiseitige ist." Unserer unten aufzustellenden Erklärung der Stelle würde diese Annahme nicht entgegen stehen, aber an den Stellen, wo ein solches *ὤν* hinzuzudenken ist, z. B. Thucyd. I, 49, 4: *ἐνέπρησαν τὰς σκηνὰς ἐρήμους* sc. *οὔσας.* II, 93, 3: *τὰς τριήρεις ἀφείλκυσαν κενὰς* sc. *οὔσας.* Xen. Anab. 1, 10, 18: *καταλαμβάνουσι τὰς ἁμάξας μεστὰς ἀλεύρων* sc. *οὔσας* bezeichnet das Adjectivum nicht ein inhärirendes Attribut, sondern einen zeitweiligen Zustand. — Stellen, wo das nachgesetzte Adjectivum nicht attributiv, sondern praedicativ ist, kommen natürlich hier nicht in Betracht. Dichter ferner kümmern sich nicht um die obige Sprachregel. Bei Homer findet sich häufig *τὰ τεύχεα καλά* und Aehnliches. Soph. Philoct. 1330: *τῆσδε νόσου βαρείας.*

Digitized by Google

Jene Meinung, dass *χωρίον* auch Figur (*εἶδος, σχῆμα*) bedeute, beruht auf einer Täuschung. Da nämlich jede geometrische Figur zugleich ein *χωρίον* ist, so kann in Fällen, wo es sich blos um die Grösse, nicht um die Gestalt handelt, der generelle Name *χωρίον* gebraucht werden. Nicht befremden kann, wenn Platon Menon. p. 82. und öfters Euclides von einem *τετράγωνον χωρίον* redet, weil alle Quadrate der Gestalt nach gleich sind und nur durch die Grösse ihres Flächenraumes sich unterscheiden. Wenn ferner Euclid. Elem. II, defin. 2. sagt: *παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου*, und I, 34. *τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει*, so gilt dieser Satz von allen Parallelogrammen, sie mögen eine Gestalt haben, welche sie wollen. Und so ist *τρίγωνον χωρίον* (Pappus Collect. math. lib. VII. praef. Apollonius ebene Oerter übers. von Camerer, p. 10.) ein in der Form eines Dreiecks dargestelltes Flächenstück, bei welchem nur die Grösse, nicht die Gestalt in Betracht kommt, hingegen *τρίγωνον* ist ein der Gestalt nach gegebenes Dreieck (*τῷ εἴδει δεδομένον*). Dass Euclides zuweilen, wo man *εἶδος* erwarten sollte, *χωρίον* darum gebraucht, um durch diesen Gattungsbegriff dem Satze eine allgemeinere Fassung zu geben, sieht man aus Data 55.: *ἐὰν χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται.* Denn erst wählt er ein Rechteck und dann wendet er den Satz auch auf ein Trapezium an. Und wenn *χωρίον* durch hinzugesetzte Merkmale zu einer Figur wird, so kann man doch darum nicht dem allein stehenden *χωρίον* diese Bedeutung beilegen. Da es sich also nicht um das Einschreiben eines der Gestalt nach gegebenen Dreiecks handelt, so können wir nun auch die Frage übergehen, ob für *ἐγγράφειν* in der Euclidischen engeren Bedeutung*) auch *ἐντείνειν* gesagt werden könne, oder ob dieses nur ein Einspannen einer Fläche in beliebiger Gestalt bedeute. Mollweide und August suchten das erstere aus Proclus p. 23. zu erweisen, Wurm bestreitet es; ob mit Recht, lassen wir dahin gestellt sein, weil es für unsere Stelle von keiner Bedeutung ist.

Uns liegt am nächsten die Frage, was für ein *χωρίον* ist das *τόδε τὸ χωρίον*, auf welches Socrates hinweist und welches er dem Menon auf dem Sande vorgezeichnet hat? Die Beantwortung dieser Frage ersparen wir uns bis zur Erklärung der ganzen

---

*) Euclid. IV. ὅρ. 3. *σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.*

Stelle. Vor Allem gilt es wegen der folgenden Worte *οἷον παρατείναντος κ. τ. λ.* zu untersuchen,

was heisst *παρατείνειν*?

Aus Platon de rep. VII. p. 527. A. geht hervor, dass *παρατείνειν* ein mathematischer Kunstausdruck ist; mithin sind alle Versuche zurückzuweisen, die aus der Sprache des gewöhnlichen Lebens die Bedeutung jenes Wortes entnehmen wollen. Oder will man vielleicht, was der Mathematiker einen Schenkel, einen Bruch, eine Sehne, einen sinus*), einen Ausschnitt u. s. w. nennt, aus der gewöhnlichen Bedeutung dieser Wörter erkennen?

Weil nun aber das Wort *παρατείνειν* in den Schriften der griechischen Mathematiker nicht weiter vorkommt**), stellte Mollweide und mit ihm August die Behauptung auf, der frühere Terminus *παρατείνειν* sei den späteren Mathematikern abhanden gekommen und dafür ein anderer, nämlich *παραβάλλειν*, eingeführt worden. Es sei also *παρατείνειν* gleichbedeutend mit *παραβάλλειν*. Ist es nun schon an sich unwahrscheinlich, dass mathematische Kunstausdrücke gewechselt werden, so ist dies am wenigsten denkbar bei den griechischen Mathematikern, die seit Pythagoras eine zusammenhängende Schule bilden. Aber als ganz unzulässig erscheint jene willkührliche Annahme, die übrigens auch zu keiner befriedigenden Erklärung der Stelle führt, wenn man erwägt, dass *παραβάλλειν* nicht ein erst später aufgekommener terminus ist, sondern schon bei Pythagoras eine grosse Rolle spielt, und dass die *παραβολή* der Apollonischen Curvenlehre erst einer aus der Pythagoreischen Planimetrie entlehnten Benennung nachgebildet ist***).

---

*) Man hat vielfache Versuche gemacht, diesen Ausdruck zu erklären. Mir scheint die einfachste und wahrscheinlichste Erklärung die zu sein, dass sinus das lateinisirte deutsche Wort Sehne ist. Siehe Ad. Weber, Lehrbuch der Mathematik. Curs. III. p. XI. Vielleicht hat irgend ein angelsächsischer Mönch, der einen arabischen Mathematiker in's Lateinische übersetzt hat, das angelsächsische sinu (Sehne) gewählt, weil chorda schon für die ganze Sehne verbraucht war. Den arabischen terminus für sinus „dschaib", i. e. (linea) secta, haben die hebräischen Mathematiker wörtlich übersetzt durch בֶּקַע, was bei ihnen der Kunstausdruck für sinus ist.

**) August glaubt bei einem Scholiasten zum Euclid eine Stelle gefunden zu haben, wo *παρατείνειν* vorkomme und dasselbe wie *παραβάλλειν* bedeute. Ueber diesen vermeinten Fund siehe die unten folgende zweite Abhandlung über *παραβάλλω* und *παραβολή*.

***) Siehe Proclus zu Euclid in der unten folgenden zweiten Abhandlung.

Digitized by Google

Der Grund, warum der Ausdruck *παρατείνειν* bei den späteren griechischen Mathematikern, einem Euclides, Archimedes, Apollonius, nicht gefunden wird, scheint mir ein ganz anderer, aber sehr nahe liegender zu sein. Lesen wir nur aufmerksam die beiden Platonischen Stellen, in denen *παρατείνειν* vorkommt. De rep. VII. p. 527. A. sagt Platon: *αὕτη ἡ ἐπιστήμη (ἡ γεωμετρία) πᾶν τοὐναντίον ἔχει τοῖς ἐν αὐτῇ λόγοις λεγομένοις ὑπὸ τῶν μεταχειριζομένων. Λέγουσι μέν που μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως· ὡς γὰρ πράττοντές τε καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τοὺς λόγους ποιούμενοι λέγουσι τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν καὶ προςτιθέναι καὶ πάντα οὕτω φθεγγόμενοι· τὸ δ' ἔστι που πᾶν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτηδευόμενον.* Und wenn es an unserer Stelle heisst: *ὥςπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται*, so sind diese *γεωμέτραι*, welche das *παρατείνω* im Munde führen, wohl dieselben, die er an der ersteren Stelle *τοὺς μεταχειριζομένους* nennt, welche *πράττοντες τε καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τοὺς λόγους ποιοῦνται.* Es sind practische Techniker, Feldmesser, die wie die ihnen verwandten Rechenmeister den Bedürfnissen des practischen Lebens dienen. Platon (Phileb. p. 56. 57.) redet von zwei von einander verschiedenen Arten von Messkunst und Arithmetik, *ὡς εἰσὶ δύο ἀριθμητικαὶ καὶ μετρητικαί, — ἄλλην τὴν τῶν πολλῶν, ἄλλην δ' αὖ τὴν τῶν φιλοσοφούντων.* Von den Männern dieses Faches galt dasselbe, was Cicero Tusc. I. 2, 5. von den Römern seiner Zeit sagt: nos metiendi ratiocinandique utilitate huius artis terminavimus modum. Sie befassen sich mit der reinen Wissenschaft nur *ἰδιωτικῶς* (Plat. de rep. 525. D. Theo Smyrnaeus p. 6.) und brauchen zu ihren Geschäften nur wenig Geometrie (Plat. de rep. p. 526. D. *ἀλλ' οὖν δὴ πρὸς μὲν τοιαῦτα βραχύ τι ἂν ἐξαρκοῖ γεωμετρίας τε καὶ λογισμῶν.*). Der eine von ihnen ist mehr, der andere weniger *γεωμετρικός* (p. 526. D.). Zu einer Zeit, wo selbst ein Socrates seine Schüler von tieferen mathematischen Studien zurückhielt und sie nur soweit mit Geometrie sich beschäftigen liess, als diese den Bedürfnissen des practischen Lebens diente (Xenoph. Memor. IV. 7, 2.), standen gewiss jene *γεωμέτραι* dem Platonischen Begriffe von Mathematik fern. Nach Platon soll die Mathematik zur Erkenntniss des Wesens der Dinge führen, den Geist bilden und zur Erforschung der Wahrheit schärfen und das „Auge der Seele" reinigen*).

---

*) De rep. VII. p. 527. B.: *τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστι.* p. 527. D.: *ἐν τούτοις τοῖς μαθήμασιν ὥσπερ ὀργάνοις τὸ ψυχῆς ἐκκαθαίρεται καὶ ἀναζωπυρεῖται ὄμμα.* So ist nach Theon p. 4. und Nicomachus p. 2.

Digitized by Google

Wir befinden uns also hier auf dem Gebiete geometrischer Techniker und ihrer Elementar-Geometrie. Diese haben aber für ihre practischen Operationen und zum Theil mechanischen Kunstgriffe auch besondere Kunstausdrücke. Man trete bei uns in eine Elementar-Klasse; da hören wir manche termini, wie eins borgen, eins im Sinne behalten, einen Bruch heben, eine Zahl zerfällen und Anderes. Hofft man diese mathematischen Kunstausdrücke auch in Schriften von Leibnitz, Euler, Gauss zu finden? Nun, eben so wenig suche man *παρατείνειν* bei den griechischen Mathematikern.

Was verstanden nun jene *γεωμέτραι* unter *παρατείνειν*? Ich vermuthe, *παρατείνειν* ist eine Operation, die bei folgenden Aufgaben der Elementar-Geometrie in Anwendung kam.

1. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck construiren, dessen Grundlinie und Höhe gegeben ist. Lösung: Man verbinde die Endpunkte der gegebenen Grundlinie AB mit dem auf der Mitte derselben errichteten Lothe in dem Punkte C, welcher der gegebenen Höhe entspricht. Dieses Ziehen der Linien AC und BC heisst *παρατείνειν*. Man könnte es fastigiren oder conjugiren nennen.

2. Man soll über einer Sehne eines Kreises ein gleichschenkliges Dreieck in den Kreis einzeichnen. Lösung wie vorher. Der Punkt C ist hier durch die Peripherie des Kreises gegeben.

3. Wollte man ein Rechteck ab halbiren, so konnte man dies zwar durch $\frac{a}{2}b$ oder $a\frac{b}{2}$ ausführen, aber um die combinirte *δύναμις* ab zu theilen, construirte man ein Dreieck $ABC = \frac{ab}{2}$ (Taf. IV. Fig. 1.) oder einen Rhombus $ACBC = \frac{ab}{2}$ (Taf. IV. Fig. 2.). Bei beiden Constructionen wurde das *παρατείνειν* angewandt. Wir sind darum nicht zu der unwahrscheinlichen Annahme genöthigt, dass den Geometern, selbst in der Zeit der primitivsten Anfänge, die Sätze unbekannt gewesen seien, dass jedes Paral·

---

diese Stelle zu emendiren. Siehe meinen Nachweis in Jahn's Jahrbücher. Bd. LXXXVII. p. 692. Den dort von mir beigebrachten Belegen füge ich noch hinzu Proclus ad Euclid. p. 9. *καὶ αὐτὸς ὁ Πλάτων καθαρτικὴν τῆς ψυχῆς καὶ ἀναγωγὸν τὴν μαθηματικὴν εἶναι σαφῶς ἀποφαίνεται, τὴν ἀχλὺν ἀφαιροῦσαν τοῦ νοεροῦ τῆς διανοίας φωτὸς, τοῦ κρείττονος σωθῆναι μυρίων σωματικῶν ὀμμάτων* Hier scheint *φῶς* für *ὄμμα* substituirt, doch auch *ὄμμα τῆς ψυχῆς* kennt Proclus ≟ 8. *ὄμμα τῆς ψυχῆς ἀποκαθαίρουσα καὶ ἀφαιροῦσα τὰ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἐμπόδια πρὸς τὴν γνῶσιν τῶν ὅλων.* p. 13. *δεσμῶται δὲ ὄντες καὶ τὸ ὄμμα τῆς ψυχῆς μύοντες κ. τ. λ.*

lelogramm durch die Diagonale in zwei Hälften getheilt wird und dass Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe einander gleich sind: man liebte vorzugsweise jene Theilung, theils weil so die Sache recht ad oculos demonstrirt werden konnte, theils weil eine wiederholte Theilung auf diese Weise am leichtesten ausführbar war. So wird bei Heron Geom. §. 46. ein Parallelogramm in einen Rhombus und vier rechtwinklige Dreiecke getheilt (Taf. IV. Fig. 2.) und §. 51. in einen Rhombus und sechs gleichschenklige Dreiecke zerlegt (Taf. IV. Fig. 3.). Auch die Aufgabe, ein Quadrat oder Rechteck in Gestalt eines Dreiecks darzustellen, wurde oft durch das *παρατείνειν* ausgeführt (Taf. IV. Fig. 4. und 5.).

Diese verschiedenen Aufgaben, in denen das *παρατείνειν* angewandt wurde, führe ich nur an, um zu erklären, mit welchem Rechte Platon de rep. l. l. mit *τετραγωνίζειν* quadriren, und *προστιθέναι* addiren auch das *παρατείνειν* als eine gebräuchliche Operation zusammenstellen konnte.

Ueberall aber sehen wir, dass bei dieser Operation ein gleichschenkliges Dreieck construirt wird, dessen Höhe anderweitig gegeben ist. Darum sind wir berechtigt, *παρατείνειν παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμήν* zu übersetzen: über einer gegebenen Linie ein gleichschenkliges Dreieck construiren, (dessen Höhe anderweitig gegeben ist). Wie *παρατείνειν* sich zu *παραβάλλειν* verhält, wird unten in der zweiten Abhandlung nachgewiesen werden. Dass die gleichschenkligen Dreiecke in der Geometrie der Griechen eine grössere Rolle spielen als in der unsrigen, kann man auch daraus schliessen, dass Heron ihrer Ausmessung ein besonderes Capitel widmet, Geom. cap. VII.

Um nun auf den Platonischen Satz zu kommen, so vermuthe ich, dass derselbe aus dem Cyklus der isoperimetrischen Aufgaben entnommen ist, in welchen Flächen mit einander verglichen werden, und das Verhältniss des Umfanges zum Inhalte untersucht wird. Schon Pythagoras soll sich mit diesen Untersuchungen beschäftigt haben, Pappus im 5. Buche seiner mathematischen Sammlungen spricht von ihnen, eben so Proclus p. 64., 104., 105. An letzterer Stelle tadelt er die Topographen, dass sie oft die Grösse der Städte nach dem Umfange (*ἐκ περιμέτρου*) bestimmten. Wie im Alterthume diese Untersuchungen als eine Hauptbeschäftigung der Geometer angesehen wurde, ersieht man aus Quintilian instit. orat. I, 10, 39. Sed alia maiora sunt. Nam quis non ita proponenti credat: quorum locorum extremae lineae eandem mensuram colligunt, eorum spatium quoque, quod his lineis continetur, par sit necesse

Digitized by Google

est? At id falsum est. Nam plurimum refert, cuius sit formae ille circuitus, reprehensique sunt historici, qui magnitudines insularum satis significari navigationis ambitu crediderunt. Nam ut quaeque forma perfectissima, ita capacissima est. Itaque illa circumcurrens linea si efficiet orbem, quae forma in planis maxime perfecta, amplius spatium complectitur, quam si quadratum paribus oris efficiat. Rursus quadrata triangulis, triangula ipsa plus aequis lateribus quam inaequalibus. Vgl. auch Quintil. I, 10, 3. Von diesem letzten Satze, den Quintilian erwähnt, ist ein Folgesatz: Von allen Dreiecken, die in einen Kreis eingetragen werden können, ist das grösste das gleichseitige, und von diesem offenbar ein corollarium folgender: Von allen Dreiecken, die über einer gegebenen Grundlinie in einen Kreis eingetragen werden können, ist das grösste das gleichschenklige, oder was dasselbe ist, von allen Dreiecken, die über einer Sehne eines Kreises in denselben eingetragen werden, ist das grösste das gleichschenklige. Dieser den Elementen jener Lehre entnommene Satz ist es, den Platon hier vorführt.

Man denke sich also: Socrates zeichnet einen Kreis und in demselben ein Dreieck *ABC*, welches mit seiner Spitze über den Kreis hinausragt (Taf. IV. Fig. 6.). Das *χωρίον* dieses Dreiecks nun ist es, um welches es sich handelt. Es wird gefragt, ob dasselbe als Dreieck in den Kreis eingespannt werden kann. Es hätte also vollständiger heissen können: *εἰ οἷόντε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ τρίγωνον χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι.* Aber diese Vollständigkeit war nicht nöthig, da ja Socrates auf die vorgezeichnete Figur hinweist. Durch die Worte *παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν* ist die Grundlinie bezeichnet, als der eine Factor, durch welchen die Grösse des *χωρίον* bestimmt wird. Vgl. *παραβάλλειν παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.* Euclid. I, 44. VI, 25. 27. 28. 29. *παρακεῖσθαι.* X, 21. 23. Es könnte allerdings das *χωρίον* eben so gut wie ein Dreieck auch ein Parallelogramm oder ein Quadrat gewesen sein; aber da bei der letzteren Annahme ein genügendes Resultat sich nicht ermitteln lässt, so bleibt nichts übrig, als das *χωρίον* für einen in der Form eines Dreiecks gegebenen Flächenraum zu halten. Die Antwort nun auf jene Frage wird sein: Wenn der Flächeninhalt dieses Dreiecks *ABC*, verglichen mit dem des gleichschenkligen Dreiecks *ABD*, welches über derselben Grundlinie in diesen Kreis eingetragen wird, kleiner ist oder gerade so gross als jenes

construirte (gleichschenklige) Dreieck, dann geht es, wo nicht, ist es unmöglich. Die Hypothesis will also sagen: wenn es das Maximum nicht überschreitet. Fassen wir nun die griechischen Worte in's Auge. *Συγχώρησον, ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι, εἴτε διδακτόν ἐστιν, εἴτε ὁπωσοῦν. Λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόντε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι· εἴποι ἄν τις, ὅτι οὔπω οἶδα, εἰ ἔστι τοῦτο τοιοῦτον· ἀλλ' ὥσπερ μέν τινα ὑπόθεσιν προὔργου οἶμαι ἔχειν πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε· εἰ μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστι ταῦτα παθεῖν. ὑποθέμενος οὖν, ἐθέλω εἰπεῖν σοι τὸ συμβαῖνον περὶ τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον, εἴτε ἀδύνατον, εἴτε μή.*

Wer griechisch versteht und einen mathematischen Gehalt der Platonischen Worte verlangt, wird Klügel (Mathematisches Wörterbuch. II. p. 657.) beistimmen, dass die Worte, wie sie jetzt lauten, keine Erklärung zulassen. Est ist also Aufgabe der philologischen Kritik, die wunde Stelle in den Worten aufzuspüren und zu heilen. Einige Gewähr für die Richtigkeit einer solchen Emendation wird allerdings die dadurch gewonnene Klarheit der Worte geben, doch die Wahrscheinlichkeit der Vermuthung wird erhöht, wenn nachgewiesen werden kann, wie die Corruptel entstanden. Oft ist es die nachbessernde Hand eines halbgelehrten librarius, die die Fehler in den besten Handschriften herbeigeführt hat. Gelingt es einem solchen Corrector auf die Spur zu kommen, dann kann die Combination grössere Wahrscheinlichkeit beanspruchen.

Dass es zunächst statt *παρατείναντα* heissen müsse *παρατείναντι*, ist an sich klar und schon von Ast bemerkt. Der Accusativ *παρατείναντα* kann nicht das Subject zu dem Infinitive *ἐλλείπειν* enthalten, wozu es vielleicht einem Corrector dienen sollte, da *ἐλλείπειν* in der Sprache der Mathematiker immer ein verbum neutrum ist*). Der herzustellende Dativ ist der bei den Griechen

*) Wenn Euclid an einer Stelle *ἐλλείπειν* in einer transitiven Bedeutung gebraucht, so ist dies auf den einzelnen Fall einer bestimmten geometrischen Construction beschränkt. Was dort um der Kürze des technischen Ausdrucks willen Euclid sich erlaubte, berechtigt nicht dazu, die feststehende Bedeutung des Wortes zu ändern. Siehe hierüber die folgende zweite Abhandlung über *παραβάλλειν*.

Digitized by Google

viel gebrauchte Dativ, welcher den Standpunkt des Beurtheilenden bezeichnet, zunächst bei räumlichen und geographischen Bestimmungen (Thucyd. I. 24. Ἐπίδαμνός ἐστι πόλις ἐν δεξιᾷ ἐσπλέοντι τὸν Ἰόνιον κόλπον· so häufig εἰσιόντι, ἐξιόντι u. s. w.), dann allgemeiner, τὸ μὲν ἔξωθεν ἁπτομένῳ σῶμα οὐ θερμὸν ἦν (Thucyd. II, 49.), πολλὰ καὶ ἄλλα παραλιπόντι τοιοῦτον ἦν (II, 51.), σκοπουμένῳ πρὸς ἡδονήν (Plato de rep. 589. C.), ἀληθεῖ δὲ λόγῳ χρωμένῳ οὐ Κορινθίων τοῦ δημοσίου ἐστὶν ὁ θησαυρός. (Herod. I, 14), λογιζομένοισι (Herod. VII, 184), συλλαμβάνοντι κατὰ τὸ ὀρθόν (VII, 143.) und Anderes. Eben so die Lateiner transeunti (Liv. 32, 4.), intrantibus sinum (Liv. 26, 26.), in universum aestimanti, singula intuenti et universa (Liv. IX, 17), vere reputantibus (Tac. Hist. IV, 17), tantus acervus fuit, ut metientibus dimidium super tres modios explevisse sint quidam auctores (Liv. XXIII, 12.) Cf. ad Tac. Agric. c. XI. Dass dieser Gebrauch des Dativs auch den griechischen Mathematikern geläufig war, sieht man aus den üblichen Kunstausdrücken συνθέντι λόγον, διελόντι λόγον, ἀναστρέψαντι λόγον (Heron definit. §. 127. mensura trianguli §. 13. p. 236.). An unserer Stelle lässt der Gebrauch dieses Dativs zugleich auf die Bedeutung des παρατείνειν im Allgemeinen zurückschliessen. Es muss etwas bedeuten, was zum Maassstabe dienen kann, und zur Vergleichung gebraucht werden kann. Dazu eignet sich sehr gut das gleichschenklige Dreieck. „Wenn man über der gegebenen Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck construirt", ist also so viel als: verglichen mit einem gleichschenkligen Dreieck. Der Hauptfehler unserer Stelle liegt aber in den Worten ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ. Diese Worte enthalten geradezu einen Unsinn. Welche Bedeutung man auch dem παρατείνειν beilegen mag, immer ist doch das παρατεταμένον das Product dieser Operation. Nun soll man aber παρατείνειν, und das, was herauskommt, soll wieder ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ, οἷον ἂν ᾖ τὸ παρατεταμένον. Man soll also, wenn παρατείνειν z. B. soviel wäre wie παραβάλλειν, das χωρίον in ein Parallelogramm verwandeln, aber von diesem Parallelogramm soll eben wieder jenes Parallelogramm abgehen. Was bleibt dann? Null. Den $ab - ab$ ist $= 0$. Und so müssen auch alle Erklärungen der jetzigen Lesart null und nichtig sein. Und diese Nichtigkeit wird um nichts verbessert, wenn man, wie einige Erklärer, noch den sprachlichen Irrthum hinzufügt, dass man durch τοιοῦτον οἷον den mathematischen Begriff Aehnlichkeit, was die griechischen Mathematiker ὅμοιον nennen, bezeichnet glaubt.

Ich glaube, Platon schrieb εἰ μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦ-

τον, οἷον — ἐλλείπειν, ἢ τοιοῦτον χωρίῳ, οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ. Der librarius erkannte nicht, dass das zweite τοιοῦτον dem ersteren τοιοῦτον parallel steht, verstand nicht das von Platon um grösserer Deutlichkeit willen hinzugesetzte χωρίῳ „eine solche an Flächenraum", und in Folge dieses mangelnden Verständnisses griff er zu einer Conjectur, die sein halbgelehrtes Wissen ihm an die Hand gab. Weil bei Euclid und anderen Mathematikern sehr häufig der Ausdruck vorkommt ἐλλείπειν χωρίῳ τινί, glaubte er, dies sei auch hier zu schreiben. Aber ἐλλείπειν findet sich oft auch ohne einen solchen Dativ, ja selbst der Genitiv, der anderwärts dabei steht*), um die Sache zu bezeichnen, der etwas nachsteht, wird bei den Mathematikern gewöhnlich weggelassen, weil es sich aus dem Zusammenhange ergiebt. Ἐλλείπειν ist entgegengesetzt theils dem ὑπερέχειν, theils dem ὑπερβάλλειν. Ersteres ist = μείζονα εἶναί τινος, mithin ἐλλείπειν = ἐλάττονα εἶναι, was anderwärts den Gegensatz von ὑπερέχειν bildet, z. B. Euclid V, 4. 7. 11. 12. Ὑπερβάλλειν heisst ein gegebenes Ganzes überschreiten, mithin ἐλλείπειν eines integrirenden Theiles ermangeln, unvollständig sein, hinter einer Norm zurückbleiben. Euclid. VI, 33. εἰ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Vorher heisst es καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. Euclid. XI, 25. εἰ ὑπερέχει η ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ στερεὸν τοῦ ΝΨ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. V. def. 5. ὅταν — ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ. Heron. defin. 124. 125, 6. ἀπὸ τῶν ἰσάκις πολυπλασίων ἤτοι ἅμα ὑπερεχόντων ἢ ἅμα ἴσων ὄντων ἢ ἅμα ἐλλειπόντων. Dem ὑπερβάλλειν steht ἐλλείπειν gegenüber nicht blos in den vielen Stellen, wo es einen Dativ bei sich hat, sondern zuweilen auch ohne einen Dativ. Nicomachus p. 10. τὸ δὲ ἴσον τοῦ πλείονος καὶ ἐλάττονος πάντως ἐν μεταιχμίῳ θεωρεῖται καί ἐστιν ὥσπερ τὸ μέτριον τοῦ ὑπερβάλλοντος καὶ τοῦ ἐλλείποντος μεταξύ.

Hier werden wir uns für das ἐλάσσονα εἶναι entscheiden; das, womit es verglichen wird, ist in dem adverbialen Nebensatze παρατείναντι παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμήν angedeutet und durch das folgende παρατεταμένον bezeichnet, denn das Ganze hat den Sinn: ἔλαττον ἢ ἴσον τῷ παρατεταμένῳ. Dass die An-

---

*) Platon Alcibiad. I. p. 122. §. 37. αἰσθόμενος ὅσον αὐτῶν ἐλλείπεις. p. 122. §. 38 γνώσει, ὅτι πολὺ τἀνθάδε τῶν ἐκεῖ ἐλλείπει. de rep. VI. 484. D ἐμπειρίᾳ δὲ μηδὲν ἐκείνων ἐλλείποντες.

nahme eine zwiefache ist, erhellt auch aus dem folgenden Plural *ταῦτα παθεῖν*, wodurch die zwei Fälle bezeichnet werden, dass die Fläche entweder *ἐλλείπει* oder *οἷον αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ἐστί*, entweder kleiner oder an Inhalt gleich. Man achte ferner auf das *αὐτό* in *οἷον ἂν αὐτὸ**) *τὸ παρατεταμένον ᾖ*, „ein solches an Flächenraum wie gerade das construirte ist", für: gerade ein solches, wie das construirte d. i. dem construirten an Flächenraum gleich. Platon vermeidet den mathematischen Terminus *ἴσον*, weil, wie Heron def. §. 117. sagt, *ἴσον λέγεται καὶ τὸ ἰσοπερίμετρον τῇ περιοχῇ καὶ τὸ ἴσον ταῖς γραμμαῖς*.

Damit Niemand Anstoss nehme an dem Ausdrucke *χωρίον* — *τοιοῦτον χωρίῳ*, wo *χωρίον* erst in concreto und dann als abstractum gefasst ist, so vergleiche man das bei Euclid so häufige *εἶδος δεδομένον τῷ εἴδει* Data 52. 53. 54. und wenn jemand statt des Dativs den Accusativ erwarten sollte, wie in *τοιόσδε τὸ δέμας* (Hom. Od. XVII, 313. XIX, 359.), so vergleiche man Xenoph. Cyrop. II, 3. 6. *ποσὶ ταχύς*, Thucyd. V, 43. *Ἀλκιβιάδης ἡλικίᾳ μὲν ὢν ἔτι νέος, ἀξιώματι δὲ προγόνων τιμώμενος*, III, 38. *ἐγὼ μὲν οὖν ὁ αὐτός εἰμι τῇ γνώμῃ*.

Was die grammatische Auffassung der Worte betrifft, müssen wir noch einen Irrthum von Buttmann und Stallbaum (p. 91. 92.) rügen, welche in den Worten *εἴτε ἀδύνατον εἴτε μή* das *εἴτε-εἴτε* durch sive-sive erklären und aus dem vorhergehenden *ταῦτα παθεῖν* dazu ergänzen wollen**). Jene Worte können vielmehr blos heissen „ob sie (sc. *ἡ ἔντασις*) unmöglich ist oder nicht" oder wörtlicher: ob die *ἔντασις* etwas Unmögliches ist oder nicht. Hingegen in *εἰ ἀδύνατόν ἐστι ταῦτα. παθεῖν* ist als Subject hinzuzudenken *τὸ χωρίον*, „wenn die Fläche jene beiden Fälle nicht zulässt", oder: wenn die Fläche so beschaffen ist, dass jenes (*τὸ ἐλλείπειν ἢ τὸ ἴσον εἶναι*) bei ihr nicht stattfinden kann. Man übersetze das Ganze:

---

*) *αὐτὰ τὰ δέκα*, gerade zehn, *αὐτὰ τὰ ἐναντία*, gerade das Gegentheil. Herm. ad Vig. p. 733.

**) Warum Platon *εἴτε ἀδύνατον εἴτε μή* sagt und dagegen gleich darauf und kurz vorher *εἴτε διδακτὸν εἴτε οὐ διδακτόν ἐστιν ἡ ἀρετή*, haben Buttmann und Stallbaum wohl nicht richtig erfasst. Mir scheint, es ist daraus zu erklären, dass im ersteren Falle ein contradictorischer Gegensatz stattfindet, im zweiten ein conträrer zum Grunde liegt. Dem Unmöglichen steht blos das Mögliche gegenüber, aber das Nichtlehrbare enthält in sich manches Positive. Vergleiche den Anfang des Menon: *ἆρα διδακτὸν ἡ ἀρετή, ἢ οὐ διδακτόν, ἀλλ' ἀσκητόν*.

„Gestatte mir, bei der Betrachtung, ob die Tugend lehrbar ist, oder was sonst, von einer Voraussetzung auszugehen. Unter diesem, „von einer Voraussetzung ausgehen" verstehe ich aber eine Betrachtungsweise, wie sie die Messkünstler oft anwenden, wenn man ihnen eine Frage vorlegt, z. B. über eine Fläche, ob es möglich sei, in diesen Kreis diese Fläche als Dreieck einzuspannen. Mancher würde hierauf die Antwort geben: ich weiss noch nicht, ob diese Fläche eine solche ist, aber eine zweckdienliche Voraussetzung für diese Frage, glaube ich, ist folgende: Wenn diese Fläche eine solche ist, dass sie, wenn man über der gegebenen [Grund-] Linie derselben ein gleichschenkeliges Dreieck (im Kreise) construirt, kleiner ist als dieses, oder eine solche an Flächenraum, wie gerade das construirte Dreieck ist, dann tritt nach meiner Meinung etwas Anderes ein, und wieder etwas Anderes, wenn sie jene Annahmen nicht zulässt. Unter solcher Voraussetzung nun will ich Dir sagen, wie es mit der Einspannung derselben in den Kreis steht, ob sie möglich ist oder nicht."

Stimmt man dieser unserer Erklärung bei, dann wird eine Beleuchtung der früheren Versuche nicht nöthig erscheinen.

2. Menon p. 83. C. und p. 85. A.

Zwei andere Stellen im Menon bieten zwar in mathematischer Hinsicht dem Erklärer keine Schwierigkeit, wohl aber bedürfen sie der kritischen Feststellung des griechischen Textes. p. 83. C. heisst es: *ΣΩ. Ἀπὸ τῆς διπλασίας ἄρα, ὦ παῖ, οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιον γίγνεται χωρίον. ΠΑΙ. Ἀληθῆ λέγεις. ΣΩ. Τεττάρων γὰρ τετράκις ἐστὶν ἑκκαίδεκα. οὐχί; ΠΑΙ. Ναί. ΣΩ. Ὀκτώπουν δ᾽ ἀπὸ ποίας γραμμῆς; οὐχὶ ἀπὸ μὲν ταύτης τετραπλάσιον; ΠΑΙ. Φημί. ΣΩ. Τέταρτον δὲ ἀπὸ τῆς ἡμισέας ταυτησὶ τουτί; ΡΑΙ. Ναί. ΣΩ. Εἶεν. τὸ δὲ ὀκτώπουν οὐ τοῦδε μὲν διπλάσιόν ἐστι, τούτου δὲ ἥμισυ.* Unsere Herausgeber verwerfen die Lesart aller Handschriften *τέταρτον* und halten die Conjectur von Cornarius *τετράπουν* für das allein richtige. Dieses *τετράπουν* ist allerdings mundrecht genug, aber dass Platon so geschrieben, möchte ich bezweifeln; denn wenn er auch in dieser mathematischen Unterredung Weitläufigkeiten nicht scheut, wird er doch darum nicht seltsame Umschweife sich erlauben. Nachdem er ausführlich aus einander gesetzt hat, dass die doppelte Seite des vierfüssigen Quadrates das vierfache, das sechzehnfüssige, Quadrat giebt, lässt man ihn weiter darauf sagen: „Diese, die doppelte Seite giebt das vierfache Quadrat, und die

Hälfte dieser doppelten Seite das vierfüssige Quadrat." Welcher Cirkel! Es lässt sich also gegen die Conjectur *τετράπουν* fast dasselbe einwenden, was Buttmann mit Recht gegen Gedike's verfehlte Vertheidigung des *τέταρτον* geltend machte. Versuchen wir also eine Deutung der handschriftlichen Lesart, durch welche die überflüssig scheinenden Worte einen mathematischen Gehalt bekommen. Meine Leser mache ich zunächst darauf aufmerksam, dass hier in einer Zeile ein Quadrat mit *τουτί*, ein anderes mit *τόδε*, ein drittes mit *τοῦτο* bezeichnet wird. Wir haben also drei Quadrate. Das mit *τόδε* bezeichnete ist (Taf. IV. Fig. 13.) *ABCD*, das *τοῦτο* ist *Abcd*, das *τουτί* ist *Αβγδ*. Der Satz nun *τέταρτον δὲ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ταυτησὶ τουτί* ist eine parenthetische Nebenbemerkung, die sich nicht an *ὀκτώπουν δ' ἀπὸ ποίας γραμμῆς*, sondern nur an das *οὐχὶ ἀπὸ μὲν ταύτης τετραπλάσιον;* anschliesst. „Entsteht nicht aus dieser (*Ab*) das Vierfache (*Abcd*), und aus dieser der halben Linie (*Αβ*) das Viertel (*Αβγδ*)? statt: so wie aus der halben Linie das Viertel? Es wird also nach zwei Seiten hin nachgewiesen, wie die doppelte Linie das vierfache Quadrat giebt, was keine Wiederholung, sondern mathematische Erweiterung und Verallgemeinerung ist. Nach dieser Nebenbemerkung schreitet nun die Demonstration erst fort mit den Worten: *τὸ δὲ ὀκτώπουν οὐ τοῦδε μὲν διπλάσιόν ἐστι, τούτου δὲ ἥμισυ;* wodurch angedeutet wird: uns aber ist es hier nicht zu thun um ein Vierfaches und um ein Viertel, sondern um ein Zwiefaches und eine Hälfte.

Dass das kleine Quadrat *Αβγδ*, welches das *τέταρτον* des ursprünglichen Quadrates *ABCD* ist, bezeichnet vorliegt, so dass Socrates mit *τουτί* darauf hinweisen konnte, ergiebt sich aus dem Anfange der Demonstration p. 82. C., wo Socrates das Quadrat *ABCD* zeichnet und dann hinzusetzt: *οὐ καὶ ταυτασὶ τὰς διὰ μέσου ἐστὶν ἴσας ἔχον;* womit die Linien *βν* und *γν* gemeint sind.

Menon p. 85. A. bieten die Handschriften: *οὐκοῦν ἔστιν αὕτη γραμμὴ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τινὰ τέμνουσα δίχα ἕκαστον τούτων τῶν χωρίων;* Schleiermacher und Bekker entschieden sich zuletzt für einfache Weglassung des sinnlosen *τινά*. Diese kurze Bezeichnung der Diagonale durch *γραμμὴ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν* würde aber nur dann zulässig sein, wenn dies ein üblicher Kunstausdruck wäre, aber Platon selbst nennt sie gleich nachher: *ἡ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τείνουσα γραμμή*, Heron defin. 68. *ἡ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν ἀγομένη εὐθεῖα*, Aristoteles problem. XV. *ἡ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν ἀχθεῖσα γραμμή*. F. A. Wolf schlug vor *γραμμή, ἣ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τείνει*, aber da der Sinn der Worte ist, „ist dies nicht eine Diagonale", so muss eine Be-

Digitized by Google

zeichnung dieses Begriffes durch seine Merkmale in den Worten enthalten sein; aber ἥ — τείνει könnte nur auf ein einzelnes Individuum bezogen werden. Sollte der Gattungsbegriff ausgedrückt werden, so konnte dies nur heissen γραμμὴ — τείνουσα. Euclid und Heron gebrauchen bei solchen definirenden Bezeichnungen nur das participium oder das Pronomen ὅστις. Ein Misgriff war es, wenn Stallbaum mit Struve noch den Artikel einschob: οὐκοῦν ἔστιν αὕτη ἡ γραμμή, ἣ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τείνει, τέμνουσα δίχα ἕκαστον τούτων τῶν χωρίων, d. i. wie Schleiermacher übersetzte: „Schneidet nun nicht diese Linie, welche aus einem Winkel in den andern geht, jedes von diesen Vierecken in zwei gleiche Theile"? Aber wenn ἐστὶ — τέμνουσα blos für τέμνει stehen sollte, da kann man keinen Grund absehen, warum das ganz tonlose ἐστί an die Spitze des Satzes gestellt und von seinem τέμνουσα so weit getrennt wurde. Ferner αὕτη ἡ γραμμή diese Linie, könnte doch nur von einer einzelnen bestimmten Linie, auf welche Socrates hinweist, verstanden werden. Aber diese eine Linie kann doch nicht die sämmtlichen vier Quadrate theilen. Eine Diagonale kann dies, aber nicht diese eine Diagonale. (Taf. IV. Fig. 7.)

Das allein Richtige bietet also cod. E., in welchem über τινα darübergeschrieben ist $\overset{\text{ει ουσ}}{\text{τινα}}$ d. i. τείνουσα. „Ist dies nicht eine von Winkel zu Winkel gehende Linie (d. i. eine Diagonale), welche jedes dieser Quadrate in zwei Hälften theilt? Dass τέμνουσα, welches ein neues Merkmal der Diagonale enthält, mit dem τείνουσα zusammentrifft, kann, wie Buttmann richtig bemerkt, durch den Gleichklang nicht stören.

II. Ueber die παραβολή des Pythagoras.

Allgemein bekannt ist die Erzählung, Pythagoras habe nach Erfindung des nach ihm benannten Lehrsatzes von dem Quadrate der Hypotenuse ein Stieropfer dargebracht. Weniger bekannt wohl ist die Notiz, die sich bei Plutarch findet, dass das Stieropfer nicht der Erfindung jenes Satzes, sondern vielmehr des Satzes von der παραβολή gegolten habe.

Plutarch convivalium disp. VIII., 2. p. 720. A. (Moralia Tom. III. P. II. p. 306. [p. 968.] Wytt.) sagt: ἔστι γὰρ ἐν τοῖς γεωμετρικωτάτοις θεωρήμασι μᾶλλον δὲ προβλήμασι, τὸ δυεῖν εἰδῶν δοθέντων ἄλλο τρίτον παραβάλλειν, τῷ μὲν ἴσον, τῷ δὲ ὅμοιον· ἐφ' ᾧ καί φασιν ἐξευρεθέντι θῦσαι τὸν Πυθαγόραν. πολὺ γὰρ ἀμέλει γλαφυ-

ῥώτερον τοῦτο καὶ μουσικώτερον ἐκείνου τοῦ θεωρήματος, ὃ τὴν ὑποτείνουσαν ἀπέδειξε ταῖς περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσον δυναμένην. Dieselbe Notiz wird wiederholt bei Plutarch disp. ne suaviter quidem vivi posse secundum Epicuri decreta p. 1094. B. (Moralia Tom. V., 1. p. 396. [468.] Wytt.) καὶ Πυθαγόρας ἐπί τῳ (vulgo ἐπὶ τῷ) διαγράμματι βοῦν ἔθυσεν, ὥς φησιν Ἀπολλόδοτος,

ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεες εὕρετο γράμμα,
κεῖνο, ἐφ' ᾧ λαμπρὴν ἤγετο βουθυσίην.

εἴτε περὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὡς ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθήν, εἴτε πρόβλημα περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς*).

Ob die nahe liegende Frage, welcher Satz gemeint sei, von Jemandem schon aufgestellt oder beantwortet worden ist, weiss ich nicht. Mich veranlasst sie zu der folgenden Untersuchung über παραβάλλειν und παραβολή, die ich nur als einen Beitrag zur Terminologie der griechischen Mathematiker anzusehen bitte. Die weiter daran sich knüpfenden Bemerkungen über einen Abschnitt des Proclus zu Euclid stehen zugleich in Beziehung zu der Behandlung der platonischen Stelle im Menon.

Es fragt sich, was heisst bei den griechischen Mathematikern παραβάλλειν und παραβολή. Dass dieser Ausdruck, der von den späteren Mathematikern seit Apollonius auf den bekannten Kegelschnitt übertragen wurde, ursprünglich der Pythagoreischen Planimetrie angehört, bemerkt ausdrücklich Proclus**).

Auch in die Arithmetik der Griechen, die ganz auf Geometrie basirt war, ist er eingedrungen, wie wir unten an einem Beispiele aus Nicomachus und Theon nachweisen werden.

---

*) „Eins der feinsten geometrischen Theoreme oder vielmehr Probleme ist folgendes: Wenn zwei Figuren gegeben sind, eine dritte zu entwerfen, welche der einen gleich, der anderen ähnlich ist. Wegen Erfindung dieses Satzes soll Pythagoras ein Opfer dargebracht haben. Denn es ist dieser Satz ohne Zweifel weit zierlicher und feiner als jener Lehrsatz, welcher lehrt, dass das Quadrat der Hypotenuse gleich ist den Quadraten der den rechten Winkel einschliessenden Seiten." — „Und Pythagoras opferte einen Stier wegen einer Figur, wie Apollodotus sagt:

Als Pythagoras einst die gefeierte Zeichnung erfunden,
jene, die ihn bewog, Stiere zum Opfer zu weih'n.

Sei es nun der Satz von der Hypotenuse, dass ihr Quadrat gleich ist den Quadraten der den rechten Winkel einschliessenden Seiten, oder das Problem von der Fläche der Parabel."

**) Siehe seine Worte in dem weiter unten abgedruckten Abschnitte aus Proclus §. 1.

Digitized by Google

Παραβάλλειν heisst über einer gegebenen Linie ein Parallelogramm entwerfen, welches einer gegebenen Figur an Grösse gleich ist. Dabei ist die grammatische Construction des Wortes eine doppelte. Entweder sagt man vollständig *παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι χωρίῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν* (Euclid. Elem. I., 44. VI., 25. 27. 28. 29. 30. X., 18.) oder man macht das *χωρίον*, dem das Parallelogramm gleich sein soll, zum grammatischen Objecte und sagt kurz *τὸ δοθὲν χωρίον παραβαλεῖν παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν*, über einer gegebenen Linie eine gegebene Fläche als Parallelogramm darstellen*).

Dem Ausdrucke *παραβάλλειν* liegt vermuthlich das Bild eines umwickelten Stabes, welcher aufgerollt wird, zum Grunde. Doch wie man auch den Ausdruck sich erklären will — es könnte die gegebene Grundlinie auch als Widerhalt gedacht werden, an den das Parallelogramm angestreckt wird — das eine verbitten wir, dass man *παραβολή* durch Vergleichung deute. Passender würde man es Projection nennen, wenn nicht dieser Terminus in der neueren Mathematik schon anderweitig verbraucht wäre.

Das Wesentliche dabei ist die gegebene Grundlinie. Ein Parallelogramm von bestimmtem Flächeninhalte construiren, ohne dass die Grundlinie gegeben ist, heisst *συστήσασθαι*. Vgl. Euclid. Elem. I., 42. mit 44. 45. Proclus an der unten mitzutheilenden Stelle: *ἐνταῦθα τῆς παραβολῆς ἐδεήθη, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον ἐθέλων παραβαλεῖν, ἵνα μὴ μόνον σύστασιν ἔχωμεν παραλληλόγραμμον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον, ἀλλὰ καὶ παρ' εὐθεῖαν ὡρισμένην παραβολήν*. Wohl aber kann wie oft bei der *παραβολή*, so auch bei der *σύστασις* ein Winkel gegeben sein, unter welchem das entsprechende Parallelogramm construirt werden soll. I., 42. 45. Ausserdem ist *συστήσασθαι* ein allgemeiner Ausdruck für „construiren", denn man sagt auch *τρίγωνον συστήσασθαι* Elem. I., 1. 22. 23. Ganz verkehrt ist dagegen die Ansicht eines Scholiasten des Euclid bei August Abhandlungen p. 18. Siehe unten zu Proclus.

Bei den die *παραβολή* betreffenden Aufgaben handelt es sich

---

*) Diese Bedeutung des *παραβαλεῖν χωρίον* verkannte Mollweide und mit ihm Buttmann bei ihrer Behandlung der Stelle in Platon's Menon. Sie construirten über einer gegebenen Linie ein Dreieck und meinten, dies könne heissen *παραβαλεῖν τρίγωνον χωρίον*. Letzteres kann aber blos heissen, ein einem gegebenen Dreiecke an Inhalte gleiches Parallelogramm über einer gegebenen Linie entwerfen.

nun darum die Höhe des Parallelogrammes (τὸ πλάτος) zu finden. Es sei A ein gegebenes χωρίον von a □Fuss. Es soll dasselbe als ein Parallelogramm über einer gegebenen Linie b dargestellt werden. Dann ist $a = bx$ die παραβολή, und hieraus ergiebt sich $x = \frac{a}{b}$ die gesuchte πλάτος τῆς παραβολῆς.

Zur geometrischen Lösung der Aufgabe ist erforderlich, dass die gegebene Figur A, wenn sie ein Dreieck oder Viereck ist, in irgend ein Parallelogramm von gleichem Flächeninhalte verwandelt werde, was Euclid συστήσασθαι nennt. Nennen wir die Seiten dieses Parallelogramms pq, so ist $a = pq$ und $x = \frac{pq}{b}$. Es findet sich also x durch die Proportion:

$$b : p = q : x,$$

was durch Zeichnung von zwei ähnlichen Dreiecken sich leicht ermitteln lässt. Ein practisches Beispiel von einem Dreieck von 12 □Fuss, welches als ein Parallelogramm mit einer Basis von 4 Fuss dargestellt werden soll, giebt Proclus zum Euclid in dem unten mitgetheilten Abschnitte §. 6. Wenn dort Proclus sagt: τὸ ἴσον τῷ τριγώνῳ παρὰ τὴν εὐθεῖαν παραβάλλομεν, εἰ λαβόντες — εὕρομεν, πόσων εἶναι δεῖ ποδῶν τὸ πλάτος. εὑρόντες γοῦν εἰ τύχοι πλάτος τριῶν ποδῶν, κ. τ. λ. so versteht er unter dem εὑρεῖν wohl nicht die arithmetische Division $\frac{12}{4}$, denn ein griechischer Geometer wird nicht eine Fläche durch eine Linie theilen, sondern er meint wohl das Suchen der vierten Proportionale. Oder sollte vielleicht eine arithmetische Behandlung der Geometrie schon zu Proclus Zeit üblich gewesen sein?

Euclid, der im ersten Buche seiner Elemente die Proportionen noch nicht anwenden kann, löst (I., 45.) die Aufgabe mit Hülfe des bekannten Satzes von der Gleichheit der Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme (Elem. I., 43.). Dabei nimmt er auch die Bedingung mit auf, dass auch ein Winkel gegeben ist, unter welchem das gesuchte Parallelogramm entworfen werden soll (παραβεβλήσθω ἐν δοθείσῃ γωνίᾳ). Bei der obigen allgemeinen Formel würde, wenn diese Bestimmung mit aufgenommen werden soll $x = \frac{a}{b \sin\varphi}$ sein, wenn wir den gegebenen Winkel φ nennen. In dem Parallelogramm $ABCD$ (Taf. IV. Fig. 8.) sei der Winkel $DAB = \varphi$ und die gesuchte Seite $AD = x$. Dann ist:

Digitized by Google

$$DE = x \sin\varphi,$$
$$a = bx \sin\varphi,$$
$$x = \frac{a}{b \sin\varphi}.$$

Die Umkehrung des letzteren Satzes wird geometrisch behandelt bei Euclid. Data 57.

Fragen wir nun schon jetzt, welcher Satz des Pythagoras bei Plutarch gemeint sei, so dürfen wir nicht an den ähnlich lautenden Satz des Euclid Elem. VI., 25. denken: τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. Denn hier ist von einer σύστασις, nicht von einer παραβολή die Rede, und das Ganze führt auf kein χωρίον τῆς παραβολῆς. Die Aufgabe wird vielmehr folgende sein.

Es sei gegeben ein χωρίον *A* und ein χωρίον *B* (Taf. IV. Fig. 9.). Man soll ein Parallelogramm *C* entwerfen, welches dem *A* gleich und dem *B* ähnlich sei. Als nothwendig ergiebt sich, dass *B*, welchem *C* ähnlich sein soll, ein Parallelogramm sei. Ferner muss, um die Lösung der Aufgabe möglich zu machen, das χωρίον *A* zuvor in ein Parallelogramm verwandelt werden. Zu diesem Zwecke zerlege man das χωρίον *A* in drei Dreiecke. (Taf. IV. Fig. 10.). Das Δ *ABC* verwandle man (Taf. IV. Fig. 11.) durch σύστασις in ein Parallelogramm *AE* (nach Euclid I., 42.). Ueber der Seite desselben *EF* entwerfe man durch παραβολή das Parallelogramm *FG*, welches gleich sei dem Δ *ACD* (nach Euclid I., 44.), und über derselben Linie das Parallelogramm *HC*, welches gleich sei dem Δ *ADE*. Diese drei Parallelogramme verbinde man zu Einem, *ABCD*. Die Aufgabe ist nun, ein dem *ABCD* gleiches und dem *B* ähnliches Parallelogramm zu entwerfen. Die Seiten des *ABCD* wollen wir *pq* nennen und die Seiten des *B* mögen sich wie *m*:*n* verhalten.

Dann ist:

$$xy = pq \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n},$$
$$x = \frac{pq}{y} \qquad x = y\frac{m}{n}.$$

Mithin:

$$y\frac{m}{n} = \frac{pq}{y},$$
$$y^2\frac{m}{n} = pq,$$

Digitized by Google

$$y^2 = \frac{pq}{m} n,$$

$$y = \sqrt{\frac{pq}{m} n}.$$

Um dies geometrisch darzustellen, wollen wir $\frac{pq}{m} = v$ setzen. Dann ist $y = \sqrt{vn}$. Es ist aber $m : p = q : v$. Suchen wir also diese vierte Proportionale. Es sei (Taf. IV. Fig. 12.) $m = AB$; $p = AC$; $q = AD$, dann ist:

$$AB : AC = AD : AE.$$

Mithin:

$$AE = v.$$

Setzen wir nun an AE die Linie n an und beschreiben über der so entstandenen Linie AF einen Halbkreis (Taf. IV. Fig. 14.), so ist das auf dem Endpunkte von AE errichtete Cotg.

$$EG = \sqrt{AE . EF} = \sqrt{vn} = y.$$

Da nun $x = \frac{pq}{y}$, so lässt sich dies finden durch die Proportion:

$$y : p = q : x.$$

Es sei (Taf. IV. Fig. 15.):

$$y = AG; \quad q = AF; \quad q = AJ,$$

dann ist:

$$AG : AF = AJ : AH,$$

also:

$$x = AH.$$

Construirt man also ein Parallelogramm, dessen Grundlinie $= AH$ und dessen Höhe $AL = EG$ ist, so wird dieses Parallelogramm $ALMH$ (Taf. IV. Fig. 16.) den Anforderungen entsprechen.

Ist die gegebene Figur B nicht ein Rechteck sondern ein Rhombus, so muss man auch das dem A gleiche so wie das gesuchte Parallelogramm unter dem gegebenen Winkel entwerfen.

Wie jene ganze Construction in Einer Figur auf elegante Weise dargestellt werden kann, um das eigentliche διάγραμμα des Pythagoras aufzufinden, das überlasse ich füglich den Mathematikern. Ein befreundeter Mathematiker, dem ich diese Frage

Digitized by Google

vorlegte, hat mir folgenden Versuch mitgetheilt. Die gegebene Figur A sei in das Parallelogramm $ABCD$ (Taf. IV. Fig. 17.) verwandelt, $EFGH$ sei das Parallelogramm B, dem das gesuchte ähnlich sein soll. Man mache $JB = EF$; $BP = FG$. Ziehe $CK \parallel JP$, bestimme die mittlere Proportionale (BL) zu BK und BA; mache $BM = BL$, $MN \parallel JP$ und vollende $MBNO$, so ist dies das gesuchte Rechteck.

Beweis: $BM:BN = BJ:BP$

$= EF:FG,$

also:

$$\square MBNO \sim \square EFGH$$

$$AB:BM = BM:BK \quad \text{(weil } BM = BL\text{)}$$

$$BM:BN = BK:BC$$

$$\overline{AB:BN = BM:BC}$$

mithin: $BN \times BM = AB \times BC$

d. i. $\square MBNO = \square ABCD.$

Jenem pythathagoreischen Probleme ähnlich ist die Aufgabe, die Euclid Elem. VI., 28. 29. und Data 58. 59. behandelt. Es soll über einer Linie $b \pm y$ ein Parallelogramm so entworfen werden, dass $(b \pm y)x$ einem gegebenen χωρίον Γ gleich und yx einem gegebenen χωρίον Δ ähnlich sei. Eigenthümlich ist die Weise, wie Euclid dies ausdrückt. Wenn innerhalb des Parallelogramms $AC = bx$ (Taf. IV. Fig. 18.) über einem Abschnitte der Linie b, z. B. $DB = y$ das Parallelogramm DC entworfen wird, dann ist

$$\text{das } \square AE = AC - DC = bx - yx = (b-y)x$$

und denkt man sich b um y verlängert (Taf. IV. Fig. 19.) dann ist

$$\text{das } \square AG = AC + BG = bx + yx = (b+y)x.$$

Das Parallelogramm AE construiren heisst nun in der Sprache des Euclid, wenn wir DC durch Δ bezeichnen: παρὰ τὴν εὐθεῖαν β παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον παραλληλογράμμῳ Δ, und AG construiren heisst παρὰ τὴν εὐθεῖαν β παραλληλόγραμμον παραβάλλειν ὑπερβάλλον παραλληλογράμμῳ Δ, wenn wir BG mit Δ bezeichnen.

Jene Aufgabe, die in zwei zerfällt, heisst daher bei Euclid I., παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν β τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ομοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι Δ und II., παρὰ τὴν δοθεῖσαν — — παραβαλεῖν

Digitized by Google

ὑπερβάλλον εἴδει παραλλ. ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. Die geometrische Lösung siehe bei Euclid, die analytische würde zuerst y und dann daraus x suchen. AB (Taf. IV. Fig. 20.) sei b, DB sei y, BC sei x. Es sei AE gleich dem gegebenen χωρίον Γ, welches a Quadratfuss enthalte. In dem χωρίον Δ mögen sich die Seiten wie $m:n$ verhalten.

Dann ist:

$$x:y = m:n,$$

$$x = y\frac{m}{n}.$$

Ferner ist:

$$(b-y)x = a,$$

mithin:

$$(b-y)y\frac{m}{n} = a,$$

$$by - y^2 = a\frac{n}{m},$$

$$y^2 - by = -a\frac{n}{m},$$

$$y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - a\frac{n}{m},$$

$$y - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - a\frac{n}{m}},$$

$$y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a\frac{n}{m}}.$$

Auf dieselbe Weise findet sich, wenn die gegebene Figur $\Gamma = AG$ ist (Taf. IV. Fig. 21.), was wir a nennen wollen,

$$by + y^2 = a\frac{n}{m},$$

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{4} + a\frac{n}{m}} - \frac{b}{2}.$$

Sind die Parallelogramme nicht Rechtecke sondern Rhombi (Taf. IV. Fig. 22.), so ist auch der Winkel derselben $GAH = \varphi$ zu berücksichtigen. Dann ist in beiden Formeln zu dem Nenner m hinzuzusetzen $\sin\varphi$.

In anderen Aufgaben, wie Elem. X., 18. 19. und dem vorhergehenden Lemma wird über dem einen Abschnitte der gegebenen Linie nicht ein einer andern Figur ähnliches Parallelogramm,

Digitized by Google

sondern ein Quadrat entworfen. Es ist dann $z = x$ und $a = bx \pm x^2$.

Es kann befremdlich erscheinen, dass in jener Aufgabe des Euclid die Parallelogramme *AE* und *AG* παραβολαὶ παρὰ τὴν εὐθεῖαν β genannt werden, da sie doch nur παραβολαί über der verkürzten oder verlängerten Linie β sind. Aber der Abschnitt y ist nicht ein willkührlicher, sondern y ist von x abhängig und ihre gegenseitige Relation, ähnlich dem Verhältnisse zwischen Coordinaten, ist durch β bedingt. Der Ausdruck ἐλλεῖπον und ὑπερβάλλον ist eben daraus zu erklären, weil die einfache παραβολή $a = bx$ zum Grunde liegt. Die Abschnitte der Linie b heissen bei Euclid in dem Lemma vor X., 18. τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενόμενα τμήματα τῆς εὐθείας.

In ähnlicher Weise ist bei dem Pythagoreischen Problem die Grundlinie nicht rein gegeben, sondern durch das anderweitige Verhältniss $\frac{m}{n}$ modificirt.

Wir werden daher die ursprüngliche παραβολή $a = bx$ eine reine παραβολή, die anderen aber gemischte παραβολαί nennen.

Eine grosse Rolle spielt bekanntlich die παραβολή in der Curvenlehre. Appollonius nannte den einen der Kegelschnitte παραβολή, weil das Quadrat der Ordinate dem Rechtecke aus Parameter und Abscisse entspricht. Wir haben also auch hier eine παραβολή eines Parallelogrammes. Wie oben $a = bx$, so ist hier $y^2 = px$. Καλείσθω δὲ, sagt Appollonius, ἡ τοιαύτη τομὴ παραβολή. Proclus sagt ausdrücklich, diese Benennung sei aus der Pythagoreischen Planimetrie entlehnt. Vergleichen wir nun die Scheitelgleichungen der drei Kegelschnitte, die unsere Mathematiker durch

$$y^2 = px,$$

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a},$$

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a},$$

ausdrücken, so sehen wir, wie bei der Ellipse ein Deficit und bei der Hyperbel ein Ueberschuss hinzutritt. Es ist also die Parabel eine reine παραβολή, die Ellipse aber und Hyperbel sind gemischte παραβολαί. Bei der Ellipse τὸ παραβεβλημένον ἐλλείπει τινί, bei der Hyperbel ὑπερβάλλει τινί. Nach diesen hinzutre-

Digitized by Google

tenden Merkmalen („a proprio quodam accedente“ sagt Pappus praef. ad sept. coll. Math. p. XLI.) nannte nun Apollonius die beiden gemischten *παραβολαί* kurz *ἔλλειψις* und *ὑπερβολή* statt *παραβολὴ μετ᾽ ἐλλείψεως* und *παραβολὴ μεθ᾽ ὑπερβολῆς*. Was also die sprachliche Benennung der Kegelschnitte betrifft, sind die Namen *ἔλλειψις* und *ὑπερβολή* der *παραβολή* nicht zu coordiniren, sondern unterzuordnen, wenn auch die drei Kegelschnitte der Sache nach durchaus disparat sind. Denn das verwandtschaftliche Verhältniss derselben nach der Auffassung des Archimedes, bei dem

die Parabel *ἡ τομὴ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου*,
die Ellipse *ἡ τομὴ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου*,
die Hyperbel *ἡ τομὴ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου*

ist, gehört nicht hierher.

Die von Appollonius eingeführte Benennung der drei Kegelschnitte hat nun auf die Auffassung der planimetrischen *παραβολή* bei Proclus bedeutend eingewirkt, so dass man seiner Darstellung der Euclidischen Begriffe nicht eben grosse mathematische Schärfe nachrühmen kann.

Da wir schon in der ersteren Abhandlung öfters auf jene Worte des Proclus verweisen mussten, wollen wir den ganzen hierher gehörenden Abschnitt aus der einzigen editio Basil. MDXXXIII. p. 109. im Zusammenhange mittheilen und mit unseren Bemerkungen begleiten.

Zu der Aufgabe Euclids (I, 44.) *παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ* macht Proclus folgende Bemerkung.

Ἐστὶ γὰρ ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν 1.
Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα, ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ
ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. Ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ 2.
ὀνόματα λαβόντες, μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας
γραμμὰς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολὴν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέ-
σαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν
*ἐν ἐπιπέδῳ**) *καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ*
τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων. Ὅταν γὰρ εὐθείας 3.
*ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαραβαλεῖν***) *ἐκεῖνο*

---

*) Vielleicht ist *ἐπιπέδων* zu schreiben.

**) Bei einem Scholiasten des Euclid, von welchem unten die Rede sein wird, ist diese verstümmelte Stelle so ergänzt: *συμπαρατείνηται τότε παραβάλλειν*.

*τὸ χωρίον φασίν, ὅταν δὲ μεῖζον ποιήσῃς**) *τοῦ χωρίου τὸ μῆκος*
αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅταν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ
*χωρίου γραφέντος εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐκτὸς, τότε ἐλλείπειν***).
4. *Καὶ οὕτως ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ Εὐκλείδης*
5. *μνημονεύει καὶ τῆς ἐλλείψεως. Ἐνταῦθα δὲ τῆς παραβολῆς ἐδεήθη,*
τῷ δοθέντι τριγώνῳ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσον ἐθέλων πα-
ραβαλεῖν, ἵνα μὴ μόνον σύστασιν ἔχωμεν παραλληλογράμμου τῷ
*δοθέντι τριγώνῳ ἴσου****), *ἀλλὰ καὶ παρ' εὐθεῖαν ὡρισμένην παρα-*
6. *βολήν. Οἷον τριγώνου δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν ἔχοντος δώδεκα ποδῶν,*
εὐθείας δὲ ἐκκειμένης, ἧς τὸ μῆκός ἐστι τεττάρων ποδῶν, τὸ ἴσον
τῷ τριγώνῳ παρὰ τὴν εὐθεῖαν παραβάλλομεν, εἰ†) *λαβόντες τὸ*
μῆκος ὅλον††) *τῶν τεττάρων ποδῶν, εὕρομεν, πόσων εἶναι δεῖ*
ποδῶν τό πλάτος, ἵνα τῷ τριγώνῳ τὸ παραλληλόγραμμον ἴσον γέ-
νηται. Εὑρόντες γοῦν εἰ τύχοι πλάτος τριῶν ποδῶν καὶ ποιήσαντες
τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος, τοῦτο δὲ ὀρθῆς οὔσης τῆς ἐκκειμένης
7. *γωνίας, ἕξομεν τὸ χωρίον. Τοιοῦτον μὲν δή τι τὸ παραβαλεῖν ἐστιν*
8. *ἄνωθεν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων παραδεδομένον. Τρία δὲ ἐστὶν ἐν*
τῷ προβλήματι τούτῳ τὰ δεδομένα, εὐθεῖα, παρ' ἣν δεῖ παραβαλεῖν,
ὡς ὅλην αὐτοῦ τοῦ χωρίου γενέσθαι πλευρὰν, καὶ τρίγωνον, ᾧ
ἴσον εἶναι δεῖ τὸ παραβαλλόμενον, καὶ γωνία, ᾗ ἴσην εἶναι τὴν
9. *τοῦ χωρίου γωνίαν. Καὶ δῆλον πάλιν, ὡς ὀρθῆς μὲν οὔσης*
τῆς γωνίας τὸ παραβαλλόμενον ἢ τετράγωνον ἢ ἑτερόμηκες
10. *ἔσται ὀξείας δὲ ἢ ἀμβλείας ἢ ῥόμβος τὸ χωρίον ἢ ῥομβοειδές. Ὅτι*
γε μὴν καὶ τὴν εὐθεῖαν εἶναι δεῖ πεπερασμένην, φανερόν· οὐ γὰρ
δύναται παρὰ τὴν ἄπειρον. Ἅμα οὖν τῷ φάναι, παρὰ τὴν δοθεῖσαν
εὐθεῖαν παραβαλεῖν, ἐδήλωσεν, ὅτι καὶ πεπεράνθαι ἀνάγκη τὴν
11. *εὐθεῖαν. Χρῆται δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προβλήματος τούτου*
τῇ συστάσει τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἴσου τῷ δοθέντι τριγώνῳ·
οὐ γὰρ ταὐτὸν παραβολὴ καὶ σύστασις, καὶ, ὡς εἴπομεν, ἄλλη†††)
μὲν ὅλον ὑφίστησι τὸ χωρίον καὶ αὐτὸ καὶ τὰς πλευρὰς ἁπάσας,
μίαν δὲ ἔχουσα πλευρὰν δεδομένην, παρὰ ταύτην ὑφίστησι τὸ χωρίον,
οὔτε ἐλλείπουσα κατὰ τὴν ἔκτασιν ταύτην, οὔτε ὑπερβάλλουσα,
ἀλλὰ μιᾷ πλευρᾷ ταύτῃ χρωμένη περιέχουσα††††) *τὸ ἐμβαδόν.*

Wenn Proclus sagt, *ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις* **seien Benennungen planimetrischer Constru-**

---

*) Jener Scholiast hat *γίνηται.*

**) Ed. Basil. *ἐκλείπειν.*

***) Bas. *ἴσον.*

†) Bas. *ἤ.*

††) Bas. *ὅλων.*

†††) Bas. *ἄλλη.*

††††) Bas. *περιεχούσῃ.*

Digitized by Google

ctionen, die von den Späteren auf die Kegelschnitte übertragen worden wären, so hat er, was die *παραβολή* betrifft, Recht, aber ungenau ist es, wenn er dasselbe von den Namen *ἔλλειψις* und *ὑπερβολή* behauptet. Nothwendig wäre dann doch, dass diese Namen in dieser Bedeutung schon von den Alten gebraucht wären. Aber Euclid wenigstens, von dem er behauptet, dass er *ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως μνημονεύει**), handelt zwar dort der Sache nach von dem, was Proclus *ὑπερβολή* und *ἔλλειψις* genannt wissen will, aber diese nomina gebraucht er nicht. In den Datis 59. gebraucht er einmal *ὑπερβολή*, aber er bezeichnet damit blos das Stück, *ᾧ ὑπερβάλλει τὸ παραβεβλημένον*, wie er Elem. VI, 28. und Dat. 58. das fehlende Stück, *ᾧ ἐλλείπει τὸ παραβεβλημένον*, *ἔλλειμμα* nennt. Bei Euclid giebt es überhaupt keine von der *παραβολή* getrennte und für sich bestehende *ἔλλειψις* und *ὑπερβολή*, da beide bei ihm nur in der Verbindung mit der *παραβολή* vorkommen. Es scheint also, dass Proclus von Apollonius rückwärts schliessend irrthümlich schon dem Pythagoras und Euclides diesen Gebrauch jener beiden Substantiva in dieser Bedeutung beigelegt hat. Dass übrigens dem Apollonius jene Sätze des Euclides (VI, 28. 29.) vorgeschwebt haben, könnte man daraus schliessen, dass bei seiner Beschreibung der Ellipse und Hyperbel die Ausdrücke prop. XIII. *ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύναται* und prop. XII. *ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ κ. τ. λ.* genug Anklänge bieten an das Euclidische *ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι*.

Noch befremdlicher erscheint es, wenn Proclus §. 3. auch *παραβάλλειν*, *ἐλλείπειν*, *ὑπερβάλλειν* als gleichartige Verba coordinirt. Die an dieser offenbar verstümmelten und lückenhaften Stelle ausgefallenen Worte sind nach August's Meinung erhalten bei einem noch ungedruckten Scholiasten des Euclid (in der Münchener Bibliothek cod. no. 102), welcher statt des fehlerhaften *συμπαραβαλεῖν* die ergänzenden Worte bietet: *ὅταν γὰρ — πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαρατείνηται, τότε παραβάλλειν ἐκεῖνο τὸ χωρίον φασίν*. Da wir bisher aus Euclid nur *παραβάλλειν* als verbum activum kennen gelernt haben, neben welchem *ἐλλείπειν* und *ὑπερβάλλειν* als verba neutra gebraucht wurden, so könnte es scheinen, dass man das *παραβάλλειν* in *παραβάλλεσθαι* ändern müsse, wie der lateinische Uebersetzer Barocius (Patavii 1560)

*) Auch p. 17. zählt Proclus unter den der Geometrie eigenthümlichen Gegenständen neben *τρίγωνα*, *τετράγωνα*, *ἁφαί*, *ἰσότηλες* auch *αἱ παραβολαί*, *αἱ ὑπερβολαί*, *αἱ ἐλλείψεις* auf.

gethan hat, welcher p. 264. die Stelle folgendermaassen übersetzt und ergänzt: quum enim proposita recta linea oblatum spatium toti rectae lineae coaptaveris, tunc spatium illud applicari dicunt; quum vero spatii longitudinem ipsa recta linea majorem feceris, tunc excedere, quum autem minorem, ita ut spatio descripto aliqua extra sit rectae lineae pars, tunc deficere. Aber von dieser etwas gewaltsamen Aenderung des *παραβάλλειν* hält mich zurück eine Stelle des Euclid, wo man zu der Annahme genöthigt ist, dass Euclid mit technischer Kürze dem *ἐλλείπειν* und *ὑπερβάλλειν* neben der vorherrschenden neutralen Bedeutung auch eine transitive Bedeutung beigelegt hat. Nämlich in dem oben p. 152. von uns behandelten Satze des Euclid VI, 28. 29., wo es sich um die Aufgabe handelte *παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον (ὑπερβάλλον) εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι*, heisst es in der Vorbereitung des Beweises: *ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ*, und §. 29. in gleicher Weise: *ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ Δ.* Da hier das *ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν* durchaus parallel steht dem *ᾧ δεῖ ὅμοιον παραβαλεῖν*, so muss man glauben, dass Euclid an dieser Stelle *ἐλλείπειν* und *ὑπερβάλλειν* plötzlich als ein verbum activum gebraucht habe. Auch zu Ende der Protasis von VI, 28. kehrt dieselbe Redensart *ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν* wieder. So seltsam es auch erscheinen mag, dass ein Mathematiker in einem und demselben Satze einen Kunstausdruck in zwiefacher Bedeutung gebraucht habe, so ist doch ein anderer Ausweg nicht möglich. Wollte man mit dem lateinischen Uebersetzer Clavius *ἐλλείπειν* hier durch deesse übersetzen, so wäre die Abweichung von der gewöhnlichen Bedeutung des *ἐλλείπειν* (deficere spatio) eben so stark und noch andere Unebenheiten des Ausdrucks damit verbunden. Es scheint also, dass Euclid, weil $(b-y)x = bx - yx$ ist, so auch statt *παραβάλλω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει* sich erlaubt habe zu sagen: *παραβάλλω παραλληλόγραμμον* (bx), *ἐλλείπων εἶδος* $(-yx)$. Dann würde also *ἐλλείπω* heissen: ich lasse fehlen, lasse weg, verliere, und *ὑπερβάλλω* ich füge hinzu als Ueberschuss*). Die Stelle des Proclus wäre also zu übersetzen: wenn die Fläche längs der ganzen gegebenen Linie angestreckt wird, dann sagen sie, dass sie dieselbe *παραβάλλουσι*,

*) Wenn Euclid in diesem einzelnen speciellen Falle um der Kürze willen jenen Gebrauch des *ἐλλείπειν* sich erlaubt, so berechtigt dies nicht dazu, dem mathematischen *ἐλλείπειν* auch anderwärts eine active Bedeutung beizulegen, am wenigsten, wenn ein Dativ *χωρίῳ* dabei steht.

Digitized by Google

wenn aber die Länge (Grundlinie) derselben kleiner oder grösser gemacht wird als die gegebene Linie, dann sagen sie, dass sie *ἐλλείπουσι* oder *ὑπερβάλλουσι**). Uebrigens ist *ἐλλείπειν* und *ὑπερβάλλειν* an jener Stelle des Euclid doch noch in einem etwas anderen Sinne gebraucht, als bei Proclus. Denn bei Euclid ist dort damit yx bezeichnet, aber Proclus versteht darunter $(b \pm y)x$. Aus der ganzen Stelle ersieht man zugleich, dass Proclus bei *παραβαλεῖν* nur an die reine *παραβολή* bx denkt und die gemischten *παραβολαί* nicht mit darunter begreift, sondern nach dem Vorgange der Curvenlehre des Apollonius diese mit den besonderen Namen *ἔλλειψις* und *ὑπερβολή* benennt.

Was nun das *συμπαρατείνηται***) betrifft, so fragt sich noch sehr, ob diese Ergänzung des Euclidischen Scholiasten Vertrauen verdient, denn jener Scholiast ist ein sehr bedenklicher Gewährsmann. Das leuchtet zwar ein, dass er den ganzen Abschnitt des Proclus benutzt und ausgeschrieben hat, aber er giebt anderwärts eigenes und zwar falsches Machwerk an Stellen, wo er den Proclus nicht versteht, weil ihm der Sprachgebrauch sowohl wie die Sache fremd ist. Z. B. §. 11. wo Proclus sagt: *χρῆται δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προβλήματος τούτου τῇ συστάσει τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἴσου τῷ δοθέντι τριγώνῳ. οὐ γὰρ ταὐτὸν παραβολὴ καὶ σύστασις καί, ὡς εἴπομεν, ἄλλῃ μὲν κ. τ. λ.* glaubt jener Scholiast, Proclus wolle hier den Unterschied zwischen *παραβολή* und *σύστασις* aus einander setzen und sagt in der Fortsetzung jenes Scholiums: *ἔλαβε δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προβλήματος τούτου τὴν σύστασιν τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἴσου τῷ δοθέντι τριγώνῳ. Διαφέρει δὲ ἡ σύστασις τῆς παραβολῆς, ὅτι ἡ μὲν παραβάλλει μόνον, ἡ δὲ σύστασις ὅλον ὑφίστησι τὸ χωρίον καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, μιᾷ γὰρ πλευρᾷ χρωμένη τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ, περιέχουσα τὸ ἐμβαδὸν, τὰς λοιπὰς εἰςάγουσα πλευρὰς οὔτε ἐλλειπούσας κατὰ τὴν ἔκτασιν οὔτ᾽ ἂν περιττευούσας τὸ χωρίον ὑφίστησιν.* Dies ist ein arges Missverständniss. Denn 1) will Proclus, wie wir nachher sehen werden, hier gar nicht die unterscheidenden Merkmale der *σύστασις* und *παραβολή* gegenüber

*) Neutral kann *ἐλλείπειν* und *ὑπερβάλλειν* hier nicht gebraucht sein, weil dann der Subjects-Accusativ *τὸ χωρίον* oder ein Pronomen dabei stehen müsste.

**) Da *ὅταν δὲ μεῖζον ποιήσῃς* darauf folgt, sollte man eigentlich *συμπαρατείνῃς* erwarten. Bei der von mir angenommenen Construction der Worte wäre noch passender *συμπαρατείνωσι*. Der Scholiast bietet *γίνηται* statt *ποιήσῃς*. Nimmt man dieses auf, dann ist das Passivum *συμπαρατείνηται* gerechtfertigt.

Digitized by Google

stellen, und 2) ist der Unterschied, wie ihn der Scholiast angiebt, ganz verkehrt, so dass es befremden muss, dass August, der in seiner Abhandlung p. 18. diesen Scholiasten „zur Ergänzung der Kenntniss des mathematischen Sprachgebrauches und der scharfen Unterscheidungen, welche die griechische Sprache zuliess" anführt, diesem confusen Kopfe beistimmt und mit ihm die *σύστασις* erklärt: es werde durch dieselbe „die Figur in der vorgeschriebenen Gestalt mit Anwendung aller Bestimmungsstücke (Seiten und Winkel) entworfen." Wie kann man *τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι* (Euclid. I, 42.) mit Beibehaltung der Seiten? Und soll ein Winkel beibehalten werden, so wird *ἐν γωνίᾳ δοθείσῃ* noch als besondere Bedingung hinzugesetzt. Proclus würde auch sich selber widersprechen, denn vorher §. 5. sagt er: *ἵνα μὴ μόνον σύστασιν ἔχωμεν παραλληλογράμμου τῷ δοθέντι, τριγώνῳ ἴσον, ἀλλὰ καὶ παρ' εὐθεῖαν ὡρισμένην παραβολήν**). Proclus, der die *σύστασις*, „die Construction", als bekannt annimmt, beschreibt dort nur das Eigenthümliche der *παραβολή*. Dabei ist in dem Ausdrucke der bekannte Gräcismus, nach welchem mit *μέν* — *δέ* zwei Sätze parallel („paractactisch") gestellt werden, von denen nur der zweite die Hauptsache enthält, während der erstere eine untergeordnete parenthetische Nebenbemerkung bietet (cf. ad Tac. Agric. p. 48 sq.). Proclus sagt: „Zur Lösung dieser Aufgabe (des *παραβαλεῖν*) nimmt er zur Hülfe die *σύστασις* eines dem gegebenen Dreiecke gleichen Parallelogrammes. Die *παραβολή* ist nämlich nicht dasselbe wie *σύστασις*, sie (die *παραβολή*) stellt, wie wir gesagt haben, über einer Seite, die ihr gegeben ist, die Fläche dar, — zuweilen stellt sie die ganze Figur dar sammt allen Seiten**), — indem sie jene Linie weder verkürzt noch verlängert, sondern an die eine Linie sich haltend den Flächeninhalt einschliesst."

Auch §. 3. giebt der Scholiast für die leicht verständlichen Worte des Proclus *ὅταν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γραφέντος εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐκτός, τότε ἐλλείπειν* die unklare Periphrase:

---

*) Noch deutlicher sind seine Worte zu Euclid I., 45. auf derselben Seite p. 109.

**) In dieser Nebenbemerkung nennt Proclus auch das *παραβολή*, wenn ausser der Grundlinie auch die Höhe gegeben ist. Ihm ist also nicht blos $a = bx$, sondern auch $a = bh$ Formel für die Parabole. Während die *παραβολή* ursprünglich dazu dient, die Höhe zu finden, nimmt er sie hier als schon gefunden an, und versteht unter *παραβάλλειν* die Ausführung des Gefundenen, was er oben nannte *ποιήσαντες τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος*.

Digitized by Google

ὅταν δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ γραφὲν χωρίον αὐτῆς τῆς εὐθείας, ὡς εἶναι τὸ μὲν χωρίον ἐντός, τὴν δὲ εὐθεῖαν περιττεύειν ἐκτὸς', ἐλλείπειν.

Und diesem Scholiasten, der so mit dem Texte des Proclus umspringt, sollen wir das Vertrauen schenken, dass er das richtige Wort uns biete? Will man conjiciren, so könnte man mit demselben Rechte und mit mehr Wahrscheinlichkeit συμπαρακέηται vermuthen. Welches griechische Barocius vorgeschwebt hat, als er coaptaveris hinzusetzte, weiss ich nicht. Sollte er einen griechischen codex vor sich gehabt haben, so würde er, wenn er dort παρατείνῃς gefunden hätte, dies sicher durch praetenderis wieder gegeben haben. Ich kann daher nicht August beistimmen, dass die Bedeutung des platonischen παρατείνω durch jenen Scholiasten uns erschlossen sei. Nicht mag ich gegen die vermeinte Identität des παρατείνω und παραβάλλω, welche aus dieser Stelle hervorgehen soll, das Argument beibringen, es müsse auch bei Proclus jenes συμπαρατείνειν, wenn er wirklich so geschrieben hätte, einen weiteren Begriff haben als παραβάλλω, weil ja letzteres nachher als species untergeordnet ist, weswegen auch Barocius zwei Verba (coaptaveris — applicari) bietet; denn dieses Bedenken kann man als beseitigt ansehen durch das vorgesetzte συμ-, was in Verbindung zu bringen ist mit dem vorhergehenden πάσῃ *) τῇ εὐθείᾳ, so dass also der Sinn wäre, wenn die Fläche an der ganzen Linie hin angestreckt wird, dann nennt man dies παραβάλλειν **). Doch zu lange haben

---

*) Vergl. Köchly zu Eurip. Iph. Taur. v. 1371. und über ähnliche mit Präpositionen zusammengesetzte verba Buttmann ad Plat. Men. Excurs. I.

**) Noch will ich denen, die παρατείνω für gleichbedeutend mit παραβάλλω halten möchten, eine Combination an die Hand geben, durch die sie ihre Meinung unterstützen können. In dem Euclid des Boethius bei Lachmann gramatici script. p. 385. finden sich folgende zwei Aufgaben neben einander gestellt: Dato triangulo aequale parallelogrammum in dato rectilineo angulo constituere. — Juxta rectam lineam dato triangulo dato rectilineo angulo parallelogrammum aequale praetendere. In der ersteren Aufgabe ist constituere offenbar das Euclidische συστήσασθαι (Elem. I., 42.) und in der zweiten wird man in dem praetendere das Euclidische παραβαλεῖν (Elem. I., 44.) zu suchen haben. Man könnte also vermuthen, in dem griechischen Originale, welches Boethius vorgelegen, habe παρατείνω als Synonymon die Stelle von παραβάλλω vertreten. Wenigstens wird das geographische παρατείνω (ἡ δέ γ' Εὔβοια ἡδὶ παρατέταται Arist. Nub. 212. τῇ μὲν γὰρ τῆς Ἀραβίης οὖρος παρατέταται Herodot. II., 8.) im Lateinischen durch praetendere ausgedrückt. Baeticae latere

wir bei jenem unbedeutenden Scholiasten verweilt, auf den man weder bei Ergänzung der Lücke im Proclus noch bei der Erklärung des platonischen Ausdruckes mit einiger Sicherheit bauen kann. *Παρατείνειν* scheint allerdings mit *παραβάλλειν* etwas gemein zu haben, aber die Verwandtschaft, glaube ich, besteht darin, dass durch *παραβάλλω* eine Grösse als Product zweier Factoren dargestellt wird, durch *παρατείνειν* aber die halbe Grösse durch eine combinirte Theilung jener beiden Factoren (durch ein Dreieck) ausgedrückt wird.

Noch müssen wir der Bedeutung des *παραβάλλω* und der *παραβολή* bei den griechischen Arithmetikern gedenken. Die Formel für die *παραβολή* ist, wie wir oben bemerkten, $a = bx$. Mithin ist $x = \frac{a}{b}$. Da also x durch Division gefunden wird, wurde nun *παραβάλλειν* Kunstausdruck für dividiren und der Quotient $\frac{a}{b}$ heisst die *πλάτος τῆς παραβολῆς*. So Nicomachus in der *εἰσαγωγὴ ἀριθμητική* c. 27. p. 36. (ed. Hoche. Wetzlar 1862) *ἁρμονικὴν δὲ (μεσότητα εὑρήσεις), τὴν τῶν ἄκρων διαφορὰν ποιητέον ἐπὶ τὸν ἐλάττονα, καὶ τὸν γενόμενον παραβλητέον παρὰ*) τὸν σύνθετον ἐκ τῶν ἄκρων, εἶτα τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς προσθετέον τῷ ἐλάττονι, καὶ ἔσται ὁ γενόμενος ἁρμονικὴ μεσότης.* Nicomachus will hier das Mittelglied einer stetigen harmonischen Proportion bestimmen.

Unsere Arithmetik hat für dieses harmonische Mittel die Formel $x = \frac{2ab}{a+b}$. Statt dieser Formel haben Nicomachus und Theon die etwas breitere

---

septentrionali praetenditur Lusitania Plin. N.H. III., 1, 2. Die übliche Uebersetzung des mathematischen *παραβάλλειν* durch applicare scheint modernen Ursprungs zu sein.

*) In der neuesten Ausgabe von Hoche liest man *ἐπὶ* statt *παρά*; aber letzteres findet sich dreimal bei Theon, p. 187. 188. (ed. Paris 1643) wo dieser fast mit denselben Worten dieses harmonische Mittel zu finden lehrt. Da die geometrische Anschauung hierbei zum Grunde liegt, ist auch *παρά* das allein passende. Denn die Grundlinie des Parallelogrammes, auf welche *παρά* hinweist, ist der eine Factor, mit dem man das Ganze (des Inhaltes) dividiren muss, um den Quotienten zu finden. Dem analog wird nun auch das gewöhnliche Wort für dividiren, *μερίζειν* mit *παρά* construirt z. B. *μέριζε τὰ ρ' παρὰ τὰ ε'· γίνονται κ'* so häufig bei Heron.

Digitized by Google

$$x = \frac{(a-b)b}{a+b} + b$$

was auf dasselbe hinausläuft, denn nach derselben ist

$$x = \frac{(a-b)b+(a+b)b}{a+b} = \frac{ab-bb+ab+bb}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Deswegen sagt Nicomachus: „Um das harmonische Mittel zu finden, muss man den Unterschied der äusseren Glieder multipliciren mit dem kleineren Gliede, das Product dividiren durch die Summe der äusseren Glieder, dann diesen Quotienten hinzuaddiren zu dem kleineren Gliede. Was herauskömmt, ist das harmonische Mittel." Eben so Theon Mathematica p. 187. sq.

Beiläufig bemerke ich, dass aus obiger Stelle hervorgeht, dass die Griechen summiren (*συντιθέναι*) und addiren (*προστιθέναι*) scheiden.

Die mathematische Bedeutung des *παραβάλλειν*, vermuthe ich, liegt auch an einer Stelle von Platon's symposium p. 214 C., die den Erklärern viel Noth macht, zum Grunde. Alcibiades sagt dort: *μεθύοντα δὲ ἄνδρα παρὰ νηφόντων λόγους παραβάλλειν μὴ οὐκ ἐξ ἴσου ᾖ.* Wolf war geneigt nach einem bekannten Gräcismus *μεθύοντα ἄνδρα* zu erklären durch *ἀνδρὸς μεθύοντος λόγους παρὰ νηφόντων λόγους παραβάλλειν,* aber die Proposition *παρά* erregt ihm Bedenken, da bei seiner Auffassung *πρὸς* oder der Dativ erwartet wird. Stallbaum sagt: breviter dictum est pro: ebrium virum provocare, ut aemuletur sobriorum orationes. Das würde wohl ohngefähr etwas dem Sinne der Worte Aehnliches wiedergeben, aber nicht die Worte grammatisch erklären. Wenn wir die mathematische Bedeutung des Wortes zu Grunde legen, ist alles klar. Wie *παραβάλλειν παρ' εὐθεῖαν* heisst auf eine gegebene Linie ein Parallelogramm setzen, so soll hier der trunkene Alcibiades seine Rede auf die Reden der Nüchternen darauf setzen. Wohl wäre denkbar, dass der joviale Alcibiades in dieser Gesellschaft wissenschaftlich Gebildeter statt anreihen, anknüpfen, jenes aus der Mathematik entlehnten Kunstausdruckes sich bedient habe. Am nächsten entspricht daher Schleiermacher's Uebersetzung: „aber dass ein trunkener Mann seine Rede neben der Nüchternen ihre stellen soll, wenn das nur nicht allzu ungleich ist." Für das Nebenstellen wäre also vielleicht richtiger gewesen das Draufsetzen.

Digitized by Google

XVII.

Ueber die Bestimmung eines Punktes in der Richtungslinie der Resultirenden eines beliebigen Systems von Kräften.

Von
dem Herausgeber.

Bei der Bestimmung der Resultirenden eines beliebigen Systems von Kräften, insofern es eine Resultirende giebt, ist bekanntlich immer auch die Bestimmung eines in der Richtungslinie der Resultirenden liegenden Punktes erforderlich, und diese auf unendlich viele Arten mögliche Bestimmung unterliegt in der That nicht der geringsten Schwierigkeit. Behalten wir nämlich die in der Abhandlung Thl. XLVI. Nr. XIII. gebrauchten Bezeichnungen auch hier bei, so sind die Bedingungen für die Existenz einer Resultirenden der Kräfte

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3, \ldots . P_n$$

bekanntlich: dass die Grössen L, M, N nicht sämmtlich verschwinden, und dass die Gleichung:

$$1) \ldots\ldots\quad LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

erfüllt ist. Die Grösse R der Resultirenden wird durch die Formel:

$$2) \ldots\ldots\quad R = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

bestimmt; für die Bestimmungswinkel φ, ψ, χ ihrer Richtungslinie hat man die Formeln:

$$3) \ldots\ldots\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \\ \cos\psi = \dfrac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \\ \cos\chi = \dfrac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; \end{cases}$$

Digitized by Google

und jeder Punkt (XYZ), dessen Coordinaten zweien der Gleichungen:

$$4) \ldots\ldots \quad \begin{cases} N_1 - MX + LY = 0, \\ L_1 - NY + MZ = 0, \\ M_1 - LZ + NX = 0 \end{cases}$$

genügen, ist ein Punkt der Richtungslinie der Resultirenden. Bei dieser letzteren Bestimmung muss man von den drei Grössen L, M, N immer eine auswählen, von der man weiss, dass sie nicht verschwindet; ist dies nun etwa die Grösse L, so muss man zur Bestimmung von X, Y, Z die beiden Gleichungen:

$$N_1 - MX + LY = 0,$$
$$M_1 - LZ + NX = 0$$

anwenden, aus denen man die Formeln:

$$Y = \frac{MX - N_1}{L}, \quad Z = \frac{NX + M_1}{L}$$

erhält, welche, indem man X beliebig annimmt, zur Bestimmung von Y und Z führen.

So einfach diese Bestimmung an sich ist, so hat es mir doch wünschenswerth geschienen, allgemeine symmetrisch gebildete Formeln zu besitzen, mittelst welcher ganz im Allgemeinen immer ein in der Richtungslinie der Resultirenden liegender Punkt gefunden werden kann, und solche Formeln anzugeben und dieselben etwas weiter zu entwickeln, ist der Zweck dieses Aufsatzes.

Diese Formeln sind aber:

$$5) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} X = \dfrac{MN_1 - NM_1}{L^2 + M^2 + N^2}, \\ Y = \dfrac{NL_1 - LN_1}{L^2 + M^2 + N^2}, \\ Z = \dfrac{LM_1 - ML_1}{L^2 + M^2 + N^2}; \end{cases}$$

bei denen man sogleich zu beachten hat, dass sie für X, Y, Z immer endliche völlig bestimmte Werthe liefern, da der gemeinschaftliche Nenner der drei vorstehenden Brüche nicht verschwindet, weil L, M, N nicht zugleich verschwinden. Dass aber die Ausdrücke 5) von X, Y, Z den drei Gleichungen 4) vollständig und zugleich genügen, kann auf folgende Art leicht gezeigt werden.

Es ist nämlich, wie man sogleich übersieht:

$$MX-LY=\frac{N_1(L^2+M^2)-N(LL_1+MM_1)}{L^2+M^2+N^2},$$

$$NY-MZ=\frac{L_1(M^2+N^2)-L(MM_1+NN_1)}{L^2+M^2+N^2},$$

$$LZ-NX=\frac{M_1(N^2+L^2)-M(NN_1+LL_1)}{L^2+M^2+N^2};$$

also:

$$MX-LY=\frac{N_1(L^2+M^2+N^2)-N(LL_1+MM_1+NN_1)}{L^2+M^2+N^2},$$

$$NY-MZ=\frac{L_1(L^2+M^2+N^2)-L(LL_1+MM_1+NN_1)}{L^2+M^2+N^2},$$

$$LZ-NX=\frac{M_1(L^2+M^2+N^2)-M(LL_1+MM_1+NN_1)}{L^2+M^2+N^2};$$

folglich, weil nach 1):

$$LL_1+MM_1+NN_1=0$$

ist, und ausserdem die Grösse

$$L^2+M^2+N^2$$

nicht verschwindet:

$$MX-LY=N_1,$$
$$NY-MZ=L_1,$$
$$LZ-NX=M_1;$$

also:

$$N_1-MX+LY=0,$$
$$L_1-NY+MZ=0,$$
$$M_1-LZ+NX=0;$$

welches die drei zu erfüllenden Gleichungen 4) sind.

Aus den Formeln 5) erhält man sogleich die beiden Gleichungen:

$$6)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} LX+MY+NZ=0,\\ L_1X+M_1Y+N_1Z=0; \end{cases}$$

so dass also der Punkt (XYZ) in der Durchschnittslinie der beiden durch die Gleichungen:

$$7)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} Lx+My+Nz=0,\\ L_1x+M_1y+N_1z=0 \end{cases}$$

Digitized by Google

charakterisirten, durch den Anfang der Coordinaten gehenden Ebenen liegt.

Nach 5) ist auch:

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{(LM_1-ML_1)^2+(MN_1-NM_1)^2+(NL_1-LN_1)^2}{(L^2+M^2+N^2)^2},$$

und folglich nach einer bekannten Transformation:

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{(L^2+M^2+N^2)(L_1{}^2+M_1{}^2+N_1{}^2)-(LL_1+MM_1+NN_1)^2}{(L^2+M^2+N^2)^2},$$

folglich nach 1) und weil der Nenner nicht verschwindet:

$$8)\ldots\ldots\quad X^2+Y^2+Z^2=\frac{L_1{}^2+M_1{}^2+N_1{}^2}{L^2+M^2+N^2}.$$

Wir wollen nun die Coordinaten X, Y, Z weiter entwickeln.

Es ist:

$$LM_1-ML_1$$
$$=\Sigma P\cos\alpha.\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)-\Sigma P\cos\beta.\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)$$
$$=\Sigma P\cos\alpha.(\Sigma Pz\cos\alpha-\Sigma Px\cos\gamma)-\Sigma P\cos\beta.(\Sigma Py\cos\gamma-\Sigma Pz\cos\beta),$$

$$MN_1-NM_1$$
$$=\Sigma P\cos\beta.\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)-\Sigma P\cos\gamma.\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)$$
$$=\Sigma P\cos\beta.(\Sigma Px\cos\beta-\Sigma Py\cos\alpha)-\Sigma P\cos\gamma.(\Sigma Pz\cos\alpha-\Sigma Px\cos\gamma),$$

$$NL_1-LN_1$$
$$=\Sigma P\cos\gamma.\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)-\Sigma P\cos\alpha.\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)$$
$$=\Sigma P\cos\gamma.(\Sigma Py\cos\gamma-\Sigma Pz\cos\beta)-\Sigma P\cos\alpha.(\Sigma Px\cos\beta-\Sigma Py\cos\alpha);$$

also:

$$\begin{aligned}
LM_1-ML_1=&\;(\Sigma P\cos\alpha.\Sigma Pz\cos\alpha+\Sigma P\cos\beta.\Sigma Pz\cos\beta)\\
&-(\Sigma P\cos\alpha.\Sigma Px\cos\gamma+\Sigma P\cos\beta.\Sigma Py\cos\gamma),\\
MN_1-NM_1=&\;(\Sigma P\cos\beta.\Sigma Px\cos\beta+\Sigma P\cos\gamma.\Sigma Px\cos\gamma)\\
&-(\Sigma P\cos\beta.\Sigma Py\cos\alpha+\Sigma P\cos\gamma.\Sigma Pz\cos\alpha),\\
NL_1-LN_1=&\;(\Sigma P\cos\gamma.\Sigma Py\cos\gamma+\Sigma P\cos\alpha.\Sigma Py\cos\alpha)\\
&-(\Sigma P\cos\gamma.\Sigma Pz\cos\beta+\Sigma P\cos\alpha.\Sigma Px\cos\beta);
\end{aligned}$$

folglich:

Digitized by Google

$$LM_1 - ML_1$$

$$= \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Pz\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Pz\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\gamma$$
$$- (\Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\gamma + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\gamma + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\gamma),$$

$$MN_1 - NM_1$$

$$= \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Px\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Px\cos\gamma$$
$$- (\Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\alpha + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\alpha),$$

$$NL_1 - LN_1$$

$$= \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Py\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Py\cos\gamma$$
$$- (\Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\beta + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\beta).$$

Setzt man nun der Kürze wegen:

9)

$$\mathfrak{X}' = \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Px\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Px\cos\gamma,$$

$$\mathfrak{Y}' = \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Py\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Py\cos\gamma,$$

$$\mathfrak{Z}' = \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Pz\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Pz\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\gamma$$

und:

10)

$$\mathrm{A}' = \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\alpha + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\alpha + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\alpha,$$

$$\mathrm{B}' = \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\beta + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\beta + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\beta,$$

$$\mathrm{C}' = \Sigma P\cos\alpha . \Sigma Px\cos\gamma + \Sigma P\cos\beta . \Sigma Py\cos\gamma + \Sigma P\cos\gamma . \Sigma Pz\cos\gamma;$$

ferner:

11) . . . . . .
$$\begin{cases} \mathfrak{X} = \dfrac{\mathfrak{X}'}{L^2 + M^2 + N^2}, \\ \mathfrak{Y} = \dfrac{\mathfrak{Y}'}{L^2 + M^2 + N^2}, \\ \mathfrak{Z} = \dfrac{\mathfrak{Z}'}{L^2 + M^2 + N^2} \end{cases}$$

und:

12) . . . . . .
$$\begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{A}'}{L^2 + M^2 + N^2}, \\ \mathrm{B} = \dfrac{\mathrm{B}'}{L^2 + M^2 + N^2}, \\ \mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{C}'}{L^2 + M^2 + N^2}; \end{cases}$$

so ist:

Digitized by Google

13) . . . . . . $\begin{cases} MN_1 - NM_1 = \mathfrak{X}' - \mathrm{A}', \\ NL_1 - LN_1 = \mathfrak{Y}' - \mathrm{B}', \\ LM_1 - ML_1 = \mathfrak{Z}' - \mathrm{C}' \end{cases}$

und:

14) . . . . $\begin{cases} X = \mathfrak{X} - \mathrm{A}, \\ Y = \mathfrak{Y} - \mathrm{B}, \\ Z = \mathfrak{Z} - \mathrm{C}. \end{cases}$

Es ist:

$$L^2 + M^2 + N^2 = (\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2 + (\Sigma P\cos\gamma)^2$$

$$= (P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots)^2$$
$$+ (P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + \ldots)^2$$
$$+ (P_0\cos\gamma_0 + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + \ldots)^2$$

$$= P_0^2(\cos\alpha_0^2 + \cos\beta_0^2 + \cos\gamma_0^2)$$
$$+ P_1^2(\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2)$$
$$+ P_2^2(\cos\alpha_2^2 + \cos\beta_2^2 + \cos\gamma_2^2)$$
$$+ P_3^2(\cos\alpha_3^2 + \cos\beta_3^2 + \cos\gamma_3^2)$$

u. s. w.

$$+ 2P_0P_1(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)$$
$$+ 2P_0P_2(\cos\alpha_0\cos\alpha_2 + \cos\beta_0\cos\beta_2 + \cos\gamma_0\cos\gamma_2)$$
$$+ 2P_0P_3(\cos\alpha_0\cos\alpha_3 + \cos\beta_0\cos\beta_3 + \cos\gamma_0\cos\gamma_3)$$

u. s. w.

$$+ 2P_1P_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)$$
$$+ 2P_1P_3(\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3)$$

u. s. w.

$$+ 2P_2P_3(\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3)$$

u. s. w.

u. s. w.

also in bekannter Bezeichnung:

15) . . . . $L^2 + M^2 + N^2$

$$= P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \ldots$$
$$+ 2P_0P_1\cos(P_0P_1) + 2P_0P_2\cos(P_0P_2) + 2P_0P_3\cos(P_0P_3) + \ldots$$
$$+ 2P_1P_2\cos(P_1P_2) + 2P_1P_3\cos(P_1P_3) + \ldots$$
$$+ 2P_2P_3\cos(P_2P_3) + \ldots$$

u. s. w.

Ferner ist nach 9):

Digitized by Google

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}' = \ & (P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots.) \\ & \times(P_0x_0\cos\alpha_0 + P_1x_1\cos\alpha_1 + P_2x_2\cos\alpha_2 + P_3x_3\cos\alpha_3 + \ldots.) \\ & + (P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + \ldots.) \\ & \times(P_0x_0\cos\beta_0 + P_1x_1\cos\beta_1 + P_2x_2\cos\beta_2 + P_3x_3\cos\beta_3 + \ldots.) \\ & + (P_0\cos\gamma_0 + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + \ldots.) \\ & \times(P_0x_0\cos\gamma_0 + P_1x_1\cos\gamma_1 + P_2x_2\cos\gamma_2 + P_3x_3\cos\gamma_3 + \ldots.),\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}' = \ & P_0{}^2x_0(\cos\alpha_0{}^2 + \cos\beta_0{}^2 + \cos\gamma_0{}^2) \\ & + P_1{}^2x_1(\cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2) \\ & + P_2{}^2x_2(\cos\alpha_2{}^2 + \cos\beta_2{}^2 + \cos\gamma_2{}^2) \\ & + P_3{}^2x_3(\cos\alpha_3{}^2 + \cos\beta_3{}^2 + \cos\gamma_3{}^2) \\ & \qquad \text{u. s. w.} \\ & + P_0P_1(x_0 + x_1)(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1) \\ & + P_0P_2(x_0 + x_2)(\cos\alpha_0\cos\alpha_2 + \cos\beta_0\cos\beta_2 + \cos\gamma_0\cos\gamma_2) \\ & + P_0P_3(x_0 + x_3)(\cos\alpha_0\cos\alpha_3 + \cos\beta_0\cos\beta_3 + \cos\gamma_0\cos\gamma_3) \\ & \qquad \text{u. s. w.} \\ & + P_1P_2(x_1 + x_2)(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2) \\ & + P_1P_3(x_1 + x_3)(\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3) \\ & \qquad \text{u. s. w.} \\ & + P_2P_3(x_2 + x_3)(\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3) \\ & \qquad \text{u. s. w.} \\ & \qquad \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

also, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Zeichen:

16)

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}' = \ & P_0{}^2x_0 + P_1{}^2x_1 + P_2{}^2x_2 + P_3{}^2x_3 + \ldots. \\ & + P_0P_1(x_0 + x_1)\cos(P_0P_1) + P_0P_2(x_0 + x_2)\cos(P_0P_2) \\ & \qquad + P_0P_3(x_0 + x_3)\cos(P_0P_3) + \ldots. \\ & \qquad + P_1P_2(x_1 + x_2)\cos(P_1P_2) \\ & \qquad + P_1P_3(x_1 + x_3)\cos(P_1P_3) + \ldots \\ & \qquad + P_2P_3(x_2 + x_3)\cos(P_2P_3) + \ldots \\ & \qquad \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

$$\mathfrak{Y}' = P_0^2y_0 + P_1^2y_1 + P_2^2y_2 + P_3^2y_3 + \ldots.$$
$$+ P_0P_1(y_0+y_1)\cos(P_0P_1) + P_0P_2(y_0+y_2)\cos(P_0P_2)$$
$$+ P_0P_3(y_0+y_3)\cos(P_0P_3) + \ldots.$$
$$+ P_1P_2(y_1+y_2)\cos(P_1P_2)$$
$$+ P_1P_3(y_1+y_3)\cos(P_1P_3) + \ldots.$$
$$+ P_2P_3(y_2+y_3)\cos(P_2P_3) + \ldots.$$
u. s. w.

$$\mathfrak{Z}' = P_0^2z_0 + P_1^2z_1 + P_2^2z_2 + P_3^2z_3 + \ldots.$$
$$+ P_0P_1(z_0+z_1)\cos(P_0P_1) + P_0P_2(z_0+z_2)\cos(P_0P_2)$$
$$+ P_0P_3(z_0+z_3)\cos(P_0P_3) + \ldots$$
$$+ P_1P_2(z_1+z_2)\cos(P_1P_2)$$
$$+ P_1P_3(z_1+z_3)\cos(P_1P_3) + \ldots.$$
$$+ P_2P_3(z_2+z_3)\cos(P_2P_3) + \ldots.$$
u. s. w.

Die Grössen

$$L^2 + M^2 + N^2$$

und $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, also nach 11) auch die Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, hängen von den Winkeln

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\ \ldots.;$$

nämlich von der Lage der Richtungslinien der Kräfte im Raume an sich, gar nicht ab, sondern bloss von den Kräften, den Coordinaten ihrer Angriffspunkte und der gegenseitigen Lage ihrer Richtungslinien. Wir wollen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ als die Coordinaten eines Punktes $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ im Raume betrachten, und nun zunächst dessen Entfernung von der Richtungslinie der Resultirenden der gegebenen Kräfte, welche durch Π bezeichnet werden mag, bestimmen.

Weil nach dem Obigen (XYZ) ein Punkt in der Richtungslinie der Resultirenden ist, so ist nach einer bekannten Formel *):

$$\Pi^2 = (\mathfrak{X}-X)^2 + (\mathfrak{Y}-Y)^2 + (\mathfrak{Z}-Z)^2$$
$$-\{(\mathfrak{X}-X)\cos\varphi + (\mathfrak{Y}-Y)\cos\psi + (\mathfrak{Z}-Z)\cos\chi\}^2,$$

folglich, weil nach 14):

*) M. s. Thl. XXXIV. S. 163. Nr. 85).

$$\mathfrak{X} - X = \mathfrak{X} - (\mathfrak{X} - \mathrm{A}) = \mathrm{A},$$
$$\mathfrak{Y} - Y = \mathfrak{Y} - (\mathfrak{Y} - \mathrm{B}) = \mathrm{B},$$
$$\mathfrak{Z} - Z = \mathfrak{Z} - (\mathfrak{Z} - \mathrm{C}) = \mathrm{C}$$

ist:

$$\Pi^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - (\mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\cos\psi + \mathrm{C}\cos\chi)^2,$$

also nach 3):

$$\Pi^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - \frac{(\mathrm{A}L + \mathrm{B}M + \mathrm{C}N)^2}{L^2 + M^2 + N^2},$$

und folglich nach 12):

$$\Pi^2 = \frac{\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + \mathrm{C}'^2}{(L^2 + M^2 + N^2)^2} - \frac{(\mathrm{A}'L + \mathrm{B}'M + \mathrm{C}'N)^2}{(L^2 + M^2 + N^2)^3},$$

also:

17)

$$\Pi^2 = \frac{(\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + \mathrm{C}'^2)(L^2 + M^2 + N^2) - (\mathrm{A}'L + \mathrm{B}'M + \mathrm{C}'N)^2}{(L^2 + M^2 + N^2)^3},$$

oder nach einer bekannten Verwandlung:

18)

$$\Pi = \frac{\sqrt{(\mathrm{A}'M - \mathrm{B}'L)^2 + (\mathrm{B}'N - \mathrm{C}'M)^2 + (\mathrm{C}'L - \mathrm{A}'N)^2}}{(L^2 + M^2 + N^2)\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Nach 10) ist:

$$\begin{aligned}
&L\mathrm{A}' + M\mathrm{B}' + N\mathrm{C}' \\
&= L(L\Sigma Px\cos\alpha + M\Sigma Py\cos\alpha + N\Sigma Pz\cos\alpha) \\
&+ M(L\Sigma Px\cos\beta + M\Sigma Py\cos\beta + N\Sigma Pz\cos\beta) \\
&+ N(L\Sigma Px\cos\gamma + M\Sigma Py\cos\gamma + N\Sigma Pz\cos\gamma) \\
&= L(L\Sigma Px\cos\alpha + M\Sigma Px\cos\beta + N\Sigma Px\cos\gamma) \\
&+ M(L\Sigma Py\cos\alpha + M\Sigma Py\cos\beta + N\Sigma Py\cos\gamma) \\
&+ N(L\Sigma Pz\cos\alpha + M\Sigma Pz\cos\beta + N\Sigma Pz\cos\gamma),
\end{aligned}$$

also nach 9):

19) . . . . $L\mathrm{A}' + M\mathrm{B}' + N\mathrm{C}' = L\mathfrak{X}' + M\mathfrak{Y}' + N\mathfrak{Z}'$,

und daher nach 17):

20)

$$\Pi = \frac{\sqrt{(\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + \mathrm{C}'^2)(L^2 + M^2 + N^2) - (L\mathfrak{X}' + M\mathfrak{Y}' + N\mathfrak{Z}')^2}}{(L^2 + M^2 + N^2)\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Wenn man den Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ als Anfang eines neuen, dem

primitiven Coordinatensysteme parallelen Coordinatensystems annimmt, und die Coordinaten des in der Richtungslinie der Resultirenden liegenden Punktes (XYZ) in diesem neuen Systeme durch X', Y', Z' bezeichnet; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$X=\mathfrak{X}+X',\quad Y=\mathfrak{Y}+Y',\quad Z=\mathfrak{Z}+Z';$$

also, weil nach 14):

$$X=\mathfrak{X}-\mathrm{A},\quad Y=\mathfrak{Y}-\mathrm{B},\quad Z=\mathfrak{Z}-\mathrm{C}$$

ist:

$$21)\ \ldots\ X'=-\mathrm{A},\quad Y'=-\mathrm{B},\quad Z'=-\mathrm{C}.$$

Daher sind $-\mathrm{A}$, $-\mathrm{B}$, $-\mathrm{C}$ die Coordinaten eines in der Richtungslinie der Resultirenden liegenden Punktes in Bezug auf ein durch den Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ gelegtes, dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem.

Wenn man der Kürze wegen:

$$22)\ \ldots\ \Omega_k=L\cos\alpha_k+M\cos\beta_k+N\cos\gamma_k$$

setzt, so ist nach 9), wie man sogleich übersieht:

$$23)\quad \begin{aligned}\mathfrak{X}'&=P_0\Omega_0x_0+P_1\Omega_1x_1+P_2\Omega_2x_2+P_3\Omega_3x_3+\ldots,\\ \mathfrak{Y}'&=P_0\Omega_0y_0+P_1\Omega_1y_1+P_2\Omega_2y_2+P_3\Omega_3y_3+\ldots,\\ \mathfrak{Z}'&=P_0\Omega_0z_0+P_1\Omega_1z_1+P_2\Omega_2z_2+P_3\Omega_3z_3+\ldots;\end{aligned}$$

also:

$$24)\ \ldots\ \mathfrak{X}'^2+\mathfrak{Y}'^2+\mathfrak{Z}'^2$$

$$\begin{aligned}=P_0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\Omega_0^2+P_1^2(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\Omega_1^2+P_2^2(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\Omega_2^2+\ldots\\ +2P_0P_1(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)\Omega_0\Omega_1\\ +2P_0P_2(x_0x_2+y_0y_2+z_0z_2)\Omega_0\Omega_2\\ +2P_0P_3(x_0x_3+y_0y_3+z_0z_3)\Omega_0\Omega_3\\ \text{u. s. w.}\\ +2P_1P_2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\Omega_1\Omega_2\\ +2P_1P_3(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)\Omega_1\Omega_3\\ \text{u. s. w.}\\ +2P_2P_3(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)\Omega_2\Omega_3\\ \text{u. s. w.,}\\ \text{u. s. w.,}\end{aligned}$$

wo

Digitized by Google

$$\Omega_k = (P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + ...)\cos\alpha_k$$
$$+ (P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + ...)\cos\beta_k$$
$$+ (P_0\cos\gamma_0 + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + ...)\cos\gamma_k,$$

also:

25)

$$\Omega_k = P_0\cos(P_0P_k) + P_1\cos(P_1P_k) + P_2\cos(P_2P_k) + P_3\cos(P_3P_k) + ..$$

ist, und nicht übersehen werden darf, dass in dieser Reihe natürlich auch das Glied $P_k\cos(P_kP_k)$ vorkommt; übrigens kann man auch schreiben:

26)

$$\Omega_k = P_k + P_0\cos(P_0P_k) + P_1\cos(P_1P_k) + ... + P_{k-1}\cos(P_{k-1}P_k)$$
$$+ P_{k+1}\cos(P_{k+1}P_k) + P_{k+2}\cos(P_{k+2}P_k) + ...,$$

oder:

27)

$$\Omega_k = P_k + P_0\cos(P_0P_k) + P_1\cos(P_1P_k) + ... + P_{k-1}\cos(P_{k-1}P_k)$$
$$+ P_{k+1}\cos(P_kP_{k+1}) + P_{k+2}\cos(P_kP_{k+2}) + ...,$$

was aber nicht so einfach wie die erstere Schreibweise in 25) ist.

Aus 10) erhält man ferner sehr leicht:

28) . . . . $A'^2 + B'^2 + C'^2$

$$= L^2\left\{\begin{array}{l} P_0^2x_0^2 + P_1^2x_1^2 + P_2^2x_2^2 + P_3^2x_3^2 + ... \\ +2P_0P_1x_0x_1\cos(P_0P_1) + 2P_0P_2x_0x_2\cos(P_0P_2) + ... \\ +2P_1P_2x_1x_2\cos(P_1P_2) + ... \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}$$

$$+ M^2\left\{\begin{array}{l} P_0^2y_0^2 + P_1^2y_1^2 + P_2^2y_2^2 + P_3^2y_3^2 + ... \\ +2P_0P_1y_0y_1\cos(P_0P_1) + 2P_0P_2y_0y_2\cos(P_0P_2) + ... \\ +2P_1P_2y_1y_2\cos(P_1P_2) + ... \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}$$

$$+ N^2\left\{\begin{array}{l} P_0^2z_0^2 + P_1^2z_1^2 + P_2^2z_2^2 + P_3^2z_3^2 + ... \\ +2P_0P_1z_0z_1\cos(P_0P_1) + 2P_0P_2z_0z_2\cos(P_0P_2) + ... \\ +2P_1P_2z_1z_2\cos(P_1P_2) + ... \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}+2LM\{P_0^2x_0y_0+P_1^2x_1y_1+P_2^2x_2y_2+P_3^2x_3y_3+\ldots\\ \quad +P_0P_1(x_0y_1+y_0x_1)\cos(P_0P_1)+P_0P_2(x_0y_2+y_0x_2)\cos(P_0P_2)+\ldots\\ \qquad\qquad +P_1P_2(x_1y_2+y_1x_2)\cos(P_1P_2)+\ldots\\ \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}+2MN\{P_0^2y_0z_0+P_1^2y_1z_1+P_2^2y_2z_2+P_3^2y_3z_3+\ldots\\ \quad +P_0P_1(y_0z_1+z_0y_1)\cos(P_0P_1)+P_0P_2(y_0z_2+z_0y_2)\cos(P_0P_2)+\ldots\\ \qquad\qquad +P_1P_2(y_1z_2+z_1y_2)\cos(P_1P_2)+\ldots\\ \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}+2NL\{P_0^2z_0x_0+P_1^2z_1x_1+P_2^2z_2x_2+P_3^2z_3x_3+\ldots\\ \quad +P_0P_1(z_0x_1+x_0z_1)\cos(P_0P_1)+P_0P_2(z_0x_2+x_0z_2)\cos(P_0P_2)+\ldots\\ \qquad\qquad +P_1P_2(z_1x_2+x_1z_2)\cos(P_1P_2)+\ldots\\ \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}\end{array}\right\}$$

Wenn die Kräfte sämmtlich unter einander parallel sind, so kann man

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha,$$
$$\beta_0=\beta_1=\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta,$$
$$\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\ldots=\gamma$$

setzen, und es ist also in diesem Falle:

$$L=\cos\alpha\Sigma P,\quad M=\cos\beta\Sigma P,\quad N=\cos\gamma\Sigma P;$$
$$\mathrm{A}'=\cos\alpha\cos\alpha\Sigma P.\Sigma Px+\cos\alpha\cos\beta\Sigma P.\Sigma Py+\cos\alpha\cos\gamma\Sigma P.\Sigma Pz,$$
$$\mathrm{B}'=\cos\beta\cos\alpha\Sigma P.\Sigma Px+\cos\beta\cos\beta\Sigma P.\Sigma Py+\cos\beta\cos\gamma\Sigma P.\Sigma Pz,$$
$$\mathrm{C}'=\cos\gamma\cos\alpha\Sigma P.\Sigma Px+\cos\gamma\cos\beta\Sigma P.\Sigma Py+\cos\gamma\cos\gamma\Sigma P.\Sigma Pz;$$

folglich, wie man sogleich übersieht:

$$\mathrm{A}'M-\mathrm{B}'L=0,\quad \mathrm{B}'N-\mathrm{C}'M=0,\quad \mathrm{C}'L-\mathrm{A}'N=0;$$

daher nach 18) in diesem Falle $\Pi=0$, woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle der Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ in der Richtungslinie der Resultirenden liegt, und zwar ganz unabhängig von besonderen Werthen der Winkel α, β, γ.

Nach 9) ist in diesem Falle:

$$\mathfrak{X}'=(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\Sigma P.\Sigma Px=\Sigma P.\Sigma Px,$$
$$\mathfrak{Y}'=(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\Sigma P.\Sigma Py=\Sigma P.\Sigma Py,$$
$$\mathfrak{Z}'=(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\Sigma P.\Sigma Pz=\Sigma P.\Sigma Pz;$$

und weil nun ausserdem

$$L^2+M^2+N^2=(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)(\Sigma P)^2=(\Sigma P)^2$$

ist, so ist nach 11):

Digitized by Google

$$29) \ldots \quad \mathfrak{x}=\frac{\Sigma Px}{\Sigma P},\quad \mathfrak{y}=\frac{\Sigma Py}{\Sigma P},\quad \mathfrak{z}=\frac{\Sigma Pz}{\Sigma P};$$

woraus sich ergiebt, dass in dem vorliegenden Falle der Punkt ($\mathfrak{xyz}$) der unter dem Namen des Mittelpunkts oder Centrums der parallelen Kräfte bekannte Punkt ist.

Diese Betrachtungen noch weiter auszuführen, liegt jetzt nicht in unserer Absicht.

XVIII.

Ueber einige Formeln zur annähernden Berechnung der körperlichen Räume, mit besonderer Rücksicht auf die Aichung der Schiffe.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

In dem trefflichen und berühmten Werke: Traité du Navire. Paris. 1746. 4⁰. Livre II. Section I. Chap. VI. p. 240. hat Bouguer bei der Berechnung des Körperraums des Schiffs oder der Schiffs-Aiche das Schiff als ein Ellipsoid oder vielmehr überhaupt als einen Körper betrachtet, bei welchem die Flächenräume der auf einer gewissen Axe senkrecht stehenden Queerschnitte, wenn x im Allgemeinen die Entfernung eines beliebigen Queerschnitts von einem gewissen Anfangspunkte in der Axe bezeichnet, durch einen Ausdruck von der allgemeinen Form $A_0+A_1x^2$ dargestellt werden. Die von Bouguer ohne eigentlichen Beweis gegebene Formel wollen wir jetzt zunächst in der Kürze entwickeln.

Die beiden den zu berechnenden Körper, dessen Inhalt V sein mag, begränzenden Queerschnitte seien F_0 und F_1, und ihre Entfernungen von dem Anfangspunkte seien f_0 und f_1, indem wir zugleich f_0 kleiner als f_1 annehmen. Weil nun der Flächeninhalt eines Queerschnitts nach der Voraussetzung überhaupt $A_0+A_1x^2$ ist, so ist

$$1) \ldots\ldots \quad V=\int_{f_0}^{f_1}(A_0+A_1x^2)\partial x,$$

Digitized by Google

also, wie man sogleich übersieht:

2) . . . . . . $V = A_0(f_1-f_0)+\frac{1}{3}A_1(f_1^3-f_0^3)$,

wo es nun auf die Kenntniss der Coefficienten A_0 und A_1 ankommt, welche man sich in der Praxis nur durch die Messung zweier Queerschnitte, etwa der beiden den zu messenden Körper begränzenden Queerschnitte F_0 und F_1, verschaffen kann. Da wir nämlich nach der Voraussetzung die beiden Gleichungen:

$$A_0+A_1f_0^2=F_0,\quad A_0+A_1f_1^2=F_1$$

haben, so erhalten wir leicht:

$$A_0=\frac{F_0f_1^2-F_1f_0^2}{f_1^2-f_0^2},\quad A_1=\frac{F_1-F_0}{f_1^2-f_0^2}$$

und folglich nach 2):

$$3) \ldots V=\frac{F_0f_1^2-F_1f_0^2}{f_1^2-f_0^2}(f_1-f_0)+\frac{1}{3}\cdot\frac{F_1-F_0}{f_1^2-f_0^2}(f_1^3-f_0^3),$$

oder, wenn man mit f_1-f_0 dividirt:

$$4)\ldots\ V=\frac{3(F_0f_1^2-F_1f_0^2)-(F_0-F_1)(f_0^2+f_0f_1+f_1^2)}{3(f_0+f_1)},$$

und folglich nach leichter Rechnung:

$$5)\ldots\ V=\frac{F_1(f_1^2+f_0f_1-2f_0^2)-F_0(f_0^2+f_0f_1-2f_1^2)}{3(f_0+f_1)}$$

oder:

$$6)\ldots\ V=\frac{F_0(2f_1^2-f_0f_1-f_0^2)+F_1(f_1^2+f_0f_1-2f_0^2)}{3(f_0+f_1)},$$

welches die von Bouguer a. a. O. p. 247. gegebene Formel ist, wenn man für die hier gebrauchten Zeichen F_0, F_1; f_0, f_1 respective die von Bouguer gebrauchten Symbole A, B; e, f setzt.

Bouguer sagt p. 248. von seiner Formel: „Je trouvai dans la Gabare la Mariane, que l'etenduë A de la coupe supérieure etoit de 265 pieds 22 pouces quarrés, que celle de la coupe inférieure B étoit de 229 pieds 95 pouces quarrés, et que les quantités e et f étoient de 1 pied 6 pouces et de 3 pieds 4 pouces. En appliquant la formule à ces quantités, il me vint 457 pieds 1196 pouces cubiques; ce qui ne différe presque pas de la vraye solidité 457 pieds 1725 pouces cubiques que j'obtins, en partageant en 60 prismes la partie de la carène qui faisoit la différence des deux enfoncemens." was allerdings eine sehr grosse, von der Formel gewährte Genauigkeit ist.

Digitized by Google

Für $f_0 = 0$ werden die Formeln 5) oder 6):

$$7) \quad V = \tfrac{1}{3}(2F_0 + F_1)f_1,$$

welche sehr einfach ist.

Dass das Ellipsoid in die Klasse der vorher betrachteten Körper gehört, ist leicht zu zeigen. Die Gleichung des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids ist nämlich:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1;$$

und nehmen wir nun die Queerschnitte senkrecht auf der Axe der z, ihre Entfernungen auf dieser Axe vom Mittelpunkte des Ellipsoids an, so ist, weil

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{c^2 - z^2}{c^2},$$

also:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{c^2 - z^2}}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{c^2 - z^2}}{c}\right)^2} = 1$$

ist, dies die Gleichung eines Queerschnitts, dessen Entfernung vom Mittelpunkte des Ellipsoids z ist. Dieser Queerschnitt ist folglich eine Ellipse mit den Halbaxen

$$\frac{a\sqrt{c^2 - z^2}}{c}, \quad \frac{b\sqrt{c^2 - z^2}}{c}$$

und sein Inhalt ist also:

$$\frac{ab(c^2 - z^2)}{c^2}\pi = ab\pi - \frac{ab\pi}{c^2}z^2,$$

woraus das Behauptete folgt, weil man ja im Obigen

$$A_0 = ab\pi, \quad A_1 = -\frac{ab\pi}{c^2}$$

und z für x setzen kann.

§. 2.

Die Formel von **Bouguer** hat nach meiner Meinung den Fehler, dass man die Abstände f_0, f_1 der Queerschnitte F_0, F_1 vom Anfangspunkte, und also diesen Anfangspunkt selbst kennen oder nach willkürlichen Voraussetzungen annehmen muss, wenn

Digitized by Google

man die Abstände f_0, f_1 messen will. Den Anfangspunkt wird man aber in der Praxis eigentlich niemals kennen, und wird daher immer zu gewiss oft sehr willkührlichen Voraussetzungen seine Zuflucht nehmen müssen, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Formel

$$F = A_0 + A_1 x^2$$

diese dem Obigen zu Grunde liegende Form keineswegs behält, wenn man den Anfangspunkt ändert, weil ja, wenn man für x etwa überhaupt $a + x$ setzt,

$$F = A_0 + A_1(a+x)^2 = A_0 + A_1 a^2 + 2A_1 ax + A_1 x^2$$

wird, also die Form

$$F = A + A'x + A''x^2$$

annimmt, wo nun das zweite Glied noch hinzugetreten ist.

Diesem Uebelstande kann man nur dadurch abhelfen, dass man ausser den in den Entfernungen f_0, f_1 gemessenen Queerschnitten F_0, F_1 noch einen dritten Queerschnitt F_2 in der Entfernung f_2 misst, weil man dann die Entfernungen f_0, f_1, f_2 nicht selbst, sondern nur deren Differenzen zu kennen, oder nur die Abstände der drei Queerschnitte von und unter einander zu messen braucht, was natürlich immer mit der grössten Genauigkeit geschehen kann und nie der geringsten Schwierigkeit unterliegt. Wenn auch dadurch Messung und Rechnung weitläufiger werden, so wird doch auf diesem Wege gewiss eine grössere Genauigkeit erreicht, und ich will daher mit Rücksicht hierauf jetzt eine Formel für den Inhalt V des zu berechnenden Körpers entwickeln.

Zu dem Ende haben wir unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen:

$$1) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} F_0 = A_0 + A_1 f_0^2, \\ F_1 = A_0 + A_1 f_1^2, \\ F_2 = A_0 + A_1 f_2^2 \end{cases}$$

und setzen der Kürze wegen:

$$2) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} f_0 - f_1 = i_2, \\ f_1 - f_2 = i_0, \\ f_2 - f_0 = i_1; \end{cases}$$

wo i_0, i_1, i_2 als bekannte Grössen zu betrachten sind, und die Gleichung:

3) . . . . $i_0 + i_1 + i_2 = 0$

Statt findet.

Wir bemerken zuerst, dass sich die Gleichung 5) oder 6) in §. 1. auch auf folgende Art ausdrücken lässt:

$$V = \frac{F_0\{f_1^2 - f_0^2 + f_1(f_1 - f_0)\} + F_1\{f_1^2 - f_0^2 + f_0(f_1 - f_0)\}}{3(f_1 + f_0)},$$

also offenbar auf folgende Art:

4) . . . $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{f_1 - f_0}{f_1 + f_0}\{F_0(f_0 + 2f_1) + F_1(f_1 + 2f_0)\}.$

Aus den Gleichungen 1) erhält man durch Elimination von A_0, A_1, wenn man nämlich diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$f_1^2 - f_2^2,\quad f_2^2 - f_0^2,\quad f_0^2 - f_1^2$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt:

$$F_0(f_1^2 - f_2^2) + F_1(f_2^2 - f_0^2) + F_2(f_0^2 - f_1^2) = 0,$$

also:

$$\left.\begin{array}{r} F_0(f_1 - f_2)(f_1 + f_2) \\ + F_1(f_2 - f_0)(f_2 + f_0) \\ + F_2(f_0 - f_1)(f_0 + f_1) \end{array}\right\} = 0,$$

und folglich nach 2):

5) . . . $F_0 i_0(f_1 + f_2) + F_1 i_1(f_2 + f_0) + F_2 i_2(f_0 + f_1) = 0,$

oder:

6)..... $(F_1 i_1 + F_2 i_2)f_0 + (F_2 i_2 + F_0 i_0)f_1 + (F_0 i_0 + F_1 i_1)f_2 = 0,$

oder:

7)

$$(F_0 i_0 + F_1 i_1 + F_2 i_2)(f_0 + f_1 + f_2) - (F_0 i_0 f_0 + F_1 i_1 f_1 + F_2 i_2 f_2) = 0.$$

Aus der Gleichung 6) und den Gleichungen 2) erhält man die Gleichungen:

$$(F_1 i_1 + F_2 i_2)f_0 + (F_2 i_2 + F_0 i_0)(f_0 - i_2) + (F_0 i_0 + F_1 i_1)(f_0 + i_1) = 0,$$

$$(F_1 i_1 + F_2 i_2)(f_1 + i_2) + (F_2 i_2 + F_0 i_0)f_1 + (F_0 i_0 + F_1 i_1)(f_1 - i_0) = 0,$$

$$(F_1 i_1 + F_2 i_2)(f_2 - i_1) + (F_2 i_2 + F_0 i_0)(f_2 + i_0) + (F_0 i_0 + F_1 i_1)f_2 = 0;$$

aus denen sich leicht:

Digitized by Google

$$2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)f_0=-(F_0i_0+F_1i_1)i_1+(F_2i_2+F_0i_0)i_2,$$
$$2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)f_1=-(F_1i_1+F_2i_2)i_2+(F_0i_0+F_1i_1)i_0,$$
$$2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)f_2=-(F_2i_2+F_0i_0)i_0+(F_1i_1+F_2i_2)i_1;$$

also, wenn man wegen der Gleichung 3) in diesen drei Gleichungen nach der Reihe

$$i_0=-i_1-i_2,\quad i_1=-i_2-i_0,\quad i_2=-i_0-i_1$$

setzt:

$$2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)f_0=(F_0-F_1)i_1^2+(F_2-F_0)i_2^2,$$
$$2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)f_1=(F_1-F_2)i_2^2+(F_0-F_1)i_0^2,$$
$$2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)f_2=(F_2-F_0)i_0^2+(F_1-F_2)i_1^2;$$

folglich:

$$8)\ldots\left\{\begin{aligned}f_0&=\frac{(F_0-F_1)i_1^2+(F_2-F_0)i_2^2}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)},\\ f_1&=\frac{(F_1-F_2)i_2^2+(F_0-F_1)i_0^2}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)},\\ f_2&=\frac{(F_2-F_0)i_0^2+(F_1-F_2)i_1^2}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)};\end{aligned}\right.$$

und hieraus:

$$9)\ldots\left\{\begin{aligned}f_0+f_1&=\frac{(F_0-F_1)(i_0^2+i_1^2-i_2^2)}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)},\\ f_1+f_2&=\frac{(F_1-F_2)(-i_0^2+i_1^2+i_2^2)}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)},\\ f_2+f_0&=\frac{(F_2-F_0)(i_0^2-i_1^2+i_2^2)}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)}\end{aligned}\right.$$

ergiebt.

Nach 2) und 9) ist:

$$10)\ldots\frac{f_1-f_0}{f_1+f_0}=-2i_2\cdot\frac{F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2}{(F_0-F_1)(i_0^2+i_1^2-i_2^2)}.$$

Ferner ist nach 8) und 9):

$$11)\ldots\left\{\begin{aligned}f_0+2f_1&=\frac{(F_0-F_1)(2i_0^2+i_1^2-i_2^2)+(F_1-F_2)i_2^2}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)},\\ f_1+2f_0&=\frac{(F_0-F_1)(i_0^2+2i_1^2-i_2^2)+(F_2-F_0)i_2^2}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)};\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

und folglich, wie man leicht findet:

$$12) \ldots\ldots\ldots F_0(f_0+2f_1)+F_1(f_1+2f_0)$$

$$=\frac{(F_0-F_1)\{F_0(2i_0^2+i_1^2-i_2^2)+F_1(i_0^2+2i_1^2-i_2^2)-F_2i_2^2\}}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)},$$

oder:

$$13) \ldots\ldots\ldots F_0(f_0+2f_1)+F_1(f_1+2f_0)$$

$$=\frac{(F_0-F_1)\{(2F_0+F_1)i_0^2+(F_0+2F_1)i_1^2-(F_0+F_1+F_2)i_2^2\}}{2(F_0i_0+F_1i_1+F_2i_2)}.$$

Nach 4), 10), 13) ist also:

14)

$$V=-\frac{i_2}{3}\cdot\frac{(2F_0+F_1)i_0^2+(F_0+2F_1)i_1^2-(F_0+F_1+F_2)i_2^2}{i_0^2+i_1^2-i_2^2}.$$

Nun ist aber nach 3):

$$i_0^2+i_1^2-i_2^2=i_0^2+i_1^2-(i_0+i_1)^2=-2i_0i_1$$

und

$$(2F_0+F_1)i_0^2+(F_0+2F_1)i_1^2-(F_0+F_1+F_2)i_2^2$$
$$=(2F_0+F_1)i_0^2+(F_0+2F_1)i_1^2-(F_0+F_1+F_2)(i_0+i_1)^2$$
$$=(F_0-F_2)i_0^2-2(F_0+F_1+F_2)i_0i_1+(F_1-F_2)i_1^2,$$

also:

15)

$$V=-\frac{i_0+i_1}{3}\cdot\frac{(F_0-F_2)i_0^2-2(F_0+F_1+F_2)i_0i_1+(F_1-F_2)i_1^2}{2i_0i_1},$$

oder:

16)

$$V=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{i_0}+\frac{1}{i_1}\right)\{(F_0-F_2)i_0^2-2(F_0+F_1+F_2)i_0i_1+(F_1-F_2)i_1^2\},$$

oder auch:

17)

$$V=(i_0+i_1)\left\{\frac{F_0+F_1+F_2}{3}-\frac{1}{6}\left[\frac{i_0}{i_1}(F_0-F_2)+\frac{i_1}{i_0}(F_1-F_2)\right]\right\}.$$

Wir wollen jetzt den Queerschnitt F_2 zwischen den beiden Queerschnitten F_0 und F_1 annehmen; so ist, weil nach der Voraussetzung

Digitized by Google

$$f_0 < f_1$$

ist, auch

$$f_0 < f_2, \quad f_2 < f_1;$$

und bezeichnen wir nun die positiv oder absolut genommenen Abstände des mittleren Queerschnitts F_2 von den beiden äusseren F_0 und F_1 respective durch J_0 und J_1, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$f_2 - f_0 = J_0, \quad f_1 - f_2 = J_1;$$

also nach 2):

$$i_0 = J_1, \quad i_1 = J_0$$

und folglich nach 17):

18)

$$V = (J_0 + J_1)\left\{\frac{F_0 + F_1 + F_2}{3} - \frac{1}{6}\left[\frac{J_0}{J_1}(F_1 - F_2) + \frac{J_1}{J_0}(F_0 - F_2)\right]\right\},$$

eine Formel, welche ganz ungeändert bleibt, wenn man F_0, F_1, und demzufolge auch J_0, J_1 mit einander verwechselt, so dass es also bei dieser Formel nicht mehr nothwendig ist anzunehmen, dass von den beiden Queerschnitten F_0, F_1 der erstere der kleineren Entfernung vom Anfangspunkte entspreche, weshalb sich also die obige Formel unter den vorher gemachten Voraussetzungen ganz allgemein anwenden lässt.

Für $J_0 = J_1$, wenn nämlich der mittlere Queerschnitt genau in der Mitte zwischen den beiden äusseren angenommen wird, geht die Formel 18), wenn man zugleich die Entfernung der beiden äusseren Queerschnitte von einander durch J bezeichnet, also $J_0 + J_1 = J$ setzt, in die allgemein bekannte Formel:

19) . . . . $$V = \frac{J}{6}(F_0 + 4F_2 + F_1)$$

über.

Diese Formel ist allerdings viel einfacher als die von mir entwickelte allgemeinere Formel 18), von der die erstere ein besonderer Fall ist. Da es aber in der Praxis nicht immer möglich und bequem sein wird, gerade den mittleren Queerschnitt zu messen, so halte ich die allgemeinere Formel für praktisch wichtig, bemerke aber, dass man sich immer dem mittleren Queerschnitt möglichst zu nähern suchen muss, weil dies bei bloss annähernd richtigen Bestimmungen jedenfalls der Genauigkeit des Resultats förderlich sein wird.

§. 3.

Wir wollen jetzt überhaupt

$$F_x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n$$

setzen, wo also F_x eine beliebige ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x bezeichnet, der man verschiedene Bedeutungen, wie Sehne einer Curve, Fläche des Queerschnitts eines Körpers u. s. w. beilegen kann, und wollen uns nun im Allgemeinen mit der Ermittelung des bestimmten Integrals

$$V = \int_{-i}^{+i} F_x \partial x$$

beschäftigen, wo also V den Inhalt einer Figur, den Inhalt eines Körpers u. s. w. bezeichnen kann.

Man erhält natürlich mittelst der einfachsten Regeln der Integralrechnung sogleich das allgemeine Integral:

$$\int F_x \partial x = A_0x + \tfrac{1}{2}A_1x^2 + \tfrac{1}{3}A_2x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_nx^{n+1} + C,$$

und hieraus:

I. Wenn n eine gerade Zahl ist:

$$V = 2(A_0i + \tfrac{1}{3}A_2i^3 + \tfrac{1}{5}A_4i^5 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_ni^{n+1}).$$

II. Wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$V = 2(A_0i + \tfrac{1}{3}A_2i^3 + \tfrac{1}{5}A_4i^5 + \ldots + \frac{1}{n}A_{n-1}i^n).$$

Allerdings ist auf diese Weise V gefunden, insofern die Coefficienten

$$A_0,\ A_2,\ A_4,\ \ldots \begin{cases} A_n \\ A_{n-1} \end{cases}$$

bekannt sind, was aber in Fällen der Praxis sich fast nie wird voraussetzen lassen, so dass es also in solchen Fällen jederzeit darauf ankommen wird, diese Coefficienten aus gemessenen Werthen von F_x zu ermitteln, und durch diese Werthe von F_x das gesuchte Integral auszudrücken, welches bei diesem Gegenstande jederzeit die Hauptaufgabe ist, die wir nun in einigen Fällen, so weit es für die Bedürfnisse der praktischen Anwendung höchstens erforderlich sein dürfte, zu erledigen suchen wollen.

Digitized by Google

Für $n=0$ und $n=1$ ist nach I. und II.:

$$V=2A_0 i,$$

und folglich, weil

$$F_0=A_0$$

ist:

$$V=2iF_0.$$

Für $n=2$ und $n=3$ ist nach I. und II.:

$$V=2(A_0 i+\tfrac{1}{3}A_2 i^3),$$

oder:

$$V=2i(A_0+\tfrac{1}{3}A_2 i^2).$$

Für $n=2$ ist aber:

$$F_{-i}=A_0-A_1 i+A_2 i^2,$$
$$F_0=A_0,$$
$$F_{+i}=A_0+A_1 i+A_2 i^2;$$

und für $n=3$ ist:

$$F_{-i}=A_0-A_1 i+A_2 i^2-A_3 i^3,$$
$$F_0=A_0,$$
$$F_{+i}=A_0+A_1 i+A_2 i^2+A_3 i^3;$$

also für $n=2$ und $n=3$:

$$F_0=A_0,$$
$$F_{-i}+F_{+i}=2(A_0+A_2 i^2);$$

folglich:

$$A_2 i^2=\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2},$$

und daher nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$V=\frac{2i}{6}(F_{-i}+4F_0+F_{+i}),$$

oder:

$$V=\frac{i}{3}(F_{-i}+4F_0+F_{+i}).$$

Für $n=4$ und $n=5$ ist nach I. und II.:

$$V=2i(A_0+\tfrac{1}{3}A_2 i^2+\tfrac{1}{5}A_4 i^4).$$

Für $n=4$ ist aber:

$$F_{-i}=A_0-A_1i+A_2i^2-A_3i^3+A_4i^4,$$
$$F_{-\frac{1}{2}i}=A_0-\tfrac{1}{2}A_1i+\tfrac{1}{4}A_2i^2-\tfrac{1}{8}A_3i^3+\tfrac{1}{16}A_4i^4,$$
$$F_0=A_0,$$
$$F_{+\frac{1}{2}i}=A_0+\tfrac{1}{2}A_1i+\tfrac{1}{4}A_2i^2+\tfrac{1}{8}A_3i^3+\tfrac{1}{16}A_4i^4,$$
$$F_{+i}=A_0+A_1i+A_2i^2+A_3i^3+A_4i^4;$$

und für $n=5$ ist:

$$F_{-i}=A_0-A_1i+A_2i^2-A_3i^3+A_4i^4-A_5i^5,$$
$$F_{-\frac{1}{2}i}=A_0-\tfrac{1}{2}A_1i+\tfrac{1}{4}A_2i^2-\tfrac{1}{8}A_3i^3+\tfrac{1}{16}A_4i^4-\tfrac{1}{32}A_5i^5,$$
$$F_0=A_0,$$
$$F_{+\frac{1}{2}i}=A_0+\tfrac{1}{2}A_1i+\tfrac{1}{4}A_2i^2+\tfrac{1}{8}A_3i^3+\tfrac{1}{16}A_4i^4+\tfrac{1}{32}A_5i^5,$$
$$F_{+i}=A_0+A_1i+A_2i^2+A_3i^3+A_4i^4+A_5i^5;$$

also für $n=4$ und $n=5$:

$$F_0=A_0,$$
$$F_{-i}+F_{+i}=2(A_0+A_2i^2+A_4i^4),$$
$$F_{-\frac{1}{2}i}+F_{+\frac{1}{2}i}=2(A_0+\tfrac{1}{4}A_2i^2+\tfrac{1}{16}A_4i^4);$$

also:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}=A_2i^2+A_4i^4,$$
$$\frac{F_{-\frac{1}{2}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{2}i}}{2}=\tfrac{1}{4}A_2i^2+\tfrac{1}{16}A_4i^4;$$

oder:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}=3.\tfrac{1}{3}A_2i^2+5.\tfrac{1}{5}A_4i^4,$$
$$\frac{F_{-\frac{1}{2}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{2}i}}{2}=\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{5}{16}.\tfrac{1}{5}A_4i^4.$$

Man bestimme nun x so, dass

$$3+\tfrac{3}{4}x=5+\tfrac{5}{16}x$$

ist, so erhält man:

$$x=\tfrac{32}{7},$$

und folglich:

$$3+\tfrac{3}{4}x=5+\tfrac{5}{16}x=\tfrac{45}{7}.$$

Aus den obigen Gleichungen erhält man:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}+\frac{F_{-\frac{1}{2}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{2}i}}{2}x$$
$$=(3+\tfrac{3}{4}x).\tfrac{1}{3}A_2i^2+(5+\tfrac{5}{16}x).\tfrac{1}{5}A_4i^4,$$

Digitized by Google

also:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}+\tfrac{32}{7}\cdot\frac{F_{-\frac{1}{2}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{2}i}}{2}=\tfrac{45}{7}(\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4),$$

folglich:

$$\tfrac{45}{7}F_0+\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}+\tfrac{32}{7}\cdot\frac{F_{-\frac{1}{2}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{2}i}}{2}$$

$$=\tfrac{45}{7}(A_0+\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4)=\tfrac{45}{7}\cdot\frac{V}{2i},$$

woraus also V leicht gefunden werden kann. Man erhält nämlich ohne alle Schwierigkeit:

$$V=\frac{2i}{90}(7F_{-i}+32F_{-\frac{1}{2}i}+12F_0+32F_{+\frac{1}{2}i}+7F_{+}\ )$$

oder:

$$V=\frac{i}{45}(7F_{-i}+32F_{-\frac{1}{2}i}+12F_0+32F_{+\frac{1}{2}i}+7F_{+i}).$$

Für $n=6$ und $n=7$ ist nach I. und II.:

$$V=2i(A_0+\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{1}{7}A_6i^6).$$

Für $n=6$ ist aber:

$$F_{-i}=A_0-A_1i+A_2i^2-A_3i^3+A_4i^4-A_5i^5+A_6i^6,$$
$$F_{-\frac{2}{3}i}=A_0-\tfrac{2}{3}A_1i+\tfrac{4}{9}A_2i^2-\tfrac{8}{27}A_3i^3+\tfrac{16}{81}A_4i^4-\tfrac{32}{243}A_5i^5+\tfrac{64}{729}A_6i^6,$$
$$F_{-\frac{1}{3}i}=A_0-\tfrac{1}{3}A_1i+\tfrac{1}{9}A_2i^2-\tfrac{1}{27}A_3i^3+\tfrac{1}{81}A_4i^4-\tfrac{1}{243}A_5i^5+\tfrac{1}{729}A_6i^6,$$
$$F_0=A_0,$$
$$F_{+\frac{1}{3}i}=A_0+\tfrac{1}{3}A_1i+\tfrac{1}{9}A_2i^2+\tfrac{1}{27}A_3i^3+\tfrac{1}{81}A_4i^4+\tfrac{1}{243}A_5i^5+\tfrac{1}{729}A_6i^6,$$
$$F_{+\frac{2}{3}i}=A_0+\tfrac{2}{3}A_1i+\tfrac{4}{9}A_2i^2+\tfrac{8}{27}A_3i^3+\tfrac{16}{81}A_4i^4+\tfrac{32}{243}A_5i^5+\tfrac{64}{729}A_6i^6,$$
$$F_{+i}=A_0+A_1i+A_2i^2+A_3i^3+A_4i^4+A_5i^5+A_6i^6.$$

Für $n=7$ sind den drei ersten und den drei letzten Formeln am Ende noch die Glieder:

$$-A_7i^7,\ -\tfrac{128}{2187}A_7i^7,\ -\tfrac{1}{2187}A_7i^7;\quad +\tfrac{1}{2187}A_7i^7,\ +\tfrac{128}{2187}A_7i^7,\ +A_7i^7$$

beizufügen. Also ist für $n=6$ und $n=7$:

$$F_0=A_0,$$
$$F_{-i}+F_{+i}=2(A_0+A_2i^2+A_4i^4+A_6i^6),$$
$$F_{-\frac{2}{3}i}+F_{+\frac{2}{3}i}=2(A_0+\tfrac{4}{9}A_2i^2+\tfrac{16}{81}A_4i^4+\tfrac{64}{729}A_6i^6),$$
$$F_{-\frac{1}{3}i}+F_{+\frac{1}{3}i}=2(A_0+\tfrac{1}{9}A_2i^2+\tfrac{1}{81}A_4i^4+\tfrac{1}{729}A_6i^6);$$

folglich:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}=A_2i^2+A_4i^4+A_6i^6,$$

$$\frac{F_{-\frac{2}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{2}{3}i}}{2}=\tfrac{4}{9}A_2i^2+\tfrac{16}{81}A_4i^4+\tfrac{64}{729}A_6i^6,$$

$$\frac{F_{-\frac{1}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{3}i}}{2}=\tfrac{1}{9}A_2i^2+\tfrac{1}{81}A_4i^4+\tfrac{1}{729}A_6i^6;$$

oder:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}=3.\tfrac{1}{3}A_2i^2+5.\tfrac{1}{5}A_4i^4+7.\tfrac{1}{7}A_6i^6,$$

$$\frac{F_{-\frac{2}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{2}{3}i}}{2}=\tfrac{4}{3}.\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{80}{81}.\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{448}{729}.\tfrac{1}{7}A_6i^6,$$

$$\frac{F_{-\frac{1}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{3}i}}{2}=\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{5}{81}.\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{7}{729}.\tfrac{1}{7}A_6i^6.$$

Nun bestimme man x, y so, dass

$$3+\tfrac{4}{3}x+\tfrac{1}{3}y=5+\tfrac{80}{81}x+\tfrac{5}{81}y=7+\tfrac{448}{729}x+\tfrac{7}{729}y$$

ist. Durch Subtraction erhält man leicht:

$$\tfrac{28}{81}x+\tfrac{22}{81}y=2,$$
$$\tfrac{272}{729}x+\tfrac{38}{729}y=2;$$

also:

$$14x+11y=81,$$
$$136x+19y=729.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man:

$$x=\tfrac{216}{41},\quad y=\tfrac{27}{41}$$

und folglich:

$$3+\tfrac{4}{3}x+\tfrac{1}{3}y=5+\tfrac{80}{81}x+\tfrac{5}{81}y=7+\tfrac{448}{729}x+\tfrac{7}{729}y=\tfrac{420}{41}.$$

Aus den obigen Gleichungen erhält man:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}+\frac{F_{-\frac{2}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{2}{3}i}}{2}x+\frac{F_{-\frac{1}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{3}i}}{2}y$$
$$=(3+\tfrac{4}{3}x+\tfrac{1}{3}y).\tfrac{1}{3}A_2i^2$$
$$+(5+\tfrac{80}{81}x+\tfrac{5}{81}y).\tfrac{1}{5}A_4i^4$$
$$+(7+\tfrac{448}{729}x+\tfrac{7}{729}y).\tfrac{1}{7}A_6i^6,$$

also:

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}+\tfrac{216}{41}.\frac{F_{-\frac{2}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{2}{3}i}}{2}+\tfrac{27}{41}.\frac{F_{-\frac{1}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{3}i}}{2}$$
$$=\tfrac{420}{41}(\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{1}{7}A_6i^6),$$

und folglich:

Digitized by Google

$$\tfrac{420}{41}F_0+\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}+\tfrac{216}{41}\cdot\frac{F_{-\frac{2}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{2}{3}i}}{2}$$

$$+\tfrac{27}{41}\cdot\frac{F_{-\frac{1}{3}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{3}i}}{2}$$

$$=\tfrac{420}{41}(A_0+\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{1}{7}A_6i^6)=\tfrac{420}{41}\cdot\frac{V}{2i},$$

woraus man leicht erhält:

$$V=\frac{2i}{840}\left\{41F_{-i}+216F_{-\frac{2}{3}i}+27F_{-\frac{1}{3}i}+272F_0+27F_{+\frac{1}{3}i}+216F_{+\frac{2}{3}i}+41F_{+i}\right\}$$

oder:

$$V=\frac{i}{420}\left\{41F_{-i}+216F_{-\frac{2}{3}i}+27F_{-\frac{1}{3}i}+272F_0+27F_{+\frac{1}{3}i}+216F_{+\frac{2}{3}i}+41F_{+i}\right\}.$$

Für $n=8$ und $n=9$ ist nach I. und II.:

$$V=2i(A_0+\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{1}{7}A_6i^6+\tfrac{1}{9}A_8i^8).$$

Für $n=8$ ist aber:

$$F_{-i}=A_0-A_1i+A_2i^2-A_3i^3+A_4i^4-A_5i^5+A_6i^6-A_7i^7+A_8i^8,$$

$$F_{-\frac{3}{4}i}=A_0-\tfrac{3}{4}A_1i+(\tfrac{3}{4})^2A_2i^2-(\tfrac{3}{4})^3A_3i^3+(\tfrac{3}{4})^4A_4i^4-(\tfrac{3}{4})^5A_5i^5+(\tfrac{3}{4})^6A_6i^6-(\tfrac{3}{4})^7A_7i^7+(\tfrac{3}{4})^8A_8i^8,$$

$$F_{-\frac{2}{4}i}=A_0-\tfrac{2}{4}A_1i+(\tfrac{2}{4})^2A_2i^2-(\tfrac{2}{4})^3A_3i^3+(\tfrac{2}{4})^4A_4i^4-(\tfrac{2}{4})^5A_5i^5+(\tfrac{2}{4})^6A_6i^6-(\tfrac{2}{4})^7A_7i^7+(\tfrac{2}{4})^8A_8i^8,$$

$$F_{-\frac{1}{4}i}=A_0-\tfrac{1}{4}A_1i+(\tfrac{1}{4})^2A_2i^2-(\tfrac{1}{4})^3A_3i^3+(\tfrac{1}{4})^4A_4i^4-(\tfrac{1}{4})^5A_5i^5+(\tfrac{1}{4})^6A_6i^6-(\tfrac{1}{4})^7A_7i^7+(\tfrac{1}{4})^8A_8i^8,$$

$$F_0=A_0,$$

$$F_{+\frac{1}{4}i}=A_0+\tfrac{1}{4}A_1i+(\tfrac{1}{4})^2A_2i^2+(\tfrac{1}{4})^3A_3i^3+(\tfrac{1}{4})^4A_4i^4+(\tfrac{1}{4})^5A_5i^5+(\tfrac{1}{4})^6A_6i^6+(\tfrac{1}{4})^7A_7i^7+(\tfrac{1}{4})^8A_8i^8,$$

$$F_{+\frac{2}{4}i}=A_0+\tfrac{2}{4}A_1i+(\tfrac{2}{4})^2A_2i^2+(\tfrac{2}{4})^3A_3i^3+(\tfrac{2}{4})^4A_4i^4+(\tfrac{2}{4})^5A_5i^5+(\tfrac{2}{4})^6A_6i^6+(\tfrac{2}{4})^7A_7i^7+(\tfrac{2}{4})^8A_8i^8,$$

$$F_{+\frac{3}{4}i}=A_0+\tfrac{3}{4}A_1i+(\tfrac{3}{4})^2A_2i^2+(\tfrac{3}{4})^3A_3i^3+(\tfrac{3}{4})^4A_4i^4+(\tfrac{3}{4})^5A_5i^5+(\tfrac{3}{4})^6A_6i^6+(\tfrac{3}{4})^7A_7i^7+(\tfrac{3}{4})^8A_8i^8,$$

$$F_{+i}=A_0+A_1i+A_2i^2+A_3i^3+A_4i^4+A_5i^5+A_6i^6+A_7i^7+A_8i^8.$$

Für $n=9$ sind den vier ersten und den vier letzten Formeln am Ende noch die Glieder:

Digitized by Google

$$-A_9 i^9,\ -(\tfrac{3}{4})^9 A_9 i^9,\ -(\tfrac{2}{4})^9 A_9 i^9,\ -(\tfrac{1}{4})^9 A_9 i^9;$$

$$+(\tfrac{1}{4})^9 A_9 i^9,\ +(\tfrac{2}{4})^9 A_9 i^9,\ +(\tfrac{3}{4})^9 A_9 i^9,\ +A_9 i^9$$

beizufügen. Also ist für $n=8$ und $n=9$

$$F_0 = A_0,$$

$$F_{-i} + F_{+i} = 2(A_0 + A_2 i^2 + A_4 i^4 + A_6 i^6 + A_8 i^8),$$

$$F_{-\frac{3}{4}i} + F_{+\frac{3}{4}i} = 2(A_0 + (\tfrac{3}{4})^2 A_2 i^2 + (\tfrac{3}{4})^4 A_4 i^4 + (\tfrac{3}{4})^6 A_6 i^6 + (\tfrac{3}{4})^8 A_8 i^8),$$

$$F_{-\frac{2}{4}i} + F_{+\frac{2}{4}i} = 2(A_0 + (\tfrac{2}{4})^2 A_2 i^2 + (\tfrac{2}{4})^4 A_4 i^4 + (\tfrac{2}{4})^6 A_6 i^6 + (\tfrac{2}{4})^8 A_8 i^8),$$

$$F_{-\frac{1}{4}i} + F_{+\frac{1}{4}i} = 2(A_0 + (\tfrac{1}{4})^2 A_2 i^2 + (\tfrac{1}{4})^4 A_4 i^4 + (\tfrac{1}{4})^6 A_6 i^6 + (\tfrac{1}{4})^8 A_8 i^8);$$

und folglich, wenn man wie früher immer auch jetzt F_0 für A_0 setzt:

$$\frac{F_{-i} - 2F_0 + F_{+i}}{2}$$
$$= 3.\tfrac{1}{3}A_2 i^2 + 5.\tfrac{1}{5}A_4 i^4 + 7.\tfrac{1}{7}A_6 i^6 + 9.\tfrac{1}{9}A_8 i^8,$$

$$\frac{F_{-\frac{3}{4}i} - 2F_0 + F_{+\frac{3}{4}i}}{2}$$
$$= 3.(\tfrac{3}{4})^2.\tfrac{1}{3}A_2 i^2 + 5.(\tfrac{3}{4})^4.\tfrac{1}{5}A_4 i^4 + 7.(\tfrac{3}{4})^6.\tfrac{1}{7}A_6 i^6 + 9.(\tfrac{3}{4})^8.\tfrac{1}{9}A_8 i^8,$$

$$\frac{F_{-\frac{2}{4}i} - 2F_0 + F_{+\frac{2}{4}i}}{2}$$
$$= 3.(\tfrac{2}{4})^2.\tfrac{1}{3}A_2 i^2 + 5.(\tfrac{2}{4})^4.\tfrac{1}{5}A_4 i^4 + 7.(\tfrac{2}{4})^6.\tfrac{1}{7}A_6 i^6 + 9.(\tfrac{2}{4})^8.\tfrac{1}{9}A_8 i^8,$$

$$\frac{F_{-\frac{1}{4}i} - 2F_0 + F_{+\frac{1}{4}i}}{2}$$
$$= 3.(\tfrac{1}{4})^2.\tfrac{1}{3}A_2 i^2 + 5.(\tfrac{1}{4})^4.\tfrac{1}{5}A_4 i^4 + 7.(\tfrac{1}{4})^6.\tfrac{1}{7}A_6 i^8 + 9.(\tfrac{1}{4})^8.\tfrac{1}{9}A_8 i^8$$

Nun bestimme man x, y, z so, dass:

$$\begin{aligned}
&3 + 3.(\tfrac{3}{4})^2 x + 3.(\tfrac{2}{4})^2 y + 3.(\tfrac{1}{4})^2 z \\
&= 5 + 5.(\tfrac{3}{4})^4 x + 5.(\tfrac{2}{4})^4 y + 5.(\tfrac{1}{4})^4 z \\
&= 7 + 7.(\tfrac{3}{4})^6 x + 7.(\tfrac{2}{4})^6 y + 7.(\tfrac{1}{4})^6 z \\
&= 9 + 9.(\tfrac{3}{4})^8 x + 9.(\tfrac{2}{4})^8 y + 9.(\tfrac{1}{4})^8 z
\end{aligned}$$

ist. Zuerst erhält man sogleich:

$$\begin{aligned}
2 = &\{3.(\tfrac{3}{4})^2 - 5.(\tfrac{3}{4})^4\}x \\
&+ \{3.(\tfrac{2}{4})^2 - 5.(\tfrac{2}{4})^4\}y \\
&+ \{3.(\tfrac{1}{4})^2 - 5.(\tfrac{1}{4})^4\}z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 = &\{5.(\tfrac{3}{4})^4 - 7.(\tfrac{3}{4})^6\}x \\
&+ \{5.(\tfrac{2}{4})^4 - 7.(\tfrac{2}{4})^6\}y \\
&+ \{5.(\tfrac{1}{4})^4 - 7.(\tfrac{1}{4})^6\}z,
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
2 = & \{7.(\tfrac{3}{4})^6 - 9.(\tfrac{3}{4})^8\}x \\
& + \{7.(\tfrac{2}{4})^6 - 9.(\tfrac{2}{4})^8\}y \\
& + \{7.(\tfrac{1}{4})^6 - 9.(\tfrac{1}{4})^8\}z;
\end{aligned}
$$

oder, wenn man die erste, zweite, dritte Gleichung respective mit 4^4, 4^6, 4^8 multiplicirt:

$$
\begin{aligned}
2.4^4 = & (3.3^2.4^2 - 5.3^4)x \\
& + (3.2^2.4^2 - 5.2^4)y \\
& + (3.1^2.4^2 - 5.1^4)z, \\
2.4^6 = & (5.3^4.4^2 - 7.3^6)x \\
& + (5.2^4.4^2 - 7.2^6)y \\
& + (5.1^4.4^2 - 7.1^6)z, \\
2.4^8 = & (7.3^6.4^2 - 9.3^8)x \\
& + (7.2^6.4^2 - 9.2^8)y \\
& + (7.1^6.4^2 - 9.1^8)z;
\end{aligned}
$$

also nach gehöriger numerischer Entwickelung:

$$
\begin{aligned}
27x + 112y + 43z &= 512, \\
1377x + 832y + 73z &= 8192, \\
22599x + 4864y + 103z &= 131072.
\end{aligned}
$$

Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten, die zweite Gleichung von der dritten ab, so erhalten wir die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
27x + 112y + 43z &= 512 \\
1350x + 720y + 30z &= 7680 \\
21222x + 4032y + 30z &= 122880
\end{aligned}
$$

also:

$$
\begin{aligned}
27x + 112y + 43z &= 512 \\
45x + 24y + z &= 256 \\
3537x + 672y + 5z &= 20480.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
1935x + 1032y + 43z &= 11008 \\
27x + 112y + 43z &= 512
\end{aligned}
$$

und:

$$
\begin{aligned}
3537x + 672y + 5z &= 20480 \\
225x + 120y + 5z &= 1280
\end{aligned}
$$

also:

Digitized by Google

$$1908x + 920y = 10496$$
$$3312x + 552y = 19200$$

oder:

$$477x + 230y = 2624$$
$$138x + \ \ 23y = \ \ 800$$

also:

$$1380x + 230y = 8000$$
$$477x + 230y = 2624$$

folglich:

$$903x = 5376$$

daher:

$$x = \frac{5376}{903} = \frac{256}{43}.$$

Weil nun ferner nach dem Obigen:

$$y = \frac{800 - 138x}{23}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$y = -\frac{928}{989}.$$

Endlich ist nach dem Obigen:

$$z = 256 - 45x - 24y$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$z = \frac{10496}{989}.$$

Daher haben wir jetzt die folgenden Werthe:

$$x = \frac{256}{43}, \quad y = -\frac{928}{989}, \quad z = \frac{10496}{989};$$

und es ist nun, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{r} 3+3.(\tfrac{3}{4})^2x+3.(\tfrac{2}{4})^2y+3.(\tfrac{1}{4})^2z \\ =5+5.(\tfrac{3}{4})^4x+5.(\tfrac{2}{4})^4y+5.(\tfrac{1}{4})^4z \\ =7+7.(\tfrac{3}{4})^6x+7.(\tfrac{2}{4})^6y+7.(\tfrac{1}{4})^6z \\ =9+9.(\tfrac{3}{4})^8x+9.(\tfrac{2}{4})^8y+9.(\tfrac{1}{4})^8z \end{array}\right\} = \frac{14175}{989}.$$

Ganz auf ähnliche Art wie früher erhalten wir jetzt:

Digitized by Google

$$\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}$$

$$+\frac{256}{43}\cdot\frac{F_{-\frac{3}{4}i}-2F_0+F_{+\frac{3}{4}i}}{2}$$

$$-\frac{928}{989}\cdot\frac{F_{-\frac{2}{4}i}-2F_0+F_{+\frac{2}{4}i}}{2}$$

$$+\frac{10496}{989}\cdot\frac{F_{-\frac{1}{4}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{4}i}}{2}$$

$$=\frac{14175}{989}(\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{1}{7}A_6i^6+\tfrac{1}{9}A_8i^8),$$

und folglich:

$$\frac{14175}{989}F_0$$

$$+\frac{F_{-i}-2F_0+F_{+i}}{2}$$

$$+\frac{256}{43}\cdot\frac{F_{-\frac{3}{4}i}-2F_0+F_{+\frac{3}{4}i}}{2}$$

$$-\frac{928}{989}\cdot\frac{F_{-\frac{2}{4}i}-2F_0+F_{+\frac{2}{4}i}}{2}$$

$$+\frac{10496}{989}\cdot\frac{F_{-\frac{1}{4}i}-2F_0+F_{+\frac{1}{4}i}}{2}$$

$$=\frac{14175}{989}(A_0+\tfrac{1}{3}A_2i^2+\tfrac{1}{5}A_4i^4+\tfrac{1}{7}A_6i^6+\tfrac{1}{9}A_8i^8)$$

$$=\frac{14175}{989}\cdot\frac{V}{2i},$$

woraus man leicht erhält:

$$V=\frac{2i}{28350}\left\{\begin{array}{r}989F_{-i}+5888F_{-\frac{3}{4}i}-928F_{-\frac{2}{4}i}+10496F_{-\frac{1}{4}i}-4540F_0\\+10496F_{+\frac{1}{4}i}-928F_{+\frac{2}{4}i}+5888F_{+\frac{3}{4}i}+989F_{+i}\end{array}\right\}$$

oder:

$$V=\frac{i}{14175}\left\{\begin{array}{r}989F_{-i}+5888F_{-\frac{3}{4}i}-928F_{-\frac{2}{4}i}+10496F_{-\frac{1}{4}i}-4540F_0\\+10496F_{+\frac{1}{4}i}-928F_{+\frac{2}{4}i}+5888F_{+\frac{3}{4}i}+989F_{+i}\end{array}\right\}.$$

Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln, welche nach der Reihe für

Digitized by Google

$$n=0 \text{ und } n=1,$$
$$n=2 \quad „ \quad n=3,$$
$$n=4 \quad „ \quad n=5,$$
$$n=6 \quad „ \quad n=7,$$
$$n=8 \quad „ \quad n=9$$

gelten, sind für die Bedürfnisse der Praxis unzweifelhaft weit mehr als genügend, und es würde daher in Bezug auf den nächsten Zweck dieser Abhandlung ganz unnütz sein, die obigen Rechnungen noch weiter fortzuführen. Ueberhaupt wird man nicht übersehen, dass dieser Aufsatz vorzugsweise nur einen praktischen Zweck hat und für Praktiker bestimmt ist; Weiteres s. m. z. B. Thl. XIV. Nr. XX.—Thl. XX. Nr. XXIII.

XIX.

Die Pothenot'sche Aufgabe auf der Kugel.

Von

dem Herausgeber.

Schon im Archiv Thl. VII. S. 104. habe ich, jedoch nur ganz in der Kürze, eine Lösung des Pothenot'schen Problems auf der Kugel gegeben, welche ich jetzt in diesem Aufsatze weiter ausführen will, weil ich in einer mir vor Kurzem zugegangenen Schrift „eine vollständige Lösung des sogenannten Pothenot'schen Problems auf der Kugelfläche" bei einer gewissen Gelegenheit oder für einen gewissen Zweck als Aufgabe gestellt fand; vielleicht wird die von mir im Folgenden entwickelte Lösung geeignet sein, das genannte Problem in gewisser Weise zum Abschluss zu bringen.

Da die folgende Auflösung ganz durch die von der sphärischen Trigonometrie dargebotenen Hülfsmittel ausgeführt werden wird und ausgeführt werden soll, so wird, was ich hier ein für alle Mal bemerke, angenommen, dass in allen zur Betrachtung kommenden sphärischen Dreiecken keine Seite und kein Winkel

Digitized by Google

180° übersteige, oder vielmehr alle Seiten und alle Winkel kleiner als 180° seien.

Das auf der Kugelfläche gegebene sphärische Dreieck wollen wir durch ABC bezeichnen; seine Seiten und die denselben gegenüberliegenden Winkel werden wie gewöhnlich durch a, b, c und A, B, C bezeichnet, und diese Grössen sind sämmtlich als gegeben zu betrachten. Der seiner Lage nach zu bestimmende Punkt auf der Kugelfläche sei D. Alle rücksichtlich der gegenseitigen Lage der Punkte A, B, C, D möglichen Fälle sind in den Figuren I., II., III. auf Taf. V. dargestellt. Sehr leicht fällt aber in die Augen, dass man als wesentlich verschiedene Fälle bloss die in den Figuren I.*, II.* auf Taf. V. dargestellten Fälle zu betrachten braucht, wie von jetzt an geschehen soll. Die beiden in dem Punkte D gemessenen sphärischen Winkel BDC, ADC bezeichnen wir respective durch α, β; die Bedeutung der übrigen im Folgenden vorkommenden Bezeichnungen ist aus den Figuren I.*, II.* von selbst ersichtlich, und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht.

In allen Fällen ist:

$$1) \ldots\ldots \begin{cases} \sin\alpha:\sin\varphi = \sin a:\sin x, \\ \sin\beta:\sin\psi = \sin b:\sin y; \end{cases}$$

ferner ist in allen Fällen:

$$2) \ldots\ldots \cos\overline{ADB} = \frac{\cos c - \cos x \cos y}{\sin x \sin y};$$

und da nun

$$\angle\overline{ADB} = \alpha + \beta \quad \text{oder} \quad \angle\overline{ADB} = 360^0 - (\alpha+\beta),$$

also allgemein

$$\cos\overline{ADB} = \cos(\alpha+\beta)$$

ist, so ist nach 2) allgemein:

$$3) \ldots\ldots \cos(\alpha+\beta) = \frac{\cos c - \cos x \cos y}{\sin x \sin y}.$$

Beziehen sich aber im Folgenden überall die oberen Zeichen auf die in I.* dargestellten Fälle, die unteren Zeichen auf den in II*. dargestellten Fall, so ist:

$$\varphi + \psi = \begin{cases} C \\ 360^0 - C \end{cases}$$

also:

$$4) \ldots\ldots \quad \tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}C \\ 180^0 - \tfrac{1}{2}C \end{cases}$$

und folglich:

$$5) \ldots\ldots \quad \begin{cases} \sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = \quad \sin\tfrac{1}{2}C, \\ \cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = \pm\cos\tfrac{1}{2}C. \end{cases}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$6) \ldots\ldots \quad \lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin a}, \quad \mu = \frac{\sin\beta}{\sin b};$$

so ist nach 1):

$$7) \ldots\ldots \sin\varphi = \lambda\sin x, \quad \sin\psi = \mu\sin y;$$

folglich:

$$\begin{aligned} \lambda\sin x + \mu\sin y &= \sin\varphi + \sin\psi \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \\ \lambda\sin x - \mu\sin y &= \sin\varphi - \sin\psi \\ &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi); \end{aligned}$$

und daher nach 5):

$$\begin{aligned} \lambda\sin x + \mu\sin y &= \quad 2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \\ \lambda\sin x - \mu\sin y &= \pm 2\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi); \end{aligned}$$

woraus ferner durch Addition und Subtraction:

$$8) \ldots\ldots \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sin\tfrac{1}{2}\{C \pm (\varphi-\psi)\}}{\lambda}, \\ \sin y = \dfrac{\sin\tfrac{1}{2}\{C \mp (\varphi-\psi)\}}{\mu} \end{cases}$$

erhalten wird.

Daher hat man jetzt nach 8) und 3) zur Bestimmung von x, y, $\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$ die drei folgenden Gleichungen:

$$9) \ldots\ldots \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sin\tfrac{1}{2}\{C \pm (\varphi-\psi)\}}{\lambda}, \\ \sin y = \dfrac{\sin\tfrac{1}{2}\{C \mp (\varphi-\psi)\}}{\mu}, \\ \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos c - \cos x\cos y}{\sin x\sin y}; \end{cases}$$

zu denen, um φ, ψ selbst zu bestimmen, noch die Gleichung 4) kommt.

Digitized by Google

Um die Gleichungen 9) aufzulösen, ergiebt sich zuvörderst aus der dritten dieser Gleichungen:

$$\cos x \cos y = \cos c - \cos(\alpha+\beta) \sin x \sin y,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung quadrirt:

$$\cos x^2 \cos y^2 = 1 - \sin x^2 - \sin y^2 + \sin x^2 \sin y^2$$

$$= \cos c^2 - 2\cos c \cos(\alpha+\beta) \sin x \sin y + \cos(\alpha+\beta)^2 \sin x^2 \sin y^2,$$

folglich:

$$\sin c^2 = \sin x^2 + \sin y^2 - 2\cos c \cos(\alpha+\beta) \sin x \sin y$$
$$- \sin(\alpha+\beta)^2 \sin x^2 \sin y^2.$$

Führt man in diese Gleichung die Werthe von $\sin x$ und $\sin y$ aus 9) ein, so erhält man die Gleichung:

$$\sin c^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}\{C \pm (\varphi-\psi)\}^2}{\lambda^2} + \frac{\sin \frac{1}{2}\{C \mp (\varphi-\psi)\}^2}{\mu^2}$$

$$- \frac{2\cos c \cos(\alpha+\beta) \sin \frac{1}{2}\{C \pm (\varphi-\psi)\} \sin \frac{1}{2}\{C \mp (\varphi-\psi)\}}{\lambda\mu}$$

$$- \frac{\sin(\alpha+\beta)^2 \sin \frac{1}{2}\{C \pm (\varphi-\psi)\}^2 \sin \frac{1}{2}\{C \mp (\varphi-\psi)\}^2}{\lambda^2\mu^2},$$

also:

$$\sin c^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)\{\sin \tfrac{1}{2}C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2 + \cos \tfrac{1}{2}C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}$$

$$\pm \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$- \frac{2\cos c \cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\{\sin \tfrac{1}{2}C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2}C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}$$

$$- \frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\{\sin \tfrac{1}{2}C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2}C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}^2,$$

und folglich nach leichter Entwickelung:

$$\sin c^2 = \left\{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} - \frac{2\cos c \cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\} \sin \tfrac{1}{2}C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

$$+ \left\{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{2\cos c \cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\} \cos \tfrac{1}{2}C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

$$\pm \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

Digitized by Google

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^4\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^4\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4$$

$$+\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2.$$

Dividirt man diese Gleichung durch

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

und setzt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{1}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2};$$

so erhält man die Gleichung:

$$\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}$$

$$=\quad\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}$$

$$+\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\cot\tfrac{1}{2}C^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

$$\pm2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cdot\frac{\sin\tfrac{1}{2}C^2}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}C^2\cot\tfrac{1}{2}C^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}$$

$$+\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}C^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2},$$

und folglich, wenn man diese Gleichung mit

$$1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

multiplicirt:

$$\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}^2$$

$$=\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}$$

Digitized by Google

$$+\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\cot\tfrac{1}{2}C^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\{1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}$$

$$\pm 2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\cot\tfrac{1}{2}C^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4$$

$$+\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2.$$

Bringt man diese Gleichung auf Null, ordnet sie nach den Potenzen von

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi),$$

und setzt der Kürze wegen:

10)

$$A=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\right\},$$

$$B=\mp 2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$C=2\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2-\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}$$
$$-\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\cot\tfrac{1}{2}C^2,$$

$$D=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\right\}\cot\tfrac{1}{2}C^2;$$

so erhält man zur Bestimmung von $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$ die folgende Gleichung des vierten Grades:

11)

$$\left.\begin{array}{r}A+B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)+C\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^3\\ +D\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4\end{array}\right\}=0.$$

Digitized by Google

Weil es aber verstattet ist, die Gleichung mit $\sin\frac{1}{2}C^2$ zu multipliciren, so kann man in dieser Gleichung etwas kürzer offenbar auch setzen:

12)

$$\mathrm{A} = \sin c^2 - \left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\right\}\sin\tfrac{1}{2}C^2,$$

$$\mathrm{B} = \mp\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}\right)\sin \mathrm{C},$$

$$\mathrm{C} = 2\sin c^2 - \frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{2\lambda^2\mu^2}\sin C^2$$
$$-\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\sin\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\cos\tfrac{1}{2}C^2,$$

$$\mathrm{D} = \sin c^2 - \left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\right\}\cos\tfrac{1}{2}C^2.$$

Leicht findet man:

$$\mathrm{A}+\mathrm{D}$$
$$= 2\sin c^2 - \left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\sin\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\right\}\cos\tfrac{1}{2}C^2$$
$$+\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}(\sin\tfrac{1}{2}C^4+\cos\tfrac{1}{2}C^4)$$
$$= \mathrm{C} + \frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}(\sin\tfrac{1}{2}C^4+2\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}C^2+\cos\tfrac{1}{2}C^4)$$
$$= \mathrm{C} + \frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}(\sin\tfrac{1}{2}C^2+\cos\tfrac{1}{2}C^2)^2$$
$$= \mathrm{C} + \frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2},$$

so dass man also zur Bestimmung von C aus A und D die bemerkenswerthe Formel:

13) . . . . $\mathrm{C} = \mathrm{A}+\mathrm{D}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}$

hat.

Digitized by Google

Auch findet man leicht:

$$\begin{aligned}&A-D\\
&=\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)\cos C+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}(\cos\tfrac{1}{2}C^4-\sin\tfrac{1}{2}C^4)\\
&=\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\right\}\cos C+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu},\end{aligned}$$

und hat daher zur Berechnung von A, D aus C auch die folgenden Formeln:

14)

$$A+D=C+\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2},$$

$$A-D=\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\right\}\cos C+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}.$$

Wegen der Relation 13) kann man nun die aufzulösende Gleichung 11) auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\begin{aligned}A+B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)+(A+D)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^3\\
+D\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4\\
=\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2,\end{aligned}$$

also auf folgende Art:

$$\begin{aligned}A\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}+B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}\\
+D\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}\\
=\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2,\end{aligned}$$

daher auf folgende Art:

15)

$$\begin{aligned}A\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+B\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\sec\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)+D\sec\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\\
=\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2},\end{aligned}$$

oder auf folgende Art:

16)

$$\begin{aligned}\frac{A}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}+\frac{B}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}+\frac{D}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}\\
=\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2},\end{aligned}$$

Digitized by Google

oder auf folgende Art:

17)

$$A\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+B\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)+D\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2,$$

also auf folgende Art:

$$A\frac{1+\cos(\varphi-\psi)}{2}+B\frac{\sin(\varphi-\psi)}{2}+D\frac{1-\cos(\varphi-\psi)}{2}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cdot\frac{1-\cos(\varphi-\psi)^2}{4},$$

woraus man leicht die Gleichung:

18)

$$\cos(\varphi-\psi)^2+\frac{2\lambda^2\mu^2(A-D)}{\sin(\alpha+\beta)^2}\cos(\varphi-\psi)+\frac{2\lambda^2\mu^2B}{\sin(\alpha+\beta)^2}\sin(\varphi-\psi)$$
$$=1-\frac{2\lambda^2\mu^2(A+D)}{\sin(\alpha+\beta)^2}$$

erhält.

Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$\cos u^2+f\cos u+g\sin u+h=0,$$

unter welcher die Gleichung 18) enthalten ist, kann man auf folgende Art auflösen. Man setze:

$$(1+p^2)(\cos u^2+f\cos u+g\sin u+h)$$
$$=(\cos u+p\sin u+q)(\cos u-p\sin u+r)$$
$$=\cos u^2+(q+r)\cos u-p^2\sin u^2-p(q-r)\sin u+qr$$
$$=(1+p^2)\cos u^2+(q+r)\cos u-p(q-r)\sin u+qr-p^2,$$

und erhält nun durch Vergleichung dieser beiden Grössen die Gleichungen:

$$q+r=\quad f(1+p^2),$$
$$p(q-r)=-g(1+p^2),$$
$$qr-p^2=\quad h(1+p^2);$$

olglich:

$$q+r=\quad f(1+p)^2,$$
$$q-r=-\frac{g}{p}(1+p^2);$$

also:

$$2q = (f - \frac{g}{p})(1 + p^2),$$

$$2r = (f + \frac{g}{p})(1 + p^2);$$

und hieraus ferner:

$$4qr = (f^2 - \frac{g^2}{p^2})(1 + p^2)^2,$$

also, weil nach dem Obigen:

$$qr = p^2 + h(1 + p^2) = h + (h+1)p^2$$

ist:

$$4h + 4(h+1)p^2 = (f^2 - \frac{g^2}{p^2})(1 + p^2)^2,$$

oder

$$4hp^2 + 4(h+1)p^4 = (f^2p^2 - g^2)(1 + p^2)^2,$$

welche Gleichung man leicht auf die Form:

$$f^2p^6 + \{2f^2 - g^2 - 4(h+1)\}p^4 + \{f^2 - 2(g^2 + 2h)\}p^2 - g^2 = 0$$

bringt, und diese Gleichung ist in Bezug auf p^2 als unbekannte Grösse vom dritten Grade. Wie man, nachdem p gefunden, q und r zu bestimmen hat, erhellet aus dem Obigen ganz von selbst, und die Werthe von u findet man durch Auflösung der beiden Gleichungen:

$$\cos u + p \sin u + q = 0, \quad \cos u - p \sin u + r = 0$$

nach allgemein bekannten Methoden.

Zur Bestimmung von z liefern die Neper'schen Analogieen die folgenden Formeln:

19)

$$\tang \tfrac{1}{2}z = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \varphi)} \tang \tfrac{1}{2}(a + x)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varphi)} \tang \tfrac{1}{2}(a - x),$$

$$\tang \tfrac{1}{2}z = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta + \psi)}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \psi)} \tang \tfrac{1}{2}(b + y)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta + \psi)}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \psi)} \tang \tfrac{1}{2}(b - y).$$

In den obigen Formeln und Gleichungen ist die vollständige Auflösung des Pothenot'schen Problems auf der Kugelfläche enthalten, über welche hier noch auf weitere Erörterungen einzugehen überflüssig ist.

XX.

Ueber eine das Ellipsoid betreffende Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Die Aufgabe, mit deren Lösung dieser Aufsatz sich beschäftigen wird, ist die folgende:

Wenn drei Punkte auf einem Ellipsoid gegeben sind: so soll man auf demselben einen vierten Punkt finden, in welchem die Normale gegen die Normalen in den drei gegebenen Punkten unter gleichen Winkeln geneigt ist.

Die Gleichung des Ellipsoids sei wie gewöhnlich:

$$1) \ldots\ldots \left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{z}}{c}\right)^2=1,$$

und die drei auf diesem Ellipsoid gegebenen Punkte seien:

$$(x_0y_0z_0),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2).$$

Wir betrachten, was hier ein für alle Mal bemerkt wird, bei jeder Normale des Ellipsoids im Folgenden immer nur den von dem Punkte des Ellipsoids aus, welchem die Normale entspricht, nach dem äusseren Raume des Ellipsoids hin gehenden Theil dieser Normale, und bezeichnen, mit Rücksicht hierauf, die von den Normalen in den gegebenen Punkten

$$(x_0y_0z_0),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2)$$

mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel respective durch:

Digitized by Google

$$\alpha_0,\ \beta_0\ \gamma_0;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2.$$

Der auf dem Ellipsoid zu bestimmende Punkt sei (xyz), und die von der diesem Punkte entsprechenden Normale mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien θ, ω, ϖ. Endlich sei Ω der Winkel, unter welchem die dem gesuchten Punkte entsprechende Normale gegen die den drei gegebenen Punkten entsprechenden Normalen geneigt ist.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir die drei folgenden Gleichungen:

2)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_0\cos\theta+\cos\beta_0\cos\omega+\cos\gamma_0\cos\varpi&=\cos\Omega,\\
\cos\alpha_1\cos\theta+\cos\beta_1\cos\omega+\cos\gamma_1\cos\varpi&=\cos\Omega,\\
\cos\alpha_2\cos\theta+\cos\beta_2\cos\omega+\cos\gamma_2\cos\varpi&=\cos\Omega;
\end{aligned}$$

und setzen wir nun der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
3)\ \ldots\ G=\ &\cos\alpha_0(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\
&+\cos\alpha_1(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos\beta_0)\\
&+\cos\alpha_2(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\
=\ &\cos\beta_0(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\
&+\cos\beta_1(\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos\gamma_0)\\
&+\cos\beta_2(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\
=\ &\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\
&+\cos\gamma_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\
&+\cos\gamma_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)
\end{aligned}$$

und:

4)

$$\begin{aligned}
A=\ &(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\
&+(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos\beta_0)\\
&+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1),\\
B=\ &(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\
&+(\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos\gamma_0)\\
&+(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1),\\
C=\ &(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\
&+(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\
&+(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1);
\end{aligned}$$

Digitized by Google

so ist nach 2), wie man sogleich übersieht:

5)

$$G\cos\theta = \mathrm{A}\cos\Omega,\quad G\cos\omega = \mathrm{B}\cos\Omega,\quad G\cos\overline{\omega} = \mathrm{C}\cos\Omega;$$

also, wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt:

$$6)\ \ldots\ldots\ G^2 = (\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)\cos\Omega^2,$$

folglich:

$$7)\ \ldots\ldots\ \cos\Omega = \pm\frac{G}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}},$$

und daher nach 5):

8)

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{A}}{G}\cos\Omega = \pm\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}},$$

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{B}}{G}\cos\Omega = \pm\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \frac{\mathrm{C}}{G}\cos\Omega = \pm\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}.$$

Weil nun nach Thl. XXXVI. S. 84. Nr. 7):

$$\frac{x}{a} = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

$$\frac{y}{b} = \frac{b\cos\omega}{\sqrt{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

$$\frac{z}{c} = \frac{c\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\overline{\omega}^2}}$$

und nach 8):

$$a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\overline{\omega}^2 = \frac{a^2\mathrm{A}^2+b^2\mathrm{B}^2+c^2\mathrm{C}^2}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2},$$

also:

$$\sqrt{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\overline{\omega}^2} = \frac{\sqrt{a^2\mathrm{A}^2+b^2\mathrm{B}^2+c^2\mathrm{C}^2}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden:

Digitized by Google

9)

$$\frac{x}{a}=\pm\frac{aA}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}},$$

$$\frac{y}{b}=\pm\frac{bB}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}},$$

$$\frac{z}{c}=\pm\frac{cC}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}};$$

durch welche Formeln die Coordinaten des gesuchten Punktes bestimmt sind.

In diese Formeln wollen wir nun die Coordinaten der drei gegebenen Punkte einführen. Setzen wir zu dem Ende der Kürze wegen:

$$10) \ldots \left\{ \begin{array}{l} G_0=\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}, \\ G_1=\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}, \\ G_2=\sqrt{\left(\frac{x_2}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_2}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_2}{c^2}\right)^2}; \end{array}\right.$$

so ist nach Thl. XXXVI. S. 83. Nr. 5):

$$\cos\alpha_0=\frac{\frac{x_0}{a^2}}{G_0},\quad \cos\beta_0=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{G_0},\quad \cos\gamma_0=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{G_0};$$

$$\cos\alpha_1=\frac{\frac{x_1}{a^2}}{G_1},\quad \cos\beta_1=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{G_1},\quad \cos\gamma_1=\frac{\frac{z_1}{c^2}}{G_1};$$

$$\cos\alpha_2=\frac{\frac{x_2}{a^2}}{G_2},\quad \cos\beta_2=\frac{\frac{y_2}{b^2}}{G_2},\quad \cos\gamma_2=\frac{\frac{z_2}{c^2}}{G_2};$$

also ist nach 4):

$$b^2c^2G_0G_1G_2A$$
$$=G_0(y_1z_2-z_1y_2)+G_1(y_2z_0-z_2y_0)+G_2(y_0z_1-z_0y_1),$$

$$c^2a^2G_0G_1G_2B$$
$$=G_0(z_1x_2-x_1z_2)+G_1(z_2x_0-x_2z_0)+G_2(z_0x_1-x_0z_1),$$

$$a^2b^2G_0G_1G_2C$$
$$=G_0(x_1y_2-y_1x_2)+G_1(x_2y_0-y_2x_0)+G_2(x_0y_1-y_0x_1);$$

Digitized by Google

und folglich, wenn wir der Kürze wegen:

11)

$$A_0=\frac{y_1}{b}\cdot\frac{z_2}{c}-\frac{z_1}{c}\cdot\frac{y_2}{b},\quad A_1=\frac{y_2}{b}\cdot\frac{z_0}{c}-\frac{z_2}{c}\cdot\frac{y_0}{b},\quad A_2=\frac{y_0}{b}\cdot\frac{z_1}{c}-\frac{z_0}{c}\cdot\frac{y_1}{b};$$

$$B_0=\frac{z_1}{c}\cdot\frac{x_2}{a}-\frac{x_1}{a}\cdot\frac{z_2}{c},\quad B_1=\frac{z_2}{c}\cdot\frac{x_0}{a}-\frac{x_2}{a}\cdot\frac{z_0}{c},\quad B_2=\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c};$$

$$C_0=\frac{x_1}{a}\cdot\frac{y_2}{b}-\frac{y_1}{b}\cdot\frac{x_2}{a},\quad C_1=\frac{x_2}{a}\cdot\frac{y_0}{b}-\frac{y_2}{b}\cdot\frac{x_0}{a},\quad C_2=\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}$$

setzen:

$$bcG_0G_1G_2\mathrm{A}=G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2,$$
$$caG_0G_1G_2\mathrm{B}=G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2,$$
$$abG_0G_1G_2\mathrm{C}=G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2;$$

also:

$$abcG_0G_1G_2.a\mathrm{A}=a^2(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2),$$
$$abcG_0G_1G_2.b\mathrm{B}=b^2(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2),$$
$$abcG_0G_1G_2.c\mathrm{C}=c^2(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2);$$

und hieraus:

$$abcG_0G_1G_2\sqrt{a^2\mathrm{A}^2+b^2\mathrm{B}^2+c^2\mathrm{C}^2}$$

$$=\sqrt{\left\{\begin{array}{r}a^4(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^4(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2\\+c^4(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2\end{array}\right\}}.$$

Also ist nach 9):

12)

$$\frac{x}{a}=\pm\frac{a^2(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)}{\sqrt{\left\{\begin{array}{r}a^4(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^4(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2\\+c^4(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2\end{array}\right\}}},$$

$$\frac{y}{b}=\pm\frac{b^2(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)}{\sqrt{\left\{\begin{array}{r}a^4(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^4(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2\\+c^4(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2\end{array}\right\}}},$$

$$\frac{z}{c}=\pm\frac{c^2(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)}{\sqrt{\left\{\begin{array}{r}a^4(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^4(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2\\+c^4(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2\end{array}\right\}}}.$$

Digitized by Google

Ferner ist:

$$abcG_0G_1G_2\mathrm{A} = a(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2),$$
$$abcG_0G_1G_2\mathrm{B} = b(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2),$$
$$abcG_0G_1G_2\mathrm{C} = c(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2);$$

also:

$$abcG_0G_1G_2\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}$$
$$=\sqrt{\left\{\begin{array}{r} a^2(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^2(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2 \\ +c^2(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2 \end{array}\right\}},$$

und mit Beziehung auf 3):

$$abcGG_0G_1G_2 = \frac{x_0}{a}A_0+\frac{x_1}{a}A_1+\frac{x_2}{a}A_2$$
$$=\frac{y_0}{b}B_0+\frac{y_1}{b}B_1+\frac{y_2}{b}B_2$$
$$=\frac{z_0}{c}C_0+\frac{z_1}{c}C_1+\frac{z_2}{c}C_2;$$

also nach 7):

13 . . . . $\cos\Omega$

$$=\pm\frac{\frac{x_0}{a}A_0+\frac{x_1}{a}A_1+\frac{x_2}{a}A_2}{\sqrt{\left\{\begin{array}{r} a^2(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^2(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2 \\ +c^2(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2 \end{array}\right\}}}$$

$$=\pm\frac{\frac{y_0}{b}B_0+\frac{y_1}{b}B_1+\frac{y_2}{b}B_2}{\sqrt{\left\{\begin{array}{r} a^2(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^2(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2 \\ +c^2(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2 \end{array}\right\}}}$$

$$=\pm\frac{\frac{z_0}{c}C_0+\frac{z_1}{c}C_1+\frac{z_2}{c}C_2}{\sqrt{\left\{\begin{array}{r} a^2(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^2(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2)^2 \\ +c^2(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2 \end{array}\right\}}}.$$

Die Breiten der Punkte

$$(x_0y_0z_0),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2)$$

Digitized by Google

wollen wir nun respective durch

$$\mathrm{B}_0,\quad \mathrm{B}_1,\quad \mathrm{B}_2$$

und ihre reducirten Längen und reducirten Breiten respective durch

$$\mathfrak{L}_0,\ \mathfrak{B}_0;\quad \mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{B}_1;\quad \mathfrak{L}_2,\ \mathfrak{B}_2$$

bezeichnen*); so ist nach 11) mit Rücksicht auf die Formeln in Thl. XXXVI. S. 90. Nr. 19):

14)

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2-\sin\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2\sin\mathfrak{B}_1,\\
A_1 &= \sin\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2\sin\mathfrak{B}_0-\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_2,\\
A_2 &= \sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1-\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= \cos\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2\sin\mathfrak{B}_1-\cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2,\\
B_1 &= \cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_2-\cos\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2\sin\mathfrak{B}_0,\\
B_2 &= \cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_0-\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= \sin(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\cos\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2,\\
C_1 &= \sin(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_2)\cos\mathfrak{B}_2\cos\mathfrak{B}_0,\\
C_2 &= \sin(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_0)\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1.
\end{aligned}$$

Also ist, wenn wir der Kürze wegen:

$$15)\ \ldots\ldots\ M = \begin{aligned}[t] &\sin(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\sin\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2\\ &+\sin(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_2)\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2\\ &+\sin(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_0)\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2\end{aligned}$$

setzen:

$$16)\ \ldots\ldots\ldots\ M = \frac{x_0}{a}A_0+\frac{x_1}{a}A_1+\frac{x_2}{a}A_2$$

$$=\frac{y_0}{b}B_0+\frac{y_1}{b}B_1+\frac{y_2}{b}B_2$$

$$=\frac{z_0}{c}C_0+\frac{z_1}{c}C_1+\frac{z_2}{c}C_2.$$

Nach 10) und einer aus Thl. XXXVI. S. 93. bekannten allgemeinen Formel ist ferner:

$$G_0=\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}_0}{\sin\mathrm{B}_0},\quad G_1=\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}_1}{\sin\mathrm{B}_1},\quad G_2=\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}_2}{\sin\mathrm{B}_2};$$

---

*) Thl. XXXVI. S. 86. S. 90.

Digitized by Google

also, wenn wir der Kürze wegen:

17)

$$A = A_0 \frac{\sin \mathfrak{B}_0}{\sin B_0} + A_1 \frac{\sin \mathfrak{B}_1}{\sin B_1} + A_2 \frac{\sin \mathfrak{B}_2}{\sin B_2},$$

$$B = B_0 \frac{\sin \mathfrak{B}_0}{\sin B_0} + B_1 \frac{\sin \mathfrak{B}_1}{\sin B_1} + B_2 \frac{\sin \mathfrak{B}_2}{\sin B_2},$$

$$C = C_0 \frac{\sin \mathfrak{B}_0}{\sin B_0} + C_1 \frac{\sin \mathfrak{B}_1}{\sin B_1} + C_2 \frac{\sin \mathfrak{B}_2}{\sin B_2}$$

setzen:

$$G_0 A_0 + G_1 A_1 + G_2 A_2 = \frac{1}{c} A,$$

$$G_0 B_0 + G_1 B_1 + G_2 B_2 = \frac{1}{c} B,$$

$$G_0 C_0 + G_1 C_1 + G_2 C_2 = \frac{1}{c} C;$$

folglich:

$$a^4 (G_0 A_0 + G_1 A_1 + G_2 A_2)^2 = c^2 \left(\frac{a}{c}\right)^4 A^2,$$

$$b^4 (G_0 B_0 + G_1 B_1 + G_2 B_2)^2 = c^2 \left(\frac{b}{c}\right)^4 B^2,$$

$$c^4 (G_0 C_0 + G_1 C_1 + G_2 C_2)^2 = c^2 \left(\frac{c}{c}\right)^4 C^2$$

und:

$$a^2 (G_0 A_0 + G_1 A_1 + G_2 A_2)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 A^2,$$

$$b^2 (G_0 B_0 + G_1 B_1 + G_2 B_2)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 B^2,$$

$$c^2 (G^0 C_0 + G_1 C_1 + G_2 C_2)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2 C^2.$$

Daher ist:

$$\sqrt{\left\{ \begin{array}{r} a^4 (G_0 A_0 + G_1 A_1 + G_2 A_2)^2 + b^4 (G_0 B_0 + G_1 B_1 + G_2 B_2)^2 \\ + c^4 (G_0 C_0 + G_1 C_1 + G_2 C_2)^2 \end{array} \right\}}$$

$$= c \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^4 A^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 B^2 + \left(\frac{c}{c}\right)^4 C^2}$$

und:

Digitized by Google

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{r} a^2(G_0A_0+G_1A_1+G_2A_2)^2+b^2(G_0B_0+G_1B_1+G_2B_2^2) \\ +c^2(G_0C_0+G_1C_1+G_2C_2)^2 \end{array}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^2C^2};$$

also nach 12):

18)

$$\frac{x}{a}=\pm\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2A}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^4A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^4B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4C^2}},$$

$$\frac{y}{b}=\pm\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2B}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^4A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^4B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4C^2}},$$

$$\frac{z}{c}=\pm\frac{\left(\frac{c}{c}\right)^2C}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^4A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^4B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4C^2}};$$

und nach 13) und 16):

$$19) \ldots . \cos\Omega=\pm\frac{M}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^2C^2}}.$$

Wird die reducirte Länge und reducirte Breite des gesuchten Punktes (xyz) durch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$x=a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad y=b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad z=c\sin\mathfrak{B};$$

also nach 18):

20)

$$\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}=\pm\left(\frac{a}{c}\right)^2.\frac{A}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^4A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^4B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4C^2}},$$

$$\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}=\pm\left(\frac{b}{c}\right)^2.\frac{B}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^4A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^4B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4C^2}},$$

$$\sin\mathfrak{B}=\pm\left(\frac{c}{c}\right)^2.\frac{C}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^4A^2+\left(\frac{b}{c}\right)^4B^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4C^2}}.$$

Digitized by Google

Hieraus ergeben sich unmittelbar die folgenden Formeln:

$$21) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \tan \mathfrak{L} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{B}{A}, \\ \tan \mathfrak{B} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \frac{C}{A} \cos \mathfrak{L} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot \frac{C}{B} \sin \mathfrak{L}. \end{array} \right.$$

Da $\mathfrak{B}$ zwischen -90^0 und $+90^0$ liegt (Thl. XXXVI. S. 90.) und folglich $\cos \mathfrak{B}$ stets positiv ist, so kann man in Folge der beiden ersten Gleichungen in 20), möge man nun in denselben die oberen oder unteren Zeichen nehmen, aus den bekannten Vorzeichen von A und B immer leicht über die Vorzeichen von $\cos \mathfrak{L}$ und $\sin \mathfrak{L}$ bestimmt urtheilen; und berechnet man nun $\mathfrak{L}$ nach der Formel:

$$\tan \mathfrak{L} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{B}{A},$$

so muss man sich rücksichtlich der Art, wie man die reducirte Länge $\mathfrak{L}$, die immer zwischen 0 und 360^0 liegt (a. a. O.), zu nehmen hat, an die folgenden Regeln halten:

$\cos \mathfrak{L}$	$\sin \mathfrak{L}$	
positiv	positiv	$0 < \mathfrak{L} < 90^0$
negativ	positiv	$90^0 < \mathfrak{L} < 180^0$
negativ	negativ	$180^0 < \mathfrak{L} < 270^0$
positiv	negativ	$270^0 < \mathfrak{L} < 360^0$.

Mittelst der Formeln:

$$\tan \mathfrak{B} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \frac{C}{A} \cos \mathfrak{L} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot \frac{C}{B} \sin \mathfrak{L}$$

wird, nachdem $\mathfrak{L}$ bestimmt ist, $\mathfrak{B}$ ohne alle Zweideutigkeit gefunden, weil $\mathfrak{B}$ zwischen -90^0 und $+90^0$ liegt.

Nach diesen Formeln ist:

$$A = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot C \cos \mathfrak{L} \cot \mathfrak{B}, \quad B = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot C \sin \mathfrak{L} \cot \mathfrak{B};$$

also:

$$A^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^4 \cdot C^2 \cos \mathfrak{L}^2 \cot \mathfrak{B}^2, \quad B^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^4 \cdot C^2 \sin \mathfrak{L}^2 \cot \mathfrak{B}^2;$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 A^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot C^2 \cos \mathfrak{L}^2 \cot \mathfrak{B}^2, \quad \left(\frac{b}{c}\right)^2 B^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot C^2 \sin \mathfrak{L}^2 \cot \mathfrak{B}^2;$$

und folglich:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 A^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 B^2 + \left(\frac{c}{c}\right)^2 C^2$$

$$= c^2 C^2 \left\{ \left[\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2 \right] \cot\mathfrak{B}^2 + \frac{1}{c^2} \right\},$$

also, weil nach Thl. XXXVI. S. 92. Nr. 26)

$$\left\{ \left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2 \right\} \cot\mathfrak{B}^2 = \frac{\cot \mathrm{B}^2}{c^2}$$

ist, wo B die Breite des Punktes (xyz) bezeichnet, die mittelst der hieraus fliessenden Formel:

$$22) \ldots\ldots \cot \mathrm{B} = c \cot\mathfrak{B} \sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2}$$

immer aus der reducirten Länge und reducirten Breite gefunden werden kann:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 A^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 B^2 + \left(\frac{c}{c}\right)^2 C^2 = C^2(1+\cot \mathrm{B}^2) = \frac{C^2}{\sin \mathrm{B}^2}.$$

Daher ist nach 19):

$$23) \ldots\ldots\ldots \cos\Omega = \pm M \sqrt{\frac{\sin \mathrm{B}^2}{C^2}},$$

oder:

$$24) \ldots\ldots\ldots \cos\Omega = \pm M . \text{val. abs} . \frac{\sin \mathrm{B}}{C}.$$

Für die Grössen A, B, C, auf deren Kenntniss hier Alles ankommt, erhält man aus 14) und 17) leicht die folgenden Ausdrücke:

25)

$$\begin{aligned} A = & \quad \sin\mathfrak{L}_0 \cos\mathfrak{B}_0 \sin\mathfrak{B}_1 \sin\mathfrak{B}_2 \left(\frac{1}{\sin \mathrm{B}_2} - \frac{1}{\sin \mathrm{B}_1}\right) \\ & + \sin\mathfrak{L}_1 \sin\mathfrak{B}_0 \cos\mathfrak{B}_1 \sin\mathfrak{B}_2 \left(\frac{1}{\sin \mathrm{B}_0} - \frac{1}{\sin \mathrm{B}_2}\right) \\ & + \sin\mathfrak{L}_2 \sin\mathfrak{B}_0 \sin\mathfrak{B}_1 \cos\mathfrak{B}_2 \left(\frac{1}{\sin \mathrm{B}_1} - \frac{1}{\sin \mathrm{B}_0}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & - \cos\mathfrak{L}_0 \cos\mathfrak{B}_0 \sin\mathfrak{B}_1 \sin\mathfrak{B}_2 \left(\frac{1}{\sin \mathrm{B}_2} - \frac{1}{\sin \mathrm{B}_1}\right) \\ & - \cos\mathfrak{L}_1 \sin\mathfrak{B}_0 \cos\mathfrak{B}_1 \sin\mathfrak{B}_2 \left(\frac{1}{\sin \mathrm{B}_0} - \frac{1}{\sin \mathrm{B}_2}\right) \\ & - \cos\mathfrak{L}_2 \sin\mathfrak{B}_0 \sin\mathfrak{B}_1 \cos\mathfrak{B}_2 \left(\frac{1}{\sin \mathrm{B}_1} - \frac{1}{\sin \mathrm{B}_0}\right), \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$C = \frac{\sin(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)\sin\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2}{\sin B_0}$$
$$+ \frac{\sin(\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{L}_2)\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2}{\sin B_1}$$
$$+ \frac{\sin(\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_0)\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2}{\sin B_2};$$

oder:

26)

$$A\sin B_0\sin B_1\sin B_2$$
$$= 2\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2\sin B_0\sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)$$
$$+ 2\sin\mathfrak{L}_1\sin\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2\sin B_1\sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B_0)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B_0)$$
$$+ 2\sin\mathfrak{L}_2\sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2\sin B_2\sin\tfrac{1}{2}(B_0 - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B_0 + B_1),$$

$$B\sin B_0\sin B_1\sin B_2$$
$$= -2\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2\sin B_0\sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)$$
$$- 2\cos\mathfrak{L}_1\sin\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2\sin B_1\sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B_0)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B_0)$$
$$- 2\cos\mathfrak{L}_2\sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2\sin B_2\sin\tfrac{1}{2}(B_0 - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B_0 + B_1),$$

$$C\sin B_0\sin B_1\sin B_2$$
$$= \sin(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)\sin\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2\sin B_1\sin B_2$$
$$+ \sin(\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{L}_2)\cos\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{B}_2\sin B_2\sin B_0$$
$$+ \sin(\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_0)\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{B}_2\sin B_0\sin B_1;$$

oder auch:

27)

$$A\frac{\sin B_0}{\sin\mathfrak{B}_0}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin\mathfrak{B}_1}\cdot\frac{\sin B_2}{\sin\mathfrak{B}_2}$$
$$= 2\sin\mathfrak{L}_0\cot\mathfrak{B}_0\sin B_0\sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)$$
$$+ 2\sin\mathfrak{L}_1\cot\mathfrak{B}_1\sin B_1\sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B_0)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B_0)$$
$$+ 2\sin\mathfrak{L}_2\cot\mathfrak{B}_2\sin B_2\sin\tfrac{1}{2}(B_0 - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B_0 + B_1),$$

$$B\frac{\sin B_0}{\sin\mathfrak{B}_0}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin\mathfrak{B}_1}\cdot\frac{\sin B_2}{\sin\mathfrak{B}_2}$$
$$= -2\cos\mathfrak{L}_0\cot\mathfrak{B}_0\sin B_0\sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)$$
$$- 2\cos\mathfrak{L}_1\cot\mathfrak{B}_1\sin B_1\sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B_0)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B_0)$$
$$- 2\cos\mathfrak{L}_2\cot\mathfrak{B}_2\sin B_2\sin\tfrac{1}{2}(B_0 - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B_0 + B_1),$$

Digitized by Google

$$C\frac{\sin B_0}{\sin \mathfrak{B}_0}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin \mathfrak{B}_1}\cdot\frac{\sin B_2}{\sin \mathfrak{B}_2}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \sin(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\cot\mathfrak{B}_1\cot\mathfrak{B}_2\sin B_1\sin B_2 \\ & +\sin(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_2)\cot\mathfrak{B}_2\cot\mathfrak{B}_0\sin B_2\sin B_0 \\ & +\sin(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_0)\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1\sin B_0\sin B_1. \end{aligned}$$

So wie bei dieser, leisten auch bei vielen anderen, das allgemeine dreiaxige Ellipsoid betreffenden Aufgaben die von mir für diesen Körper in der Abhandlung Thl. XXXVI. Nr. VIII. eingeführten Längen und Breiten, reducirten Längen und reducirten Breiten, die vortrefflichsten Dienste.

Ich glaube, dass die hier aufgelöste Aufgabe wohl praktische Anwendung finden kann, was auch der hauptsächlichste Zweck ist, dass ich die Auflösung hier mitgetheilt habe.

Anhang.

Wenn gegen die den Punkten $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ auf dem Ellipsoid entsprechenden Normalen die dem Punkte (xyz) auf dem Ellipsoid entsprechende Normale unter gleichen Winkeln geneigt ist; so hat man nach 2) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\cos\alpha_0\cos\theta+\cos\beta_0\cos\omega+\cos\gamma_0\cos\overline{\omega}=\cos\Omega,$$
$$\cos\alpha_1\cos\theta+\cos\beta_1\cos\omega+\cos\gamma_1\cos\overline{\omega}=\cos\Omega;$$

aus denen sich die Gleichung:

$$(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)\cos\theta+(\cos\beta_0-\cos\beta_1)\cos\omega+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1)\cos\overline{\omega}=0$$

ergiebt. Nun ist aber nach Thl. XXXVI. S. 83. Nr. 5):

$$\cos\theta=\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega=\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega}=\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};$$

Digitized by Google

und daher die vorstehende Gleichung;

$$(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)\frac{x}{a^2}+(\cos\beta_0-\cos\beta_1)\frac{y}{b^2}+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1)\frac{z}{c^2}=0,$$

oder, weil in den oben eingeführten Bezeichnungen, bekanntlich:

$$\cos\alpha_0=\frac{\frac{x_0}{a^2}}{G_0},\quad \cos\beta_0=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{G_0},\quad \cos\gamma_0=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{G_0};$$

$$\cos\alpha_1=\frac{\frac{x_1}{a^2}}{G_1},\quad \cos\beta_1=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{G_1},\quad \cos\gamma_1=\frac{\frac{z_1}{c^2}}{G_1}$$

ist:

$$\left.\begin{array}{l}\left(G_0\frac{x_1}{a^2}-G_1\frac{x_0}{a^2}\right)\frac{x}{a^2}\\ +\left(G_0\frac{y_1}{b^2}-G_1\frac{y_0}{b^2}\right)\frac{y}{b^2}\\ +\left(G_0\frac{z_1}{c^2}-G_1\frac{z_0}{c^2}\right)\frac{z}{c^2}\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\sin\mathfrak{B}_0}{\sin B_0}\cdot\frac{x_1}{a^2}-\frac{\sin\mathfrak{B}_1}{\sin B_1}\cdot\frac{x_0}{a^2}\right)\frac{x}{a^2}\\ +\left(\frac{\sin\mathfrak{B}_0}{\sin B_0}\cdot\frac{y_1}{b^2}-\frac{\sin\mathfrak{B}_1}{\sin B_1}\cdot\frac{y_0}{b^2}\right)\frac{y}{b^2}\\ +\left(\frac{\sin\mathfrak{B}_0}{\sin B_0}\cdot\frac{z_1}{c^2}-\frac{\sin\mathfrak{B}_1}{\sin B_1}\cdot\frac{z_0}{c^2}\right)\frac{z}{c^2}\end{array}\right\}=0.$$

Alle Punkte eines Ellipsoids, deren Normalen gegen die Normalen zweier bestimmten oder gegebenen Punkte des Ellipsoids unter gleichen Winkeln geneigt sind, liegen also in **einer** durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden, durch die vorstehende Gleichung charakterisirten Ebene.

XXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aus dem alten, aber vieles immer noch Werthvolle enthaltenden Aufgabenbuche:

Deliciae mathematicae, oder *Mathematisches* Sinnen-Confect, bestehend in Fünffhundert vier und siebentzig auserlesenen, zum Theil gar Kunstreichen *Algebrai- Geometri-* und *Astronomischen* Auffgaben, mit vielen künstlichen *Solutionen* und *Reguln* gezieret u. s. w. Allen Liebhabern der *Mathematischen* Wissenschafften, insonderheit der Edlen Rechen-Kunst, zur wohlgemeinten Gemühts-Ergetzung auffgetragen von *Paul Halcken, Arithmet.* in Buxtehude, in der *Societaet* der Kunst-Rechner dem Haltenden. Hamburg. 1719.

will ich im Folgenden, mit verschiedenen Auslassungen, die Aufgaben abdrucken lassen, welche die Maxima und Minima betreffen, theils um zu zeigen, wie die alten Rechnenkünstler dergleichen Aufgaben einzukleiden beliebten, theils aber deshalb, weil ich glaube, dass sich von diesen zu den leichteren gehörenden Aufgaben immer noch einige bei'm Unterrichte auf Schulen zweckmässig verwerthen lassen, insofern es sich um die Bestimmung der Maxima und Minima für ganze rationale algebraische Functionen handelt. Die beiden poetischen Ergüsse wären vielleicht besser weggeblieben, indess mag man dieselben — weil der Raum dazu einmal vorhanden war — immerhin mit in den Kauf nehmen. Wer die alten Potenzbezeichnungen nicht kennt, wird das Nöthige darüber im „Mathematischen Wörterbuche. Thl. III. Art. Potenz“ finden. Die in diesem alten Aufgabenbuche enthaltenen Aufgaben über rationale Dreiecke, oder überhaupt die Aufgaben, bei denen einer gewissen Bedingung der

Digitized by Google

Rationalität genügt werden soll, werde ich bei nächster Gelegenheit, so bald wieder einmal zufällig Raum vorhanden ist, den obigen Aufgaben folgen lassen. G.

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

Die *Quantitaeten* oder Zahlen nach dem Grössesten oder kleinesten zu bestimen.

1. Eine jede beliebige Zahl *a* in drey Theile zu zertheilen, davon die beyden ersten Theile in gegebener *Proportion* stehen, wann man je zwey derselben Theile mit einander *multipliciret*, und die drey *Producta addiret*, dass die Summa unter allen die grösseste sey.

2. Eine gegebene Zahl *a* in drey Theile zu zertheilen, davon die beyden ersten in gegebener *Proportion* stehen; Wann man jeden Theil *quadriret* und die drey *Quadrata addiret*, so soll die Summa unter allen die möglichst-kleinste seyn.

3. Findet eine Zahl, und zwar die möglichst-kleineste, wann man dieselbe in drey Theil zertheilet, davon die beyden ersten sich verhalten wie 3 gegen 4. so man je zwey derselben Theile mit einander *multipl.* und die drey *Producta addiret*, dass die Summa 333. sey. Was ist es für eine Zahl, und welches sind die Theile? Facit die Zahl ist $31\frac{5}{7}$. und die Theile sind 9. 12. $10\frac{5}{7}$.

4. Findet eine solche Zahl, und zwar die möglichst Gröste, dieselbe werde in drey Theile zertheilet, davon die beyden ersten sich verhalten wie 3. gegen 5. so man jeden Theil *quadriret*, und die drey *Quadrata addiret*. das die Summa 1700. bringe. Frage nach der Zahl und deren Theile? Facit die Zahl ist 70. und die Theile sind $17\frac{1}{7}$. $28\frac{4}{7}$. $24\frac{2}{7}$.

5. Man begehret 4 Zahlen zu suchen, deren Summa die kleinste sey so möglich seyn kan, und sollen *a*, *b*, *c* gegen einander stehen, wie 1. 2. 3. und *d* sey der Rest, wann man die 4 *Producta abc*, *bcd*, *cda*, *dab* zusammen *addiret*, dass Summa 6480 sey. Was sind es für Zahlen? Facit 6. 12. 18. $13\frac{1}{11}$. Deren Summa thut $49\frac{1}{11}$.

6. Machet aus 60 vier Theile, davon *a*, *b*, *c* sich gegen einander verhalten, wie 2. 3. 4. Wann man die 4 *Producta abc*, *bcd*, *cda*, *dab* zusammen *addiret*, dass die gröste Summa komme? Facit 208. 312. 416. 324. jedes geth. in 21.

7. Man begehret 100. in vier Theile zu zertheilen, davon

Digitized by Google

A und *B* stehen in *proportione sesquialtera*, und *C* und *D* in *proportione Sesquitertia*; Wann man je zwey derselben Theile mit einander *multiplic*iret, und die 6 *Producta add*iret, dass die Summa die allergrösseste sei? Fac. 1250018750. 13650. 18200. jede getheilt in 631.

8. Einer kaufft fünfferlei Gewürtz, zusammen 1058 ℔. Bekommt von *A* so offt 2 als von *B* 3 ℔; von *C* so offt 3 als von *D* 4 ℔ und von *E* den Rest, gibt vors ℔ von jeder Art so manchen Dreyling, als so viel derselben ℔ sind, und ist der Belauff oder die Kauff-Summe die aller kleineste so möglich seyn kan. Wieviel ℔ hat er von jedem bekommen? Fac. von *A* 166$\frac{2}{3}$. *B* 250. *C* 182. *D* 242$\frac{2}{3}$. und *E* 216$\frac{2}{3}$ ℔.

9. Man begehret eine Zahl oder Linie solcher Gestalt in sechs Theile zu zertheilen; Dass *A* und *B* gegen einander stehen wie 2 gegen 1, *C* und *D* wie 3 gegen 2, und *E* und *F* wie 4 gegen 3. und wann man jeden Theil *quadr*iret, und die *Quadrata add*iret, dass die Summa die allerkleineste sey. Welches sind die Theile, nach den kleinesten Zahlen in gantzen? Facit 390. 195. 375. 250. 364. 273.

10. Noch begehret man eine Zahl in 7 Theile zu zertheilen; also dass sich verhalten *A* und *B*, wie 1 gegen 2. *C* und *D*, wie 3 gegen 5. *E* und *F*, wie 6 gegen 7. und *G* sey der Rest, und solle die Summa der 7 *Quadra*ten die kleineste seyn. Welches ist die Zahl und deren *Partes*? Facit die Zahl 567. und die Theile: 51. 102. 60. 100. 78. 91. 85. Nach der kleinesten im gantzen.

11. Findet drey Zahlen, davon *a* und *b* in *proportione tripla* stehen, und wann man von ihr beyder Summa 24 *subtrah*iret, dass *c* restire; So man aber von der *Quadraten* Summa von *a* und *b*, das *Quadrat* von *c subtrah*iret, dass alsdann die gröste Zahl restire. Facit 16. 48. 40.

12. Zertheilet 45 in drey Theile, dass die beyden ersten in *Proportione dupla* stehen; Wann man das *Quadrat* der ersten, *multipl.* mit dem *Product* der beyden andern, das *Quadrat* der andern, mit dem *Product* der ersten und dritten, und das *Quadrat* der dritten, mit dem *Product* der beyden ersten, dass die Summa der dreyer *Producten*, nemlich $aabc + abbc + abcc$ die möglichst gröste sei? Facit 10. 20. 15.

13. Zertheilet 90 in 5 Theile, davon *a*, *b*, *c*, *d* sich gegen einander verhalten, wie 3. 4. 5. 6 und *e* sey der Rest; Wann man die 5 *Producta abc*, *bcd*, *cde*, *dea*, *eab add*iret, dass die allergrösseste Summa komme. Facit 12. 16. 20. 24. 18.

Digitized by Google

14. Findet eine Zahl die kleineste in gantzen, wann man dieselbe in 5 Theile zertheilet dass die 4 ersten Theile gegen einander wie 1. 2. 3. 4 stehen, und dann die 5 *Producta abcd, bcde, cdea, deab, eabc*, zusammen *addi*ret, dass die Summa die allergröste sey. Facit die Zahl 952. und die Theile 75. 150. 225. 300. 202.

15. Eine gewisse Zahl *a* ist zertheilet in zwey Theile, welche sich gegen einander verhalten wie 3 gegen 11. Wann man den kleinern Theil *Cubi*ret, und den grössern *quadri*ret, das *Quadrat* und den *Cubum* zusammen *addi*ret, so giebt dieses unter allen die kleineste Summa; Dann wann man die Zahl *a* in zwey andere Theile zertheilen wolte, es sey in welcher *Proportion* es wolle, so würde doch die Summa des *Cubi* und *Quadrats* allezeit grösser kommen. Wird gefragt nach der Zahl *a* und deren Theile? Facit *a* ist $11\frac{11}{27}$. und die Theile sind $\frac{66}{27}$. $\frac{242}{27}$.

16. Herrn *Johann Hinrich Wolgemuht* zum Andencken.

*J*uch! immer frisch und Wolgemuht,
O Bruder Claus, lass jtzt dein Sorgen,
*H*at man gleich nicht viel Geld und Gut,
*A*uff gutes Glück man hoffe Morgen,
*N*ur lasset heut uns frölich seyn,
*N*ach Hertzens-Wunsch uns lustig machen.
*H*ör Bruder Hans, ich geb' es ein,
*I*ch weiss schon Raht (sprach Claus) den Sachen,
*N*un sind hier Neun und viertzig Marck
*R*echt just, die Summa von uns beyden,
*I*n unsern Taschen: Lass den Quarck
*C*urasi gehn ein Theil mit Freuden.
*H*ans leg du *Radix Trigonal*,
*W*ie es aus deinem Theil entspringet,
*O*b ich dabey aus meiner Zahl
*L*eg *Radix Quadrat*: dieses bringet
*G*antz recht die gröste Summa hier,
*E*y lasset uns nun freudig leben
*M*it diesem Post beym Wein und Bier,
*U*nd wer die Rechnung weiss zu geben,
*H*ier unsers jeden Geldes Theil,
*T*rinck denn mit uns zu guter Weil.

17. Eine andere Zahl *a* ist in Zwey Theile zertheilet, welche in *proportione tripla* stehen, wann man den kleinen Theil *Zens-Zensicè multiplici*ret, und den grössern *cubi*ret, die beyden *Pro-*

Digitized by Google

*ducten addi*ret, so kömmt die kleineste Summa, so unter andern Zertheilungen möglich seyn kan. Facit $a=27$. Die Theile $6\frac{3}{4}$. $20\frac{1}{4}$.

18. Man begehret die Zahl $75\frac{1}{9}$ in zween Theile zu zerlegen, wann man den kleinen *Zens-Zensicè multiplici*ret, und den grössern *cubi*ret, die *Product* zusammen *addi*ret dass die kleineste Summa komme, so unter allen möglich seyn kan. Facit $14\frac{1}{12}$. $61\frac{1}{36}$.

19. Zertheilet eine gewisse Zahl a in zween Theile, also dass der gröste Theil sei $32\frac{5}{32}$, wann man zum *Cubo* dieses Theils, den *Zens de Zens* des kleinern Theils *addi*ret, soll die Summa unter allen die kleineste seyn. Zuverstehen, wann man die Zahl a in zween andere Theil zertheilen wolte, den *Cubum* und *Zens de Zens addi*ren, so würden doch diese Summen allemahl grösser kommen, als die vorig kleineste. Was ist a für eine Zahl? Fac. $41\frac{11}{32}$.

20. Man hat eine Zahl a in zween Theile zertheilet, davon der eine Theil $608\frac{11}{32}$ grösser ist, als der andere; Wann man den *Zens de Zens* des kleinen, und das *Quadrat* des grössern Theils *addi*ret, so kömmt die möglichst kleineste Summa. Was ist a für eine Zahl? Fac.

21. Eine andere Zahl ist in zween Theile zertheilet, also dass die *Differentz* ihrer *Quadrat*en thut $702\frac{13}{27}$. Wann man den *Zens de Zens* des kleinen zum *Cubo* des grössern Theils *addi*ret, so kömmt die allerkleineste Summa. Ist die Frage; Was es für eine Zahl sey? und derselben Theile? Fac.

22. Eine gewisse Zahl a ist in drey Theil zerleget, davon stehen die beyden ersten oder kleinesten Theile in *proportione tripla*; Wann man den ersten Theil *Zens Zensicè multipl.* den zweyten *cubi*ret, und den dritten Theil *quadri*ret, die *Producta* zusammen *addi*ret, so kömmt die kleineste Summa, so unter allen andern Abtheilungen möglich seyn kan. Frage nach der Zahl a und deren Theile? Facit.

23. Herrn *Joachim Michael Brandt*, zum Andencken.

Jüngst wolten *Bernd* und *Cord* ein Handelschafft beginnen,
Ob sie mit gutem Glück, was könten dran gewinnen.
Als soll ihr beyder Summ die allergröste seyn,
Cord hundert sechtzig Marck legt mehr als *Berend* ein,
Hiemit war *Bernd content*: Doch wolt er es so passen,
Im Fall er seine Zahl recht wird *cubi*ren lassen,
Muss *Cord* denn sein *Quadrat* dem *Cubo* legen bey,

Digitized by Google

*M*it dem Beding, dass diss die kleinste Summa sey,
*I*st also der *Contract* nach beyder Sinn vollzogen.
Cord dachte hin und her, weil er dem Wein gewogen,
*H*ätt' er wohl Lust gehabt zum guten Weine-Kauff,
*A*n welchem kein Verlust, und wann kein Nutz darauff,
*E*s wäre denn gleichviel, man hätt' ihm selbst zum besten,
*L*ust-Frölich könt man seyn, mit guten lieben Gästen.
Bernd aber war bedacht, zu kauffen gut *Confect*,
*R*osienen, Mandeln und was sonsten lieblich schmeckt.
*A*ls würden sie bald eins, ein jeder solt' anlegen
*N*ach seinem Sinn sein Geld und dann der Handlung pflegen.
*D*en Rechner fragen sie: Was sie geleget ein?
*T*rifft er es recht, so ist sein Lohn Confect und Wein.

Erinnerung: Wann hier gesagt wird, dass ihr beyder Summ die gröste seyn soll, so muss man dabey betrachten, dass die Summa von dem *Cubo* der kleinsten und *Quadrat* der grössern Zahl, soll die kleinste seyn, welches aus der gegebenen *Differentz* 160. mag gefunden werden.

24. Findet drey Zahlen, davon *A* und *B* gegen einander stehen, wie 2 gegen 3. Wann man alle 3 Zahlen mit einander *multipl.* soll das *Product* seyn 1800. Wann man aber die 3 *producta ab*, *bc*, *ac addi*ret, solle die Summa die kleineste seyn. Was sind es für drey Zahlen gewesen? Fac. 10. 15. 12.

25. Findet vier Zahlen, davon *A* und *B* in *proportione Dupla*, *C* und *D* aber in *proportione Sesquialtera* stehen, deren *Product* wann man sie mit einander *multiplici*ret sei 780. und wann man ihre *Quadraten addi*ret, dass die allerkleinste Summa komme. Facit.

26. Zertheilet 30 in vier Theile, dass *a*, *b*, *c* sich gegen einander verhalten, wie 1. 2. 3. Wann man jeden Theil *cubi*ret, und die vier *Cubos addi*ret, dass die allerkleinste Summa komme. Fac. $6-1\sqrt{6}$. $12-2\sqrt{6}$. $18-3\sqrt{6}$. $6\sqrt{6}-6$.

27. Findet vier Zahlen, davon *a*, *b*, *c* sich verhalten, wie 1. 2. 3. und wann von der Summa der drey ersten 30. *subtrahi*ret, restiret die vierdte Zahl; Und wann man von der Summa der drey ersten, den *Cubum* von der vierten Zahl *subtrahi*ret, dass die möglichst-gröste Zahl restire. Facit $6+1\sqrt{6}$. $12+2\sqrt{6}$. $18+3\sqrt{6}$. $6+6\sqrt{6}$.

28. Man hat eine Ordnung in Zahlen, die erste Stätte ist 1357. Die zweite 987. Die dritte 685. Die vierte 451. &c. Welche ordentlich abnehmen. Es ist die Frage: In welcher Stätte und

Digitized by Google

Theil die kleineste Zahl komme, da es nicht mehr abnehmen kan; sondern wann man die Ordnung weiter *continuiren* wolte, hernach wieder zunehmen müste, auch welches die kleinste Zahl sey? Facit Es geschiehet in der $6\frac{19}{17}$ Stätte, und ist die kleinste Zahl $156\frac{14}{17}$.

29. Es ist ein *Parallelepipedum*, dessen cörperlicher Inhalt ist $1518\frac{3}{4}$. davon verhalten sich 2 Seiten gegen einander, wie 3 gegen 5. und die Summa der sechs Flächen auff allen Seiten sey unter allen die kleineste. Ist die Frage nach den dreyen Seiten? Facit 9. 15. $11\frac{1}{4}$.

30. Man begehret 40 in drey Theile zu zertheilen, davon die beyden ersten in *proportione Dupla* stehen; Wann man jedes *Product* von ihrer zweyen, durch den übrigen dritten Theil *dividi*ret, und die 3 *Quotienten addi*ret, dass die Summa die allerkleinste sey. Facit $\frac{200}{27}$. $\frac{400}{27}$. $\frac{240}{27}$.

31. Findet drey Zahlen, davon die beyden ersten in *Proportione dupla* stehen, und so man von der Summa der beyden ersten 20 *subtrahi*ret, die dritte Zahl restire; Wann man zwo derselben Zahlen mit einander *multipl.* und jedes *Product* durch die übrige Zahl *dividi*ret, dass die Summa der drey *Quotienten* abermahl die kleinste sey. Fac.

32. Findet eine solche Zahl, und zwar die grösseste so möglich seyn kan, wan man dieselbe in drey Theile zertheilet, davon die beyden ersten in *proportione dupla* stehen, und so man ferner jedes *Product* von ihrer zweyen, durch den übrigen Theil *dividi*ret, und die 3 *quotienten addi*ret, dass die Summa 48 bringe. Facit.

33. Zertheilet die Zahl 19. in drey Theile solcher Gestalt: Dass die beyden ersten sich gegen einander verhalten, wie 2 gegen 3. Wann man die Summa von ihrer zweyen, durch den übrigen dritten Theil *dividi*ret, und die 3 *quotienten addi*ret, dass die allerkleinste Summa komme? Fac.

34. Drey Zahlen der Regul *Detri* zu finden, davon die dritte 3 mehr thut als die zweyte, und das die Summa der zweyt- und dritten 5 mehr sey als die erste Zahl, und wann man den Regul-Satz ordentlich ausrechnet, so soll das *Facit* oder der vierdte Zahl die möglichst kleineste seyn, Wie lautet der Regul-Satz?

4 —— 3 —— 6. *Facit* $4\frac{1}{2}$. Dieses Facit $4\frac{1}{2}$ ist die kleineste Zahl so möglich seyn kan, dann wann man drey andere Zahlen von gleicher Beschaffenheit nehmen wolte, so würde das Facit immer grösser kommen. Als wann genommen würde.

Digitized by Google

6 —— 4 —— 7. *Facit* $4\frac{2}{3}$. Dieses ist grösser als $4\frac{1}{2}$. und kan man es solcher Gestalt mit andern Zahlen mehr versuchen. Als:

10 —— 6 —— 9. *Facit* $5\frac{2}{5}$. ist abermahl mehr als $4\frac{1}{2}$ &c.

Wann aber die Auffgabe solcher Gestalt vorgegeben würde, dass die dritte Zahl 5 mehr seyn solte als die Zweyte, und die Summ der zweit- und dritten, 9 mehr seyn solte, als die erste Zahl. So ist die Frage: Was es vor Zahlen seyn müsten. Fac.

35. Man begehret drey Zahlen zu suchen, davon die beyden ersten in gewisser *Proportion* stehen, das *Product* der 3 Zahlen, wann man selbige miteinander *multipl.* sei $= a$; Wann man aber jede Zahl *quadri*ret, und die 3 *Quadrata addi*ret, soll die Summa die möglichst-kleineste seyn. Dieses begehrt man in *rational*-Zahlen zu suchen. Facit Die *Proportio* sey *Septupla*, $a = 945$, so sind die 3 Zahlen 3. 21. 15. Oder es sey $a = 35000$. so sind die 3 Zahlen 10. 70. 50. Und andere mehr.

36. Es sind 3 Zahlen, wann man selbige miteinander *multipl.* kommen 700: Die erste und dritte stehen gegen einander in *proportione Septupla*; und wann man die *Quadrata* von den dreyen Zahlen *addi*ret, so ist die Summa unter allen die kleineste. Was sind es vor 3 Zahlen? Fac.

37. Die Zahl 100 begehret man in 5 Theile zu zertheilen, also dass sich verhalte a gegen b wie 14. gegen 13. c gegen d wie 5 gegen 4. und e sey der Rest, und soll das *Product* von $a^5 b^4 c^3 d^2 e$ das grösseste seyn. Facit.

38. Es sind zwo Zahlen, wann man zu der Summ ihrer *Quadr*aten das *Product* der beyden Zahlen *addi*ret, kommen 688. Wann man aber den *cubum* der kleinen zum *Quadrat* des grössern *addi*ret, so kömmt die kleineste Summa so möglich seyn kan. Was sind es für 2 Zahlen? Facit.

39. Findet eine solche Zahl, wann man dieselbe in zwey Theile zerleget, und den *Cubum* des kleinern zum *Quadrat* der grössern *addi*ret, so kömmt die kleineste Summa so möglich seyn kan. Was sind es für 2 Zahlen? Facit.

40. Findet eine solche Zahl, wann man dieselbe in zwey Theile zerleget, und den *Cubum* des kleinern zum *Quadrat* des grössern *addi*ret, dass die Summa die möglichst kleineste sey, jedoch dass sie noch $6\frac{2}{3}$ mahl so viel sey, als das *Product*, wann man beyde Theile *multipl.* Ist die Frage nach der Zahl und deren Theile. Fac.

41. Es ist eine Zahl, wann man dieselbe in zwey ungleiche Theil zertheilet, den kleinern Theil *cubi*ret, und den grössern

Digitized by Google

*quadri*ret, beide zusammen *addi*ret, so ist die Summa unter allen die Kleineste, doch ist sie 15$\frac{20}{37}$ mahl so gross, als die erstgemeldte Zahl. Welche ist dieselbige, und deren Theile? Fac.

42. Die Zahl 322$\frac{20}{37}$. begehret man solcher Gestalt in 3 Theile zu zertheilen, wann man den ersten oder kleinesten Theil *Zens Zensicé multipl.* den zweyten *cubi*ret, und den dritten *quadri*ret, die drey *Producta* zusammen *addi*ret, dass die Summa aus allen die kleineste sey. Welches sind die Theile? Facit.

43. Man erwehle eine beliebige Zahl *a*, und zertheilet dieselbe in drey Theile; Wann man den *Zens de Zens* der ersten oder kleinsten Zahl, den *Cubum* der zweyten, und das *Quadrat* der dritten Zahl zusammen *addi*ret, dass die Summa die kleinste sey, und begehret man dieses in gantzen zu finden. Welches ist die Zahl *a*, und deren Theile? Fac.

44. Noch begehret man eine gewisse Zahl *a* in drey Theile zu zertheilen, Wann man die beyden kleinere Theile mit einander *multiplici*ret, und das *Product* vom grössern Theil *subtrahi*ret, so restiren 97$\frac{227}{864}$. Wann man auch den *Zens de Zens* des ersten, den *Cubum* des zweyten und das *Quadrat* des dritten oder grösten Theils zusammen *addi*ret, so kömmt die kleineste Summe. Was ist *a* für eine Zahl und welches sind die Theile? Fac.

45. Man begehret die Zahl 666. solcher Gestalt in 5 *Partes* zu zertheilen, dass *A* und *B in proportione Dupla*, *C* und *D in proportione tripla* sich verhalten, wann man jeden Theil *cubi*ret, und die 5. *Cubos addi*ret, dass die Summa die möglichst kleineste sey. Welches sind die Theile? Fac.

Bey solchen und dergleichen Kunstreichen Auffgaben, muss man den Grund wohl erforschen, damit man ein fest und sicher *Fundament* habe, sonsten wird man sie schwerlich zur richtigen *Solution* bringen.

46. Eine gewisse Zahl ist in drey Theile zertheilet: Wann man den ersten oder kleinesten Theil *Zens-Zensicè multipl.* den mittelsten *cubi*ret, und den dritten *quadri*ret, die *Producta addi*ret, so ist Summa unter allen die kleineste, jedoch ist sie noch 51 mahl so gross, als die erst gemelte Zahl. Ist die Frage nach derselben, wie auch deren Theile? Facit.

47. Es ist eine Zahl, und zwar die gröste so sein kan, in drey Theile zertheilet; Wann man den ersten Theil *Zens-Zensicè multipl.* den zweiten *cubi*ret, und den dritten *quadri*ret, die

Digitized by Google

drey *Producta* zusammen *addi*ret, so kommen 1554464925. Hieraus hat man die Zahl, und deren Theile zu finden. Facit.

Wann es zum Nutzen geht, wil man das Gröste zählen,
Beym Schaden und Verlust, das kleinste gerne wehlen;
Wer diss nicht treffen kan, der such die Mittel-Strass,
Das Mittel sichrer ist, kommt besser offt zu pass.

XXII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Die folgende Aufgabe, von der mir gelegentlich eine sehr weitläufige Auflösung entgegentrat:

Durch zwei Punkte einer Ellipse sind Berührende an dieselbe gelegt. Es sollen die Coordinaten ihres Durchschnittspunkts und die Gleichung des durch diesen Punkt gehenden Durchmessers gesucht werden. Man soll ferner die Coordinaten des Punktes, in welchem der Durchmesser und die durch die beiden Berührungspunkte gehende Sehne sich schneiden, bestimmen und zeigen, dass dieser Punkt die Sehne halbirt.

wird auf die leichteste und eleganteste Weise durch Einführung der Winkel gelöst, welche ich in der Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX. mit dem Namen Anomalien belegt habe. Sind nämlich u_0, u_1 die Anomalien der beiden gegebenen Punkte der Ellipse

Digitized by Google

und folglich $a\cos u_0$, $b\sin u_0$ und $a\cos u_1$, $b\sin u_1$ deren Coordinaten, so sind (a. a. O. §. 4. S. 375.) die Gleichungen der Berührenden der Ellipse in diesen Punkten:

$$\frac{x}{a}\cos u_0 + \frac{y}{b}\sin u_0 = 1,$$

$$\frac{x}{a}\cos u_1 + \frac{y}{b}\sin u_1 = 1.$$

Folglich erhält man für die Coordinaten x', y' des Durchschnittspunkts der beiden Berührenden sogleich:

$$\frac{x'}{a}\sin(u_0-u_1)=\sin u_0-\sin u_1=2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1),$$

$$\frac{y'}{b}\sin(u_0-u_1)=\cos u_1-\cos u_0=2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1);$$

also:

$$x'=a\frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)},\quad y'=b\frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}.$$

Die Gleichung des durch den Punkt $(x'y')$ gehenden Durchmessers der Ellipse ist also:

$$y=\frac{b}{a}x\tang\tfrac{1}{2}(u_0+u_1).$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Sehne sind:

$$\tfrac{1}{2}a(\cos u_0+\cos u_1)=a\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

$$\tfrac{1}{2}b(\sin u_0+\sin u_1)=b\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1);$$

folglich ist die Gleichung des durch diesen Punkt gehenden Durchmessers der Ellipse:

$$y=\frac{b}{a}x\tang\tfrac{1}{2}(u_0+u_1).$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so sieht man, dass die durch den Durchschnittspunkt der Berührenden und den Mittelpunkt der Sehne gezogenen Durchmesser durch dieselbe Gleichung charakterisirt werden, folglich mit einander zusammenfallen, womit der Satz bewiesen und daher Alles auf die einfachste und leichteste Weise erledigt ist.

Digitized by Google

Von dem Herausgeber.

Für Aufgaben von der Art der folgenden:

Von einem Dreieck sei eine Seite a, der ihr gegenüberliegende Winkel A und der Radius r des einbeschriebenen Kreises gegeben; man soll das Dreieck bestimmen.

begegnet man öfters ziemlich weitläufigen Auflösungen, wogegen die in meiner Abhandlung Thl. XXXVI. Nr. XVIII. sich findenden Formeln meistens die Auflösung auf der Stelle liefern. Bezeichnen wir nämlich den Halbmesser des umschriebenen Kreises wie dort durch R, so ist (a. a. O. §. 2. S. 326.):

$$a = 2R\sin A,\quad R = \frac{a}{2\sin A};$$

also R aus den Datis der Aufgabe leicht zu berechnen. Nun ist aber (a. a. O. §. 3. S. 329.):

$$r = 4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{4R\sin\tfrac{1}{2}A}.$$

Weil nun

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(B-C) - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(B+C) = \sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C$$

ist, so ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \sin\tfrac{1}{2}A + \frac{r}{2R\sin\tfrac{1}{2}A},$$

also $\tfrac{1}{2}(B-C)$ bestimmt; und weil man nun $\tfrac{1}{2}(B+C) = 90^0 - \tfrac{1}{2}A$ kennt, so sind B, C gegeben, also das Dreieck mittelst der einfachsten Regeln der ebenen Trigonometrie bestimmbar, die Aufgabe also gelöst.

Leicht erhält man unmittelbar in den gegebenen Stücken ausgedrückt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \sin\tfrac{1}{2}A + \frac{2r}{a}\cos\tfrac{1}{2}A.$$

Bemerkung zu Thl. XLV. Nr. XI.

Von Herrn Professor Dr. Dienger in Carlsruhe.

Von den zwei Kurvenzweigen entspricht nur der untere

($u < \sqrt{3}$) den Bedingungen der Aufgabe (kleinster Widerstand). Dies ergibt sich auch sofort aus den bekannten Regeln der Variationsrechnung *). Da nämlich:

$$y = c\frac{(1+u^2)^2}{u^3}, \quad x = c\left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4}\right] + c';$$

so ist:

$$\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{(1+u^2)^2}{u^3} + c\frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4}\cdot\frac{\partial u}{\partial c}, \quad 0 = l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4} + c\frac{(1+u^2)(u^2-3)}{5}\cdot\frac{\partial u}{\partial c};$$

$$\frac{\partial y}{\partial c'} = c\frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4}\cdot\frac{\partial u}{\partial c'}, \qquad 0 = c\frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5}\cdot\frac{\partial u}{\partial c'} + 1;$$

daraus:

$$\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{(1+u^2)^2}{u^3} - 4\left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4}\right], \quad \frac{\partial y}{\partial c'} = -u.$$

Nun muss, wenn ein Minimum vorhanden sein soll, m so bestimmt werden können, dass nicht

$$\frac{\partial y}{\partial c} + m\frac{\partial y}{\partial c'} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

ist innerhalb der Kurve, wo m eine Konstante. Es müsste also sein:

$$m = \frac{(1+u^2)^2}{u^4} - \left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4}\right].$$

Nun ist der Differentialquotient der zweiten Seite negativ; also nimmt dieselbe zu mit abnehmendem u. Für $u = \sqrt{3}$ ist sie $\frac{16}{9} - [\frac{1}{2}l(3) + \frac{5}{12}]$. Nimmt man also m kleiner als diese Grösse, so ist die Gleichung (a) nicht möglich für $u < \sqrt{3}$. Ferner ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\frac{yu^3}{1+u^2} = \frac{2yu(3-u^2)}{(1+u^2)^3},$$

welche Grösse nur dann positiv ist, wenn $u < \sqrt{3}$.

Damit ist die Behauptung erwiesen.

---

*) Bei meiner oben angeführten Abhandlung, auf welche sich diese Bemerkungen beziehen, sollte, wie aus der ganzen Abhandlung erhellet, der Gebrauch der eigentlichen Variationsrechnung ganz ausgeschlossen werden. G.

Digitized by Google

Ueber eine neue Limite.

Von Herrn Professor Franz Unferdinger in Wien.

Dass der Ausdruck

$$(1) \ldots\ldots \quad \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{2m}$$

für unendlich wachsendes m immer zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{2}$ enthalten bleibt, ist leicht zu erkennen und wurde schon oft erwähnt, namentlich bei der Discussion der harmonischen Reihe. Im Folgenden soll die Grenze bestimmt werden, welcher sich der Ausdruck (1) mit zunehmenden Werthen von m immer mehr nähert.

Für $n<m$ ist:

$$\frac{1}{m+n}=\frac{1}{m}\left\{1-\left(\frac{n}{m}\right)+\left(\frac{n}{m}\right)^2-\left(\frac{n}{m}\right)^3+\ldots\right\};$$

setzen wir:

$$(2) \ldots \quad \overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{m+n}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{2m},$$

so wird auch:

$$\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{m+n}=\frac{1}{m}\left\{m-S\left(\frac{n}{m}\right)+S\left(\frac{n}{m}\right)^2-S\left(\frac{n}{m}\right)^3+\ldots\right\}$$

$$=1-\frac{1}{m^2}Sn+\frac{1}{m^3}Sn^2-\frac{1}{m^4}Sn^3+\ldots,$$

und für $m=\infty$:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{Lim}\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{m+n}$$

$$=1-\mathrm{Lim}\frac{1}{m^2}Sn+\mathrm{Lim}\frac{1}{m^3}Sn^2-\mathrm{Lim}\frac{1}{m^4}Sn^3+\ldots$$

Nun ist bekanntlich, wenn B_1, B_3, ... die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten:

$$\overset{m}{\underset{1}{S}}n^k=\frac{m^{k+1}}{k+1}+\tfrac{1}{2}m^k+\tfrac{1}{2}\binom{k}{1}B_1m^{k-1}-\tfrac{1}{4}\binom{k}{3}B_3m^{k-3}+\ldots,$$

also:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{Lim}\frac{1}{m^{k+1}}\overset{m}{\underset{1}{S}}n^k=\frac{1}{k+1};$$

setzt man hierin $k=1, 2, 3, \ldots$ und substituirt in (3), so folgt:

$$(5) \ldots \quad \operatorname{Lim} \overset{m}{\underset{1}{S}} \frac{1}{m+n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots = \lg 2,$$

wobei lg den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Es ist also:

$$(6) \ldots \operatorname{Lim} \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m} \right\} = \lg 2.$$

Auf dieselbe Art findet man auch:

$$(7) \ldots \operatorname{Lim} \left\{ \frac{1}{m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{m+2.\frac{1}{2}} + \frac{1}{m+3.\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{m+2m.\frac{1}{2}} \right\} = \lg 4,$$

$$(8) \ldots \operatorname{Lim} \left\{ \frac{1}{m+\frac{1}{3}} + \frac{1}{m+2.\frac{1}{3}} + \frac{1}{m+3.\frac{1}{3}} + \ldots + \frac{1}{m+3m.\frac{1}{3}} \right\} = \lg 8,$$

$$(9) \operatorname{Lim} \left\{ \frac{1}{m+a} + \frac{1}{m+2a} + \frac{1}{m+3a} + \ldots + \frac{1}{m+\frac{m}{a}.a} \right\} = \frac{\lg 2}{a}, \quad a>0.$$

Von der Richtigkeit der Gleichung (6) kann man sich auch auf folgende Art überzeugen. Bekanntlich ist die Constante des Integral-Logarithmus:

$$(10) \ldots \operatorname{Lim}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \lg m) = 0{\cdot}5772\ldots,$$

also ist auch:

$$\operatorname{Lim}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2m} - \lg 2m) = 0{\cdot}5772\ldots$$

oder:

$$\operatorname{Lim}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} - \lg m - \lg 2) = 0{\cdot}5772,$$

$$0{\cdot}5772\ldots + \operatorname{Lim}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} - \lg 2\right) = 0{\cdot}5772\ldots,$$

mithin, wie oben:

$$(6) \ldots \operatorname{Lim}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m}\right) = \lg 2.$$

Digitized by Google

Von dem Herausgeber.

Aufgabe.

Dreiecke zu bestimmen, deren Seiten rational sind, und in denen die Summe der drei Seiten dreimal so gross ist als die Höhe in Bezug auf eine dieser Seiten.

Auflösung.

Die drei Seiten des Dreiecks seien x, y, z; die Höhe in Bezug auf die Seite x sei u. Setzen wir wie gewöhnlich:

$$x+y+z=2s,$$

so ist der Inhalt des Dreiecks bekanntlich:

$$\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)};$$

und da der Inhalt auch $\frac{1}{2}ux$ ist, so erhalten wir die Gleichung:

$$u^2x^2=4s(s-x)(s-y)(s-z).$$

Nach der Bedingung der Aufgabe ist:

$$x+y+z=3u,$$

also $3u=2s$, $u=\frac{2}{3}s$, $u^2=\frac{4}{9}s^2$; folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\tfrac{4}{9}s^2x^2=4s(s-x)(s-y)(s-z),$$

also:

$$sx^2=9(s-x)(s-y)(s-z),\quad x=3\sqrt{\frac{(s-x)(s-y)(s-z)}{s}}.$$

Setzt man jetzt $y-z=v$, so hat man die Gleichungen:

$$y+z=2s-x,\quad y-z=v;$$

aus denen sich:

$$2y=2s-x+v,\quad 2z=2s-x-v;$$

$$2(s-y)=x-v,\quad 2(s-z)=x+v;$$

also:

$$(s-y)(s-z)=\tfrac{1}{4}(x^2-v^2),$$

folglich nach dem Obigen:

$$x=\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{(s-x)(x^2-v^2)}{s}},\quad 4x^2s=9(s-x)(x^2-v^2);$$

Digitized by Google

$$x^2-v^2=\frac{4x^2s}{9(s-x)}, \quad v^2=x^2-\frac{4x^2s}{9(s-x)}=\frac{x^2(5s-9x)}{9(s-x)};$$

folglich:

$$v=\frac{x}{3}\sqrt{\frac{5s-9x}{s-x}}$$

ergiebt; also, wenn wir

$$\frac{5s-9x}{s-x}=w^2$$

setzen:

$$v=\tfrac{1}{3}wx.$$

Leicht erhält man:

$$s=\frac{w^2-9}{w^2-5}x,$$

folglich nach dem Obigen:

$$2y=\frac{2(w^2-9)}{w^2-5}x-x+\tfrac{1}{3}wx,$$

$$2z=\frac{2(w^2-9)}{w^2-5}x-x-\tfrac{1}{3}wx;$$

also nach leichter Rechnung:

$$y=\frac{39+5w-3w^2-w^3}{6(5-w^2)}x,$$

$$z=\frac{39-5w-3w^2+w^3}{6(5-w^2)}x.$$

Folglich sind die drei Seiten des Dreiecks:

$$x=x,$$

$$y=\frac{39+5w-3w^2-w^3}{6(5-w^2)}x,$$

$$z=\frac{39-5w-3w^2+w^3}{6(5-w^2)}x.$$

Leicht erhält man hieraus:

$$x+y+z=\frac{18-2w^2}{5-w^2}x=\frac{2(w^2-9)}{w^2-5}x,$$

folglich nach dem Obigen:

$$x+y+z=2s,$$

wie es sein muss.

Digitized by Google

Setzt man z. B. $w=0$, so ist:

$$x=x,\quad y=\frac{13}{10}x,\quad z=\frac{13}{10}x;$$

also:

$$2s=x+y+z=\frac{36}{10}x,\quad s=\frac{18}{10}x=\frac{9}{5}x;$$

folglich:

$$s-x=\frac{18}{10}x-x=\frac{8}{10}x,$$

$$s-y=\frac{18}{10}x-\frac{13}{10}x=\frac{5}{10}x,$$

$$s-z=\frac{18}{10}x-\frac{13}{10}x=\frac{5}{10}x;$$

folglich nach dem Obigen:

$$u^2x^2=4\cdot\frac{18}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}x^4=\frac{4.144.25}{10000}x^4,$$

und hieraus:

$$u=\frac{2.12.5}{100}x=\frac{6}{5}x,\quad 3u=\frac{18}{5}x;$$

folglich nach dem Obigen $3u=2s$, wie es sein soll.

Natürlich muss man w so annehmen, dass die drei Seiten positiv werden, was wir jetzt hier nicht weiter verfolgen wollen.

Bemerkung über die in Thl. XLVI. Nr. VII. aufgelöste Aufgabe.

Von Herrn A. Barsky, Studirenden an der Universität in Odessa.

Der vorstehend genannte Aufsatz liefert eine Auflösung der folgenden, zuerst von Herrn Nicola Cavalieri San Bertolo in den Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei. Anno XIX. Sess. III^a. 24. Febbr. 1866. behandelten Aufgabe:

> Zwei im Punkte A unter dem Winkel α sich schneidende Gerade AX und AY werden von einer dritten Geraden RS in den Punkten B und C so geschnitten, dass das Dreieck $CAB=k^2$ ist; verbindet man nun den Mittelpunkt P von BC mit A und theilt AP in N so, dass

$$NP:AP = 1:h$$

ist, so soll der geometrische Ort des Punktes N für alle Lagen von RS bestimmt werden, bei denen Dreieck $CAB = k^2$ ist.

Diese Aufgabe ist ein besonderer Fall einer allgemeinern, die sich im Wesentlichen ganz nach derselben Methode lösen lässt, wie die speciellere von Herrn Thiel behandelte Aufgabe.

Die allgemeinere Aufgabe lässt sich auf folgende Art aussprechen:

Zwei im Punkte A unter dem Winkel α sich schneidende Gerade AX und AY werden von einer dritten Geraden RS in den Punkten B und C so geschnitten, dass Dreieck $CAB = k^2$ ist; theilt man nun BC in P so, dass

$$CP:CB = 1:n$$

ist, verbindet P mit A und theilt AP in N so, dass

$$NP:AP = 1:h,$$

so soll der geometrische Ort des Punktes N für alle Lagen von RS bestimmt werden, bei denen Dreieck $CAB = k^2$ ist.

Die Auflösung ist dann dieselbe, wie bei Herrn Thiel, nur sind die Coordinaten von P:

$$\frac{1}{n} x_1, \quad \frac{n-1}{n} y_2;$$

und die von N:

$$x = \frac{h-1}{hn} x_1, \quad y = \frac{(h-1)(n-1)}{hn} y_2;$$

oder:

$$x = \frac{h-1}{hn} x_1, \quad y = \frac{2(h-1)(n-1)}{hnx_1} k^2 \operatorname{cosec} \alpha.$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist daher:

$$xy = 2(n-1)\left(\frac{h-1}{hn}\right)^2 k^2 \operatorname{cosec} \alpha,$$

welches die Gleichung einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist. Setzt man darin $n=2$, so erhält man die von Herrn Thiel gefundene Gleichung:

Digitized by Google

$$xy = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2 \operatorname{cosec} \alpha.$$

Die Gleichung dieser Hyperbel zwischen ihren Axen ist:

$$\left(\frac{x'}{\frac{2k(h-1)}{hn}\sqrt{(n-1)\cot\frac{1}{2}\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\frac{2k(h-1)}{hn}\sqrt{(n-1)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}}\right)^2 = 1,$$

also sind ihre Halbaxen:

$$a = \frac{2k(h-1)}{hn}\sqrt{(n-1)\cot\tfrac{1}{2}\alpha}, \quad b = \frac{2k(h-1)}{hn}\sqrt{(n-1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha};$$

und die Abscisse ihres Brennpunktes ist:

$$e = \frac{2k(h-1)}{hn}\sqrt{2(n-1)\operatorname{cosec}\alpha}.$$

Ist $\alpha = 90^0$, so ist diese Hyperbel auch gleichseitig, und ihre Gleichung ist:

$$x'^2 - y'^2 = 4(n-1)\left(\frac{h-1}{hn}\right)^2 . k^2.$$

Multiplicirt man die beiden Halbaxen mit einander, so erhält man:

$$ab = 4(n-1)\left(\frac{h-1}{hn}\right)^2 . k^2,$$

und folglich:

$$k^2 = \left(\frac{hn}{h-1}\right)^2 . \frac{ab}{4(n-1)},$$

was folgenden Lehrsatz giebt:

Zieht man vom Mittelpunkte A einer Hyperbel nach einem beliebigen Punkte N derselben eine Gerade, verlängert sie über N hinaus bis P, so dass

$$NP : AP = 1 : h$$

ist, und zieht durch P eine Gerade bis zum Durchschnitte mit beiden Asymptoten in B und C, so dass

$$PC : BC = 1 : n$$

ist, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ein constanter, nämlich:

$$k^2 = \left(\frac{hn}{h-1}\right)^2 . \frac{ab}{4(n-1)}.$$

Digitized by Google

Verallgemeinerung der Thl. XLVI. S. 359. mitgetheilten Summenformeln (4) und (5) und einige daraus sich ergebende specielle Resultate.

Von Herrn M. Curtze, ordentl. Lehrer am Königl. Gymnas. zu Thorn.

Die oben genannten beiden Formeln lassen eine bemerkenswerthe Erweiterung oder Verallgemeinerung zu, die ich mir hier noch mitzutheilen erlaube. Um die Formeln nicht in übergrosser Breite schreiben zu müssen, bediene ich mich durchweg des Summenzeichens.

In den beiden bekannten Formeln

$$\sum_1^p \cos(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)=\frac{\cos[\varphi+\frac{1}{2}(p-1)\psi].\sin\frac{1}{2}p\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}, \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$\sum_1^p \sin(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)=\frac{\sin[\varphi+\frac{1}{2}(p-1)\psi].\sin\frac{1}{2}p\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}, \quad . \; . \; . \; (2)$$

setze man der Reihe nach $p=1, 2, 3, \ldots, n-3, n-2, n-1$, und addire sämmtliche Gleichungen, so erhält man, wie man leicht übersieht, wenn man noch beiderseits mit $\sin\frac{1}{2}\psi$ multiplicirt:

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\cos(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)=\sum_1^{n-1}\cos[\varphi+\tfrac{1}{2}(\mu-1)\psi]\sin\tfrac{1}{2}\mu\psi,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\sin(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)=\sum_1^{n-1}\sin[\varphi+\tfrac{1}{2}(\mu-1)\psi]\sin\tfrac{1}{2}\mu\psi.$$

Jedes Product rechts verwandle man jetzt in eine Differenz zweier Sinusse oder Cosinusse resp., dann entsteht nach leichter Umformung:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\psi\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\cos(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)=\sum_1^{n}\sin[\varphi-\tfrac{1}{2}\psi+\overline{\mu-1}\,\psi]-n\sin(\varphi-\tfrac{1}{2}\psi),$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\psi\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\sin(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)=-\sum_1^{n}\cos[\varphi-\tfrac{1}{2}\psi+\overline{\mu-1}\,\psi]+n\cos(\varphi-\tfrac{1}{2}\psi).$$

Die Summen rechts gehören für $\varphi=\varphi-\frac{1}{2}\psi$, $\psi=\psi$, $p=n$ resp. zu Formel (2) und (1) und wir erhalten für sie bezüglich:

$$\frac{\sin[\varphi+\frac{1}{2}(n-2)\psi].\sin\frac{1}{2}n\psi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \quad \frac{\cos[\varphi+\frac{1}{2}(n-2)\psi].\sin\frac{1}{2}n\psi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Dies eingesetzt gibt endlich die Formeln:

$$(3)$$

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\cos(\varphi+\overline{\lambda-1})\psi=\frac{\sin[\varphi+\frac{1}{2}(n-2)\psi].\sin\frac{1}{2}n\psi-n\sin(\varphi-\frac{1}{2}\psi).\sin\frac{1}{2}\psi}{2\sin^2\frac{1}{2}\psi},$$

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\sin(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$=-\frac{\cos[\varphi+\frac{1}{2}(n-2)\psi].\sin\frac{1}{2}n\psi-n\cos(\varphi-\frac{1}{2}\psi).\sin\frac{1}{2}\psi}{2\sin^2\frac{1}{2}\psi}.$$

Setzt man hierin $\varphi=\pi$ und im Resultate für ψ wieder φ, so entsteht:

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\cos(\lambda-1)\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}(n-2)\varphi.\sin\frac{1}{2}n\varphi+n\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi},\ldots.(5)$$

(6)

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\sin(\lambda-1)\varphi=-\frac{\cos\frac{1}{2}(n-2)\varphi.\sin\frac{1}{2}n\varphi-n\sin\frac{1}{2}\varphi.\cos\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Setzt man dagegen $\psi=\varphi$, so erhält man die in der Ueberschrift genannten Formeln:

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\cos\lambda\varphi=\frac{\sin^2\frac{1}{2}n\varphi-n\sin^2\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi},\ \ldots\ldots(7)$$

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\sin\lambda\varphi=\frac{n\sin\varphi-\sin n\varphi}{4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}.\ \ldots\ldots(8)$$

Sie ergeben sich also aus diesen allgemeinen Formeln in der Gestalt, die ich denselben abweichend von Herrn Dorna gegeben habe. Setzt man weiter $\varphi=2\psi$, so entsteht, wenn man im Resultate für ψ wieder φ schreibt:

(9)

$$\sum_0^{n-1}(n-\lambda)\cos(\lambda+1)\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+2)\varphi.\sin\frac{1}{2}n\varphi-n\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi},$$

(10)

$$\sum_0^{n-1}(n-\lambda)\sin(\lambda+1)\varphi=-\frac{\cos\frac{1}{2}(n+2)\varphi.\sin\frac{1}{2}n\varphi-n\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Dagegen erhält man für $\psi=2\varphi$ die beiden Formeln:

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\cos(2\lambda-1)\varphi=\frac{\sin(n-1)\varphi.\sin n\varphi}{2\sin^2\varphi},\ldots(11)$$

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\sin(2\lambda-1)\varphi=-\frac{\cos(n-1)\varphi\sin n\varphi-n\sin\varphi}{2\sin^2\varphi}\ (12)$$

Setzt man aber in (7) und (8) $\varphi=2\varphi$, so entsteht:

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\cos2\lambda\varphi=\frac{\sin^2n\varphi-n\sin^2\varphi}{2\sin^2\varphi},\ \ldots(13)$$

$$\sum_1^{n-1}(n-\lambda)\sin2\lambda\varphi=\frac{n\sin2\varphi-\sin2n\varphi}{4\sin^2\varphi}\ldots\ldots(14)$$

Verbindet man endlich Formel (7) und (9) oder auch (8) und (10) durch Addition und Subtraction mit einander, so erhält man beide Mal übereinstimmend, wenn man noch 2φ statt φ schreibt:

Digitized by Google

$$\sum_{0}^{n-1}(n-\lambda)\cos(2\lambda+1)\varphi=\frac{\sin(n+1)\varphi.\sin n\varphi}{2\sin^2\varphi}\quad ..(15)$$

$$\sum_{0}^{n-1}(n-\lambda)\sin(2\lambda+1)\varphi=-\frac{\cos(n+1)\varphi.\sin n\varphi-n\sin\varphi}{2\sin^2\varphi}.\quad(16)$$

Aehnliche Formeln würden sich durch weitere Specialisirungen noch in Menge ergeben, wir sehen jedoch hiervon jetzt ab und wollen nur das Verfahren, das wir auf die Formeln (1) und (2) anwendeten, nochmals auf die Formeln (4) und (5) in Anwendung bringen. Zu dem Ende setzen wir in den genannten Formeln nach und nach für n resp. $m, m-1, m-2, \ldots, 4, 3, 2$ und addiren sämmtliche Resultate, das liefert:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\cos(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)$$

$$=\frac{\sum_{1}^{m}\sin[\varphi+\frac{1}{2}(\mu-2)\psi].\sin\frac{1}{2}\mu\psi-\frac{1}{2}m(m+1)\sin(\varphi-\frac{1}{2}\psi).\sin\frac{1}{2}\psi}{2\sin^2\frac{1}{2}\psi},$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\cos(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)$$

$$=-\frac{\sum_{1}^{m}\cos[\varphi+\frac{1}{2}(\mu-2)\psi].\sin\frac{1}{2}\mu\psi-\frac{1}{2}m(m+1)\cos(\varphi-\frac{1}{2}\psi).\sin\frac{1}{2}\psi}{2\sin^2\frac{1}{2}\psi};$$

wo rechts bezüglich $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\varphi-\frac{1}{2}\psi).\sin\frac{1}{2}\psi$ addirt und subtrahirt ist. Zerlegt man jetzt nach bekannten Formeln die Producte unter den Summenzeichen auf der rechten Seite in Differenzen, so erhält man nach leicht in die Augen springenden Umformungen:

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\cos(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)$$

$$=\frac{-\sum_{1}^{m}\cos(\varphi+\overline{\mu-1}\,\psi)+m\cos(\varphi-\frac{1}{2}\psi).\cos\frac{1}{2}\psi-m^2\sin(\varphi-\frac{1}{2}\psi)\sin\frac{1}{2}\psi}{2\sin^2\frac{1}{2}\psi},$$

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\sin(\varphi+\overline{\lambda-1}\,\psi)$$

$$=\frac{-\sum_{1}^{m}\sin(\varphi+\overline{\mu-1}\,\psi)+m\sin(\varphi-\frac{1}{2}\psi).\cos\frac{1}{2}\psi+m^2\cos(\varphi-\frac{1}{2}\psi)\sin\frac{1}{2}\psi}{2\sin^2\frac{1}{2}\psi}.$$

Führt man die Werthe der Summen auf der rechten Seite nach Gleichung (1) und (2) ein, so erhält man endlich:

Digitized by Google

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\cos(\varphi+\overline{\lambda-1}\psi) \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}-\cos[\varphi+\frac{1}{2}(m-1)\psi].\sin\frac{1}{2}m\psi+m\cos(\varphi-\frac{1}{2}\psi)\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi\\ -m^2\sin(\varphi-\frac{1}{2}\psi)\sin^2\frac{1}{2}\psi\end{array}\right\}}{2\sin^3\frac{1}{2}\psi},$$

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\sin(\varphi+\overline{\lambda-1}\psi) \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}-\sin[\varphi+\frac{1}{2}(m-1)\psi].\sin\frac{1}{2}m\psi+m\sin(\varphi-\frac{1}{2}\psi)\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi\\ +m^2\cos(\varphi-\frac{1}{2}\psi)\sin^2\frac{1}{2}\psi\end{array}\right\}}{2\sin^3\frac{1}{2}\psi}.$$

Setzt man hierin $\psi=2\varphi$, so entsteht, wie leicht zu sehen:

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\cos(2\lambda-1)\varphi=\frac{m\sin2\varphi-\sin2m\varphi}{2\sin^3\varphi}, \quad (19)$$

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\sin(2\lambda-1)\varphi=\frac{m^2\sin^2\varphi+\sin^2 m\varphi}{2\sin^3\varphi}. \quad (20)$$

Ist dagegen $\psi=\varphi$, so entsteht:

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\cos\lambda\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

$$=\frac{m\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi-m^2\sin^3\frac{1}{2}\varphi-\cos\frac{1}{2}(m+1)\varphi\sin\frac{1}{2}m\varphi}{2\sin^3\frac{1}{2}\varphi},$$

$$\sum_{1}^{m-1}(m-\lambda)(m-\lambda+1)\sin\lambda\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

$$=\frac{m(m+1)\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi-\sin\frac{1}{2}(m+1)\varphi\sin\frac{1}{2}m\varphi}{2\sin^3\frac{1}{2}\varphi},$$

u. s. w. Die Vergleichung von Formel (14) und (19) liefert noch die interessante Beziehung:

(23)

$$\sin\varphi\sum_{1}^{n-1}(n-\lambda)(n-\lambda+1)\cos(2\lambda-1)\varphi=2\sum_{1}^{n-1}(n-\lambda)\sin2\lambda\varphi.$$

Von dem Herausgeber.

Drei Gleichungen von der Form:

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$
$$x+y+z=b,$$
$$y-z=c$$

würde man wohl am Besten auf folgende Art lösen:

$$x+2y=b+c,\quad x+2z=b-c;$$

$$y=\frac{b+c-x}{2},\quad z=\frac{b-c-x}{2};$$

$$x^2+\frac{(b+c-x)^2+(b-c-x)^2}{4}=a^2,$$

$$x^2+\frac{b^2+c^2+x^2-2bx}{2}=a^2,$$

$$3x^2-2bx=2a^2-(b^2+c^2),$$

$$x^2-\tfrac{2}{3}bx=\frac{2a^2-(b^2+c^2)}{3},$$

$$x=\frac{b\pm\sqrt{6a^2-2b^2-3c^2}}{3},$$

$$y=\frac{2b+3c\mp\sqrt{6a^2-2b^2-3c^2}}{6},$$

$$z=\frac{2b-3c\mp\sqrt{6a^2-2b^2-3c^2}}{6};$$

mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander.

Bei allen solchen Aufgaben ist auf die Beziehung der oberen und unteren Zeichen mit der grössten Sorgfalt zu achten, was von Schülern sehr oft nicht geschieht; deshalb als Beispiel diese gelegentliche sehr elementare Mittheilung.

Druckfehler.

Theil XXIV. Seite 83. Z. 4. statt $\mathfrak{P}_1+\Sigma m(\mathfrak{z}^2+x^2)$ setze man $\mathfrak{P}_1=\Sigma m(\mathfrak{z}^2+x^2)$.

Theil XLVI. Seite 433. Z. 1. statt $n-m+p$ s. m. $n-m+1$.

„ „ „ 435. Z. 1. statt $c_5 c_6$ s. m. $C_5 C_6$.

„ „ „ 451. Z. 9. 10. 11. 12. v. u. ist statt 2^5 überall 2^e zu setzen.

„ „ „ 483. Z. 19. satt 4.21 s. m. 7.21.

Digitized by Google

XXIII.

Die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks, analytisch behandelt.

Von

Herrn Hofgerichts-Registrator *Carl Metzler*
in Darmstadt.

---

§. 1.

ABC stellt ein beliebiges Dreieck vor, die Winkel desselben sind *A*, *B*, *C*, die gegenüberstehenden Seiten *a*, *b*, *c*. Die Linie *c* liegt in der Abscissenaxe. Der Anfangspunkt in der Spitze *A*. Das System ist rechtwinklig. α, β sind die Coordinaten der Spitze *C* des Dreiecks. (Taf. VI. Fig. 1.).

Vorausgesetzt wird, dass die Höhen, die Senkrechten aus der Mitte der Seiten, die Transversalen und die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks in einem Punkte sich schneiden.

§. 2.

Schneidepunkt der Höhen des Dreiecks (x', y').
(Taf. VI. Fig. 2.).

Die Gleichung der Senkrechten aus der Spitze *C* ist $x' = \alpha$.

Die Gleichung der Senkrechten aus der Spitze *B* auf die Seite *b* ist, da sie durch den Punkt $(c, 0)$ geht und auf der Linie *b*, deren Gleichung $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ ist, senkrecht steht, $y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - c)$.

Digitized by Google

Setzt man, um den Schneidepunkt der Höhen zu finden, in den resp. Gleichungen x und y gleich, so erhält man:

$$x' = \alpha; \quad y' = -\frac{\alpha}{\beta}(\alpha - c) = \frac{\alpha}{\beta}(c - \alpha).$$

§. 3.

Schneidepunkt der Senkrechten aus den Mitten der Seiten (x'', y''), (Taf. VI. Fig. 3.). (Mittelpunkt des umschriebenen Kreises).

Die Gleichung der Senkrechten aus der Mitte der Seite c ist $x = \frac{1}{2}c$.

Die Gleichung der Linie b ist $y = \frac{\beta}{\alpha}x$. Die Coordinaten des Mittepunktes dieser Linie sind $y = \frac{1}{2}\beta$, $x = \frac{1}{2}\alpha$. Die Gleichung der Senkrechten aus der Mitte von b ist also:

$$y - \tfrac{1}{2}\beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Den Schneidepunkt dieser beiden Senkrechten findet man, wenn man in ihren resp. Gleichungen x und y einander gleich setzt; man erhält:

$$x'' = \tfrac{1}{2}c, \quad y'' = \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{c-\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - c\alpha}{2\beta} = \frac{b^2 - c\alpha}{2\beta}.$$

§. 4.

Schneidepunkt der Transversalen des Dreiecks (x''', y'''). (Taf. VI. Fig. 4.).

Die Linie, die die Mitte $\left(\frac{c+\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ *) der Seite a mit dem Anfangspunkte (0, 0) verbindet, hat zur Gleichung $y = \frac{\beta}{\alpha + c}x$.

Die Linie, die die Spitze B (c, 0) mit der Mitte $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ der Seite b verbindet, hat zur Gleichung $y = \frac{\beta}{\alpha - 2c}(x - c)$.

---

*) $\alpha + \frac{c-\alpha}{2} = \frac{c+\alpha}{2}$.

Digitized by Google

Setzt man, um den Schneidepunkt beider Linien zu finden, x und y in beiden Gleichungen gleich, so erhält man:

$$x''' = \frac{\alpha + c}{3}, \quad y''' = \frac{\beta}{3}.$$

§. 5.

Schneidepunkt der die Winkel des Dreiecks halbirenden Linien (x^{IV}, y^{IV}), (Taf. VI. Fig. 5.). (Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises).

Die Gleichung der den Winkel A halbirenden Linie AE ist, wenn man HG mit β' bezeichnet, da diese Linie durch A geht:

$$y = \frac{\beta'}{\alpha} x.$$

Die Gleichung der den Winkel B halbirenden Linie BF ist, wenn man JG mit β'' bezeichnet, da sie durch die Punkte B $(c, 0)$ und J (α, β'') geht:

$$y = \frac{\beta''}{\alpha - c}(x - c).$$

Um nun β' und β'' aus diesen Gleichungen auszuscheiden und statt ihrer β einzuführen, erwäge man, dass, da AE und BF die Winkel A und B halbiren, folgende Proportionen stattfinden:

$$AC : AG = CH : HG \quad \text{und} \quad BC : GB = CJ : JG,$$

oder:

$$b : \alpha = \beta - \beta' : \beta' \quad \text{und} \quad a : c - \alpha = \beta - \beta'' : \beta'',$$

oder:

$$b + \alpha : \alpha = \beta - \beta' + \beta' : \beta' \quad \text{und} \quad a + c - \alpha : c - \alpha = \beta - \beta'' + \beta'' : \beta'',$$

das ist:

$$b + \alpha : \alpha = \beta : \beta' \quad \text{und} \quad a + c - \alpha : c - \alpha = \beta : \beta'';$$

es ist also:

$$\beta' = \frac{\alpha\beta}{b + \alpha} \quad \text{und} \quad \beta'' = \frac{(c - \alpha)\beta}{a + c - \alpha}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen oben, so ist:

$$y = \frac{\beta}{b + \alpha} x \quad \text{und} \quad y = \frac{(c - \alpha)\beta}{(a + c - \alpha)(\alpha - c)}(x - c) = \frac{\beta}{\alpha - a - c}(x - c).$$

Setzt man, um den Schneidepunkt beider Linien zu finden, x und y in den resp. Gleichungen gleich, so erhält man:

$$y^{IV}=\frac{\beta c}{a+b+c},\quad x^{IV}=\frac{(\alpha+b)c}{a+b+c};$$

oder, wenn man $a+b+c=s$ setzt:

$$y^{IV}=\frac{\beta c}{s},\quad x^{IV}=\frac{(\alpha+b)c}{s}.$$

Setzt man für die Seite a ihren Werth $\sqrt{b^2+c^2-2\alpha c}$, so ist, da dieselbe immer positiv ist:

$$y^{IV}=\frac{\beta c}{b+c+\sqrt{b^2+c^2-2\alpha c}},\quad x^{IV}=\frac{(\alpha+b)c}{b+c+\sqrt{b^2+c^2-2\alpha c}}.$$

Entfernung je zwei dieser Schneidepunkte von einander.

§. 6.

Die Entfernung der Punkte (x', y') und (x'', y'') ist:

$$\delta'^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2,$$

und setzt man hierfür ihre Werthe aus §. 2. und §. 3.:

$$\delta'^2=(\alpha-\frac{c}{2})^2+\left(\frac{\alpha c-\alpha^2}{\beta}-\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha c}{2\beta}\right)^2$$
$$=\frac{(2\alpha\beta-\beta c)^2+(3\alpha c-3\alpha^2-\beta^2)^2}{4\beta^2}.$$

§. 7.

Die Entfernung der Punkte (x', y') und (x''', y''') ist:

$$\delta''^2=(x'-x''')^2+(y'-y''')^2,$$

und setzt man für x und y ihre Werthe aus §. 2. und §. 4.:

$$\delta''^2=(\alpha-\frac{\alpha+c}{3})^2+\left(\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}-\frac{\beta}{3}\right)^2$$
$$=\frac{(2\alpha\beta-\beta c)^2+(3\alpha c-3\alpha^2-\beta^2)^2}{9\beta^2}.$$

§. 8.

Die Entfernung der Punkte (x'', y'') und (x''', y''') ist:

Digitized by Google

$$\delta'''^2 = (x''-x''')^2+(y''-y''')^2,$$

und setzt man für x und y die Werthe aus §. 3. und §. 4.:

$$\delta'''^2 = \left(\frac{c}{2}-\frac{c+\alpha}{3}\right)^2+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha c}{2\beta}-\frac{\beta}{3}\right)^2$$

$$=\frac{(-2\alpha\beta+\beta c)^2+(\beta^2+3\alpha^2-3\alpha c)^2}{36\beta^2}.$$

§. 9.

Bringt man die Werthe von δ'^2, δ''^2, δ'''^2 auf einerlei Benennung und setzt der Kürze wegen:

$$(\pm 2\alpha\beta \mp \beta c)^2+(\pm 3\alpha c \mp 3\alpha^2 \mp \beta^2)^2 = P,$$

so erhält man:

$$\delta'^2 = \frac{9P}{36\beta^2}, \quad \delta''^2 = \frac{4P}{36\beta^2}, \quad \delta'''^2 = \frac{P}{36\beta^2};$$

oder:

$$\delta' = \frac{3\sqrt{P}}{6\beta}, \quad \delta'' = \frac{2\sqrt{P}}{6\beta}, \quad \delta''' = \frac{\sqrt{P}}{6\beta}.$$

Diess spricht aus, dass in jedem Dreieck δ' das Dreifache und δ'' das Doppelte von δ''' ist, so wie, dass, da $\delta''+\delta'''=\delta'$, die drei Punkte (x', y'), (x'', y'') und (x''', y''') in jedem Dreieck in einer geraden Linie liegen und zwar der Punkt (x''', y''') zwischen den Punkten (x', y') und (x'', y''). δ''' ist also der dritte Theil von δ'.

§. 10.

Die Entfernung der Punkte (x', y') und (x^{IV}, y^{IV}) ist:

$$\delta^{IV2} = (x'-x^{IV})^2+(y'-y^{IV})^2,$$

oder, wenn man für x und y die Werthe aus §. 2. und §. 5. setzt:

$$\delta^{IV2} = (\alpha-\frac{ac+bc}{s})^2+\left(\frac{\alpha c-\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta c}{s}\right)^2$$

$$=\frac{(\alpha\beta s-\alpha\beta c-\beta bc)^2+(\alpha cs-\alpha^2 s-\beta^2 c)^2}{\beta^2 s^2}.$$

§. 11.

Die Entfernung der Punkte (x'', y'') und (x^{IV}, y^{IV}) ist:

Digitized by Google

$$\delta^{V2} = (x'' - x^{IV})^2 + (y'' - y^{IV})^2,$$

oder, wenn man für x und y die Werthe aus §. 3. und §. 5. setzt:

$$\delta^{V2} = \left(\frac{c}{2} - \frac{\alpha c + bc}{s}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha c}{2\beta} - \frac{\beta c}{s}\right)^2$$

$$= \frac{(\beta cs - 2\alpha\beta c - 2\beta bc)^2 + (\alpha^2 s + \beta^2 s - \alpha cs - 2\beta^2 c)^2}{4\beta^2 s^2}.$$

§. 12.

Die Entfernung der Punkte (x''', y''') und (x^{IV}, y^{IV}) ist:

$$\delta^{VI2} = (x''' - x^{IV})^2 + (y''' - y^{IV})^2,$$

oder, wenn man für x und y die Werthe aus §. 4. und §. 5. setzt:

$$\delta^{VI2} = \left(\frac{\alpha + c}{3} - \frac{\alpha c + bc}{s}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{\beta c}{s}\right)^2$$

$$= \frac{(\alpha s + cs - 3\alpha c - 3bc)^2 + (\beta s - 3\beta c)^2}{9s^2}.$$

§. 13.

Werth der δ in symmetrischen Functionen der Seiten des Dreiecks.

Es ist $\beta^2 = b^2 - \alpha^2$ und $\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen für δ, so ist:

$$\delta'^2 = \frac{\int a^6 - \int a^4 b^2 + 3\int a^2 b^2 c^2}{2\int a^2 b^2 - \int a^4} \text{ *)},$$

$$\delta''^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{\int a^6 - \int a^4 b^2 + 3\int a^2 b^2 c^2}{2\int a^2 b^2 - \int a^4},$$

$$\delta'''^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{\int a^6 - \int a^4 b^2 + 3\int a^2 b^2 c^2}{2\int a^2 b^2 - \int a^4},$$

$$\delta^{IV2} = \frac{\int a^6 - \int a^5 b - \int a^4 b^2 + 2\int a^3 b^3 + 3\int a^4 bc - 2\int a^3 b^2 c + 6\int a^2 b^2 c^2}{2\int a^2 b^2 - \int a^4},$$

$$\delta^{V2} = \frac{3\int a^2 b^2 c^2 - \int a^3 b^2 c + \int a^4 bc}{2\int a^2 b^2 - \int a^4},$$

$$\delta^{VI2} = \frac{-\int a^3 + 2\int a^2 b - 9\int abc}{9\int a}.$$

*) $\int$ soll bezeichnen die Summe sämmtlicher Glieder einer symmetrischen Function, z. B. $\int a^4 b^2$ bei den drei Grössen a, b, c bezeichnet $a^4 b^2 + a^2 b^4 + a^4 c^2 + a^2 c^4 + b^4 c^2 + b^2 c^4$.

Digitized by Google

§. 14.

Bezeichnet man $a+b+c$ mit m', $ab+ac+bc$ mit m'' und abc mit m''', so ist:

$$\delta'^2 = \frac{m'^6 - 6m'^4m'' + 8m'^2m''^2 + 8m'^3m''' - 16m'm''m''' + 9m'''^2 \text{ *)}}{-m'^4 + 4m'^2m'' - 8m'm'''},$$

$$\delta''^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{m'^6 - 6m'^4m'' + 8m'^2m''^2 + 8m'^3m''' - 16m'm''m''' + 9m'''^2}{-m'^4 + 4m'^2m'' - 8m'm'''},$$

$$\delta'''^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{m'^6 - 6m'^4m'' + 8m'^2m''^2 + 8m'^3m''' - 16m'm''m''' + 9m'''^2}{-m'^4 + 4m'^2m'' - 8m'm'''},$$

$$\delta^{IV2} = \frac{m'^6 - 7m'^4m'' + 12m'^2m''^2 + 12m'^3m''' - 40m'm''m''' + 36m'''^2}{-m'^4 + 4m'^2m'' - 8m'm'''},$$

$$\delta^{V2} = \frac{9m'''^2 + m'^3m''' - 4m'm''m'''}{-m'^4 + 4m'^2m'' - 8m'm'''},$$

$$\delta^{VI2} = \frac{-m'^3 + 5m'm'' - 18m'''}{9m'}.$$

§. 15.

Gleichung, welche die drei Seiten des Dreiecks zu Wurzeln hat mit in δ ausgedrückten Coefficienten.

Die Gleichungen in §. 14. enthalten auf der rechten Seite drei Grössen m', m'', m''', welche, wie bekannt, als die Coefficienten einer Gleichung des 3ten Grades, der Gleichung

$$y^3 - m'y^2 + m''y - m''' = 0,$$

angesehen werden können und welche mit abwechselnden Zeichen darin vorkommen, weil die Seiten des Dreiecks a, b, c die Wurzeln jener Gleichung, als positiv anzunehmen sind.

Drückt man mit Hülfe dreier dieser sechs Gleichungen die m in δ aus, das heisst, eliminirt man die m, so erhält man die Coefficienten jener Gleichung in y durch die δ ausgedrückt. Unter diesen drei Gleichungen der δ darf aber nur eine der drei ersten sein, weil diese drei ersten nur eine Relation ausdrücken; ich werde hier die erste, die vierte und die fünfte Gleichung, d. h. die Werthe von δ'^2, δ^{IV2} und δ^{V2} nehmen, weil diese Gleichungen einerlei Nenner haben.

---

*) Es gibt Tabellen, in welchen die Function $\int a^\alpha . b^\beta \ldots$ durch die Coefficienten der Gleichung des $n$ten Grades ausgedrückt ist. Die von Meyer Hirsch gehen bis zu $n = 10$. Derselbe hätte sich aber die Hälfte der Berechnung und mehr sparen können, wenn er bemerkt hätte, dass die $m$te Horizontalreihe und die $m$te letzte Vertikalreihe bei einer anderen als der von ihm beliebten Anordnung gleich sind.

Digitized by Google

Die directe Elimination der m ist jedoch, da dieselben vielfach als Factor in Zähler und Nenner erscheinen, äusserst complicirt; es ist deshalb vorzuziehen, durch die Ausführung der angedeuteten Division der Werthe der δ ein einfacheres Verfahren herzuleiten. Dividirt man diese drei Werthe durch den Nenner, den ich mit N bezeichnen will, und berücksichtigt, dass m' Factor aller Glieder desselben ist, so ist:

$$\delta'^2 = -m'^2 + 2m'' + \frac{9m'''^2}{N}, \quad \delta^{IV2} = -m'^2 + 3m'' - \frac{4m'''}{m'} + \frac{4m'''^2}{N},$$

$$\delta^{V2} = -\frac{m'''}{m'} + \frac{m'''^2}{N}.$$

Bezeichnet man die vier hier vorkommenden Grössen m'^2, m'', $\frac{m'''}{m'}$, $\frac{m'''^2}{N}$ der Reihe nach mit P', m'', P'', P''', und drückt m'' durch die P aus, so erhält man wieder drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Es ist:

$$N = -m'^4 + 4m'^2m'' - 8m'm''';$$

dividirt man, um m'' abzusondern, durch $4m'^2$, so hat man:

$$\frac{N}{4m'^2} = -\frac{m'^2}{4} + m'' - \frac{2m'''}{m'} \quad \text{und} \quad \frac{N}{4m'^2} + \frac{m'^2}{4} + \frac{2m'''}{m'} = m''.$$

Man hat $\frac{m'''^2}{N}$ mit P''' bezeichnet; es ist also: $N = \frac{m'''^2}{P'''}$;

folglich:

$$\frac{m'''^2}{4m'^2P'''} + \frac{m'^2}{4} + \frac{2m'''}{m'} = m'',$$

oder, weil $\frac{m'''}{m'}$ gleich P'' und m'^2 gleich P' gesetzt ist:

$$m'' = \frac{P''^2}{4P'''} + \frac{P'}{4} + 2P'';$$

hierdurch werden die drei Gleichungen der δ:

$$\delta'^2 = -P' + \frac{P''^2}{2P'''} + \frac{P'}{2} + 4P'' + 9P''' = -\frac{P'}{2} + \frac{P''^2}{2P'''} + 4P'' + 9P''',$$

$$\delta^{IV2} = -P' + \frac{3P''^2}{4P'''} + \frac{3P'}{4} + 6P'' - 4P'' + 4P''' = -\frac{P'}{4} + \frac{3P''^2}{4P'''} + 2P'' + 4P''',$$

$$\delta^{V2} = -P'' + P'''.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man:

Digitized by Google

$$P' = \frac{P''^2}{P'''} + 8P'' + 18P''' - 2\delta'^2.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$P' = \frac{3P''^2}{P'''} + 8P'' + 16P''' - 4\delta^{IV2}.$$

Also:

$$\frac{P''^2}{P'''} + 8P'' + 18P''' - 2\delta'^2 = \frac{3P''^2}{P'''} + 8P'' + 16P''' - 4\delta^{IV2},$$

oder:

$$2P''' - \frac{2P''^2}{P'''} = 2\delta'^2 - 4\delta^{IV2} \ldots . (M).$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$$P' = P''' - \delta^{V2} \quad \text{und} \quad P''^2 = P'''^2 - 2P'''\delta^{V2} + \delta^{V4}.$$

Wenn man nun diesen Werth von P''^2 in den Ausdruck (M) substituirt, so ist:

$$2P''' - 2P''' + 4\delta^{V2} - \frac{2\delta^{V4}}{P'''} = 2\delta'^2 - 4\delta^{IV2},$$

oder:

$$(4\delta^{V2} + 4\delta^{IV2} - 2\delta'^2)P''' = 2\delta^{V4},$$

das ist:

$$P''' = \frac{\delta^{V4}}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2}.$$

Es ist ferner:

$$P'' = P''' - \delta^{V2} = \frac{\delta^{V4}}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2} - \delta^{V2} = \frac{\delta^{V4} - \delta^{V2}(2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2)}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2}$$

$$= \frac{-\delta^{V4} - 2\delta^{IV2}\delta^{V2} + \delta'^2\delta^{V2}}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2} = \frac{\delta^{V2}(-\delta^{V2} - 2\delta^{IV2} + \delta'^2)}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2}.$$

Oben hat man erhalten:

$$P' = \frac{3P''^2}{P'''} + 8P'' + 16P''' - 4\delta^{IV2}$$

$$= \frac{3\delta^{V4}(-\delta^{V2} - 2\delta^{IV2} + \delta'^2)^2}{(2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2)^2} \times \frac{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2}{\delta^{V4}}$$

$$+ \frac{8\delta^{V2}(-\delta^{V2} - 2\delta^{IV2} + \delta'^2)}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2} + \frac{16\delta^{V4}}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2} - 4\delta^{IV2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} 3(-\delta^{V2} - 2\delta^{IV2} + \delta'^2)^2 + 8\delta^{V2}(-\delta^{V2} - 2\delta^{IV2} + \delta'^2) + 16\delta^{V4} \\ -4\delta^{IV2}(2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2) \end{array}\right\}}{2\delta^{V2} + 2\delta^{IV2} - \delta'^2}$$

Digitized by Google

$$=\frac{11\delta^{V4}-12\delta^{IV2}\delta^{V2}+2\delta'^2\delta^{V2}+4\delta^{IV4}+3\delta'^4-8\delta'^2\delta^{IV2}}{2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2}.$$

Nachdem die P durch die δ ausgedrückt sind, bleibt zu Herstellung der Gleichung $y^3-m'y^2+m''y-m'''=0$ mit Coefficienten in δ nichts übrig, als die m in P zu übersetzen, wodurch ihre Werthe in δ gegeben sind. Nun ist:

$$m'^2=P',$$

also:

$$m'=\sqrt{P'}=\sqrt{\left(\frac{11\delta^{V4}-12\delta^{IV2}\delta^{V2}+2\delta'^2\delta^{V2}+4\delta^{IV4}+3\delta'^4-8\delta'^2\delta^{IV2}}{2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2}\right)},$$

$$m''=\frac{P''^2}{4P'''}+\frac{P'}{4}+2P''=\frac{\delta^{V4}(-\delta^{V2}-2\delta^{IV2}+\delta'^2)^2}{(2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2)^2}\times\frac{2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2}{4\delta^{V4}}$$

$$+\frac{11\delta^{V4}-12\delta^{IV2}\delta^{V2}+2\delta'^2\delta^{V2}+4\delta^{IV4}+3\delta'^4-8\delta'^2\delta^{IV2}}{4(2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2)}$$

$$+\frac{2\delta^{V2}(-\delta^{V2}-2\delta^{IV2}+\delta'^2)}{2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2}$$

$$=\frac{\delta^{V4}+2\delta^{IV4}+\delta'^4-6\delta^{V2}\delta^{IV2}+2\delta'^2\delta^{V2}-3\delta'^2\delta^{IV2}}{2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2},$$

$$\frac{m'''}{m'}=P'',\quad m'''=P''m'=P''\sqrt{P'}$$

$$=\frac{\delta^{V2}(-\delta^{V2}-2\delta^{IV2}+\delta'^2)}{2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2}$$

$$\times\sqrt{\frac{11\delta^{V4}-12\delta^{IV2}\delta^{V2}+2\delta'^2\delta^{V2}+4\delta^{IV4}+3\delta'^4-8\delta'^2\delta^{IV2}}{2\delta^{V2}+2\delta^{IV2}-\delta'^2}}.$$

Gleichungen der Linien, die durch zwei der Punkte (x, y) gehen.

§. 16.

Die Gleichung der Linie, die durch die Punkte (x', y') und (x'', y'') geht, ist:

$$y-y''=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x''),$$

oder, wenn man für x und y die Werthe setzt:

$$y-\frac{b^2-\alpha c}{2\beta}=\frac{\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}-\frac{b^2-\alpha c}{2\beta}}{\alpha-\frac{c}{2}}(x-\frac{c}{2}),$$

$$y-\frac{b^2-\alpha c}{2\beta}=\frac{b^2-3\alpha c+2\alpha^2}{\beta(c-2\alpha)}(x-\frac{c}{2}).$$

Digitized by Google

Setzt man $y = 0$, so ist:

$$x = \frac{\alpha(b^2 - c^2)}{b^2 - 3\alpha c + 2\alpha^2}.$$

Setzt man $x = 0$, so ist:

$$y = \frac{\alpha(b^2 - c^2)}{\beta(2\alpha - c)}.$$

Setzt man in diesen zwei Gleichungen $\alpha = \frac{c}{2}$ (Fall des gleichschenkligen Dreiecks), so ist $x = \frac{c}{2}$ und $y = \infty$.

Für die Linie, welche durch die Punkte (x', y') und (x''', y'''), sowie für die Linie, welche durch die Punkte (x'', y'') und (x''', y''') geht, findet man dieselbe Tangente, da die drei Punkte (x', y'), (x'', y'') und (x''', y''') in einer geraden Linie liegen.

§. 17.

Die Gleichung der Linie, die durch die Punkte (x', y') und (x^{IV}, y^{IV}) geht, ist:

$$y - y^{IV} = \frac{y' - y^{IV}}{x' - x^{IV}}(x - x^{IV}),$$

oder, wenn man für x und y die Werthe setzt:

$$y - \frac{\beta c}{s} = \frac{\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta} - \frac{\beta c}{s}}{\alpha - \frac{(\alpha + b)c}{s}}\left(x - \frac{(\alpha + b)c}{s}\right),$$

$$y - \frac{\beta c}{s} = \frac{\alpha s(c - \alpha) - \beta^2 c}{\beta(\alpha s - \alpha c - bc)}\left(x - \frac{(\alpha + b)c}{s}\right).$$

Für $y = 0$ ist:

$$x = \frac{\alpha c(\alpha + b)(b - c)}{c(b^2 - \alpha^2) + \alpha s(\alpha - c)}.$$

Für $x = 0$ ist:

$$y = \frac{\alpha c(\alpha + b)(b - c)}{\beta(\alpha s - \alpha c - bc)}.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\alpha = \frac{c}{2}$ (Fall des gleichschenkligen Dreiecks), so ist $s = 2b + c$, $x = \frac{c}{2}$ und $y = \infty$.

Digitized by Google

§. 18.

Die Gleichung der Linie, die durch die Punkte (x'', y'') und (x^{IV}, y^{IV}) geht, ist:

$$y-y^{IV}=\frac{y''-y^{IV}}{x''-x^{IV}}(x-x^{IV}),$$

oder, wenn man für x und y die Werthe setzt:

$$y-\frac{\beta c}{s}=\frac{\frac{b^2-\alpha c}{2\beta}-\frac{\beta c}{s}}{\frac{c}{2}-\frac{(\alpha+b)c}{s}}\left(x-\frac{(\alpha+b)c}{s}\right),$$

$$y-\frac{\beta c}{s}=\frac{2\beta^2 c-b^2 s+\alpha c s}{\beta c(2\alpha+2b-s)}\left(x-\frac{(\alpha+b)c}{s}\right).$$

Setzt man $y=0$, so ist:

$$x=\frac{bc(\alpha+b)(b-c)}{s(b^2-\alpha c)-2c(b^2-\alpha^2)}.$$

Setzt man $x=0$, so ist:

$$y=\frac{bc(\alpha+b)(b-c)}{\beta c(2\alpha+2b-s)}.$$

Setzt man in diesen zwei Gleichungen $\alpha=\frac{c}{2}$ (der Fall des gleichschenkligen Dreiecks), so ist $s=2b+c$, $x=\frac{c}{2}$, $y=\infty$.

§. 19.

Die Gleichung der Linie, die durch die Punkte (x''', y''') und (x^{IV}, y^{IV}) geht, ist:

$$y-y^{IV}=\frac{y'''-y^{IV}}{x'''-x^{IV}}(x-x^{IV}),$$

oder, wenn man für x und y die Werthe setzt:

$$y-\frac{\beta c}{s}=\frac{\frac{\beta}{3}-\frac{\beta c}{s}}{\frac{\alpha+c}{3}-\frac{(\alpha+b)c}{s}}\left(x-\frac{(\alpha+b)c}{s}\right),$$

$$y-\frac{\beta c}{s}=\frac{\beta(s-3c)}{s(\alpha+c)-3c(\alpha+b}\left(x-\frac{(\alpha+b)c}{s}\right).$$

Ist $y=0$, so ist:

Digitized by Google

$$x=\frac{c(b-c)}{s-3c}.$$

Ist $x=0$, so ist:

$$y=\frac{\beta c(b-c)}{3c(\alpha+b)-s(\alpha+c)}.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\alpha=\frac{c}{2}$ (Fall des gleichschenkligen Dreiecks), so ist $s=2b+c$, $x=\frac{c}{2}$, $y=\infty$.

§. 20.

Die sämmtlichen in den vorhergehenden vier Paragraphen aufgeführten sechs Linien fallen also, wenn das Dreieck gleichschenklig ist, in die in dem Mittelpunkte von c auf c errichtete Senkrechte.

Stellung der Schneidepunkte.

(Die Veränderung des Dreiecks geschieht durch Variirung des Winkels C von 180° bis 0° bei constantem c und beliebigem α).

Ungleichseitiges Dreieck und Dreiecke überhaupt.

§. 21.

(x', y').

In Taf. VI. Fig. 6. ist ABC ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck; Winkel $AC'B<90^0$, Winkel $AC''B=90^0$ und Winkel $AC'''B>90^0$. Fällt man aus der Spitze C die Senkrechte CD, so ist, wenn man AB mit c und AD mit α bezeichnet, $DB=c-\alpha$ und $(C''D)^2=\alpha(c-\alpha)$; ebenso, weil $C'D>C''D$, $(C'D)^2>\alpha(c-\alpha)$ und, weil $C'''D<C''D$, $(C'''D)^2<\alpha(c-\alpha)$.

Wendet man diess auf die vorliegende Frage an und behält die seitherige Bezeichnung bei, wonach namentlich die Senkrechte aus der Spitze C des Dreiecks durch β dargestellt ist, so ist:

für ACB spitzwinklig: $\beta^2>\alpha(c-\alpha)$ oder $\beta>\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}$;

für ACB rechtwinklig: $\beta^2=\alpha(c-\alpha)$ oder $\beta=\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}$;

für ACB stumpfwinklig: $\beta^2<\alpha(c-\alpha)$ oder $\beta<\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}$;

oder, da $\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}=y'$:

für das spitzwinklige Dreieck: $y' < \beta$,
für das rechtwinklige Dreieck: $y' = \beta$,
für das stumpfwinklige Dreieck: $y' > \beta$;

es ist also im ersten Fall der Punkt (x', y') unter der Spitze, im zweiten Fall in der Spitze und im dritten Fall über der Spitze C des Dreiecks. Da der Punkt (x', y') stets in der Senkrechten β liegt und diese, wenn man den Winkel, aus dem sie gefällt wird, als variirend betrachtet, stets zwischen den Schenkeln des Dreiecks liegt, so befindet sich der Punkt (x', y') im ersten Fall innerhalb des Dreiecks, im zweiten Fall in der Grenze (der Spitze) desselben und im dritten Fall ausserhalb des Dreiecks.

Es ist diess für alle ungleichseitigen Dreiecke ausreichend, man darf nur die geeignete Seite in die Abscissenaxe legen. Ist aber das Dreieck anders gestellt, so lässt sich die Gültigkeit dieser Sätze auch leicht nachweisen. Ist z. B. der stumpfe Winkel in A, so ist α negativ; folglich y' negativ; also, da das Dreieck oberhalb der Abscissenaxe liegt, (x', y') ausserhalb des Dreiecks. Ist B der stumpfe Winkel, so ist α positiv und grösser als c, also y' negativ und (x', y') unterhalb der Abscissenaxe ausserhalb des Dreiecks. Ist der rechte Winkel in A, so ist $\alpha' = 0$, daher $y' = 0$; also der Punkt (x', y') in der Spitze des rechten Winkels; ebenso wenn der rechte Winkel in B ist, weil alsdann $\alpha = c$, folglich $y' = 0$ ist.

Man kann hiernach von dem Punkte (x', y') sagen, dass er, wenn man C von 180^0 bis 0^0 variirend annimmt, aus dem positiv Unendlichen abwärts nach der Spitze C sich bewegt, dort bei $C = 90^0$ anlangt; bei weiterem Abnehmen von C innerhalb des Dreiecks in der Senkrechten β nach der Grundlinie sich hinzieht, welche Grenze aber erst bei $C = 0^0$ erreicht werden könnte.

§. 22.

(x'', y'').

Betrachtet man dasselbe Dreieck wie im Anfange des vorigen Paragraphen, so ist ebenfalls:

$$\beta^2 > \alpha(c-\alpha), \quad \beta^2 = \alpha(c-\alpha), \quad \beta^2 < \alpha(c-\alpha),$$

je nachdem die Spitze C desselben in C', C'' oder C''' liegt.

Aus diesem folgt:

Digitized by Google

$$\beta^2 \gtreqless \alpha c - \alpha^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 \gtreqless \alpha c, \quad b^2 \gtreqless \alpha c, \quad \frac{b^2}{2\beta} \gtreqless \frac{\alpha c}{2\beta}, \quad \frac{b^2 - \alpha c}{2\beta} \gtreqless 0.$$

Es ist aber:

$$\frac{b^2 - \alpha c}{2\beta} = y''.$$

Ist also $\frac{b^2 - \alpha c}{2\beta} > 0$, so ist $C < 90^0$ und y'' positiv. Je kleiner C ist, desto mehr erhebt sich der Punkt (x'', y'') über die Grundlinie, bei $C = 0$ (der unerreichbaren Grenze) liegt der Punkt in der, in der Entfernung $\frac{1}{2}b$, mit der Abscissenaxe Parallelen.

Ist $\frac{b^2 - \alpha c}{2\beta} = 0$, so ist $C = 90^0$ und y'' gleich Null, folglich (x'', y'') in der Grundlinie c des Dreiecks, in der Mitte von c, da x'' stets gleich $\frac{1}{2}c$.

Ist $\frac{b^2 - \alpha c}{2\beta} < 0$, so ist $C > 90^0$ und y'' negativ, und wächst, je stumpfer C wird, desto mehr negativ bis zur unerreichbaren Grenze für $C = 180^0$, wo (x'', y'') im minus Unendlichen liegt.

Da, wenn die Winkel eines Dreiecks an der Grundlinie spitz sind, wie hier, wo der Winkel C als variirend angenommen ist, die Senkrechte aus der Mitte der Basis wenigstens bis zur halben Höhe des Dreiecks innerhalb desselben liegt, weil dieselbe erst in der halben Höhe und nur dann, wenn einer der Winkel an der Grundlinie gleich 90^0 ist, in den Schenkel (die Hypotenuse) fällt, so ist (x'', y'') für C spitz innerhalb des Dreiecks, für $C = 90^0$ in der Mitte der Grundlinie, für C stumpf ausserhalb des Dreiecks.

Diess ist für die ungleichseitigen Dreiecke ausreichend, man darf nur die Seite, die dem variirenden Winkel gegenüberliegt, in die Abscissenaxe legen. Ist aber das Dreieck auch anders gestellt, so lassen sich diese Sätze leicht nachweisen.

Ist A stumpf, so ist α negativ und y'' positiv. Ist B stumpf, so ist $\alpha > c$; in diesem Fall muss aber $b > c$ sein, weil dem grössten Winkel die grösste Seite gegenüberliegt, also y'' ebenfalls positiv, weil $\alpha c < b^2$ (α kann nicht grösser als b sein). In beiden Fällen ist aber (x'', y'') ausserhalb des Dreiecks, weil, wie oben nachgewiesen worden, (x'', y'') unter der dem stumpfen Winkel gegenüberstehenden Seite liegt, also im ersten Fall rechts der Seite a und im zweiten Fall links der Seite b, in beiden Fällen aber ausserhalb des Dreiecks.

Digitized by Google

Ist $A = 90^0$, so ist $\alpha = 0$ und $y'' = \frac{b^2}{2\beta} = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2}} = \frac{b}{2}$ (weil $\beta^2 = b^2 - \alpha^2$), also (x'', y'') in der Mitte der Hypotenuse a. Ist $B = 90^0$, so ist $\alpha = c$, also $y'' = \frac{b^2 - c^2}{2\sqrt{b^2 - c^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - c^2} = \frac{a}{2}$, also (x'', y'') in der Mitte der Hypotenuse b.

Man kann hiernach von dem Punkte (x'', y'') sagen, dass er, wenn man C von 180^0 bis 0^0 variirend annimmt, von der Richtung des negativ Unendlichen her aufwärts nach der Grundlinie c sich bewegt, dort bei $C = 90^0$ anlangt, bei weiterer Abnahme von C innerhalb des Dreiecks in der auf der Mitte c stehenden Senkrechten sich aufwärts bis zur Höhe $\frac{1}{2}b$ hinzieht, welche Grenze aber erst bei $C = 0^0$ erreicht werden könnte.

§. 23.

Aus den vorhergehenden beiden Paragraphen geht hervor, dass (x', y') und (x'', y'') stets gleichzeitig ausserhalb oder innerhalb des Dreiecks oder in dessen Grenzen liegen. Das Erste ist der Fall für ein stumpfwinkliges, das Zweite für ein spitzwinkliges und das Dritte für ein rechtwinkliges Dreieck.

§. 24.

(x', y') und (x'', y'').

(x', y') liegt in der Senkrechten β; (x'', y'') in der im Punkte $x = \frac{1}{2}c$ errichteten Senkrechten. Je näher α (Abscisse für (x', y')) der Grösse $\frac{1}{2}c$ (Abscisse für (x'', y'')) ist, desto näher an einander sind diese Linien. Für $\alpha = \frac{1}{2}c$ (Fall des gleichschenkligen Dreiecks) fallen beide Senkrechten in einander.

(x', y') zieht sich aus der Richtung des positiv Unendlichen her nach der Grundlinie, (x'', y'') aus der Richtung des negativ Unendlichen nach der Höhe $\frac{1}{2}b$; es fragt sich, da hiernach beide Punkte an einander vorbeigehen, wann $y' = y''$ ist. Die Linie, die beide Punkte mit einander verbindet, ist nach §. 16.:

$$y - \frac{\alpha c - \alpha^2}{\beta} = \frac{b^2 - 3\alpha c + 2\alpha^2}{\beta(c - 2\alpha)}(x - \alpha).$$

Ist die Tangente dieser Linie gleich Null, so ist die Linie der Abscissenaxe parallel, also $y' = y''$. Diess ist der Fall für $b^2 - 3\alpha c + 2\alpha^2 = 0$, oder, da $b^2 = \beta^2 + \alpha^2$, für $\beta^2 = 3\alpha(c - \alpha)$, woraus $\beta = \sqrt{3\alpha(c - \alpha)}$. Es ist aber $\alpha(c - \alpha) = (C''D)^2$, wenn

Digitized by Google

$AC''D = 90^0$ (Taf. VI. Fig. 7.); es ist also $y' = y''$, wenn $\beta = C''D.\sqrt{3}$. Diese Grösse β lässt sich leicht construiren; es ist die mittlere Proportionale zwischen 3α und $c-\alpha$, auch ist sie die Seite des gleichseitigen Dreiecks im Kreise von dem Halbmesser $C''D$. In der Taf. VI. Fig. 7. ist $C'''D$ diese Grösse $\sqrt{3\alpha(c-\alpha)}$.

Substituirt man in die Ausdrücke für y' und y'', nämlich in $\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}$ und $\frac{b^2-\alpha c}{2\beta}$, für β den Werth $\sqrt{3\alpha(c-\alpha)}$, so erhält man $y' = y'' = \frac{\sqrt{3\alpha(c-\alpha)}}{3} = \frac{\beta}{3}$. Man sieht, dass in diesem Falle (x', y') von der Spitze C doppelt so weit entfernt ist, als (x'', y'') von der Grundlinie. Es ist diess allgemein der Fall, denn die Entfernung von (x', y') von der Spitze C ist $\beta - y'$, das ist $\frac{\beta^2-\alpha c+\alpha^2}{\beta}$ oder, da $\alpha^2+\beta^2 = b^2$, $\frac{b^2-\alpha c}{\beta}$. Die Entfernung von (x'', y'') von der Grundlinie ist $\frac{b^2-\alpha c}{2\beta}$, die Hälfte von $\frac{b^2-\alpha c}{\beta}$.

Ist die Tangente unendlich, so ist die Linie senkrecht auf der Abscissenaxe. Diess ist bei obiger Gleichung der Fall für $c-2\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{1}{2}c$, also beim gleichschenkligen Dreieck. Substituirt man diesen Werth $\frac{1}{2}c$ für α in den Zähler des Ausdrucks für die Tangente, so erhält man b^2-c^2. Ist auch diess gleich Null, so ist $b = c$, das Dreieck gleichseitig und die Linie reducirt sich natürlich auf einen Punkt.

Wird β grösser als $\sqrt{3\alpha(c-\alpha)}$, so wird C spitzer, (x', y') rückt nach der Grundlinie und (x'', y'') nach der Höhe $\frac{1}{3}b$. Wird β kleiner als $\sqrt{3\alpha(c-\alpha)}$, so wird C stumpfer, (x', y') zieht sich nach der Spitze und (x'', y'') nach der Grundlinie. Setzt man in die Relation $\beta^2 \gtreqless 3\alpha(c-\alpha)$ für β^2 seinen Werth $b^2-\alpha^2$ und für α seinen Werth $\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$, so findet man

$$(a^2-b^2)^2 \gtreqless c^2(2c^2-b^2-a^2),$$

eine Relation zwischen den Dreiecksseiten.

§. 25.

(x''', y''').

(x''', y''') liegt nach §. 9. stets zwischen (x', y') und (x'', y'') und zwar von ersterem Punkt noch einmal so weit entfernt, als von letzterem. Es ist ferner (x''', y''') stets innerhalb des Dreiecks, denn die Linien, die von der Spitze des Dreiecks nach der Mitte der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, sind in ihrer ganzen Ausdehnung innerhalb des Dreiecks, folglich sind es auch ihre Schneidepunkte.

y''' ist gleich $\frac{\beta}{3}$, gleich $\frac{\beta^2}{3\beta}$; y' ist gleich $\frac{\alpha(c-\alpha)}{\beta}$, gleich $\frac{3\alpha(c-\alpha)}{3\beta}$. Ist nun $\beta^2 > 3\alpha(c-\alpha)$, so ist $y''' > y'$; in diesem Fall ist aber (voriger §.) $y' < y''$; also, da (x''', y''') zwischen (x', y') und (x'', y'') liegt, $y''' < y''$. Nach ähnlicher Schlussfolge ist für $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$, $y''' < y'$ und $y''' > y''$. Für $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ ist $y' = y'' = y''' = \frac{1}{3}\beta$.

x''' kann grösser, gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}c$ sein. Diess ist in der Gleichung $x''' = \frac{1}{3}(\alpha + c) = \frac{1}{2}c + m$ enthalten, wo m positiv, Null oder negativ genommen werden muss. Diese Gleichung verwandelt sich in $2\alpha = c + 6m$ oder, da $\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ ist, in $\frac{b^2+c^2-a^2}{c} = c + 6m$ oder endlich in $m = \frac{1}{6}.\frac{(a+b)(b-a)}{c}$.

Ist $b > a$, so ist m positiv und $x''' > \frac{1}{2}c$. Ist $b < a$, so ist m negativ und $x < \frac{1}{2}c$. Ist $a = b$, so ist $m = 0$ und $x''' = \frac{1}{2}c$. Construiren lässt sich diese Grösse m leicht, sie ist der sechste Theil der vierten Proportionale zu $a+b$, $a-b$ und c.

§. 26.

(x^{IV}, y^{IV}).

(x^{IV}, y^{IV}) liegt ebenso wie (x''', y''') stets innerhalb des Dreiecks. Diess geht schon daraus hervor, dass die Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, stets zwischen den den Winkel bildenden Seiten liegen; folglich auch der Schneidepunkt dieser Linien stets innerhalb des Dreiecks sich befinden muss; es folgt diess aber auch aus $y^{IV} = \frac{\beta c}{s} = \beta . \frac{c}{s}$; was ausspricht, dass y^{IV} stets kleiner als β, weil $\frac{c}{s} = \frac{c}{a+b+c}$ stets ein

ächter Bruch ist, in Verbindung mit dem Umstande, dass x^{IV}, α mag grösser oder kleiner als $\frac{1}{2}c$ sein, stets zwischen den Punkten der Abscissenlinie, in welchen β und die den Winkel C halbirende Linie dieselbe trifft, sich befindet, die Senkrechte y^{IV} also stets zwischen diese Linien und um so mehr zwischen die Schenkel b und a des Dreiecks fällt.

Vergleicht man y^{IV} mit y''', so ist $y^{IV} \gtreqless y'''$, das ist $\frac{\beta c}{s} \gtreqless \frac{\beta}{3}$.

Diess reducirt sich auf $3c \gtreqless s$ oder $c \gtreqless \frac{1}{2}(a+b)$. Ist also $c > \frac{1}{2}(a+b)$, so ist $y^{IV} > y'''$; ist $c < \frac{1}{2}(a+b)$, so ist $y^{IV} < y'''$; ist endlich $c = \frac{1}{2}(a+b)$, so ist $y^{IV} = y'''$, d. h. die Punkte (x''', y''') und (x^{IV}, y^{IV}) liegen in einer und derselben der X-Axe parallelen Linie. Das Letztere geht auch aus der Gleichung hervor, welche diese beiden Punkte mit einander verbindet und welche nach §. 19. $y - \frac{\beta c}{s} = \frac{\beta(s-3c)}{\alpha(s-3c)+c(s-3b)}(x - \frac{(\alpha+b)c}{s})$ ist. Die Linie läuft nämlich der Abscissenaxe parallel, wenn ihre Tangente gleich Null, nämlich $s = 3c$ oder $c = \frac{1}{2}(a+b)$ ist.

Die Linie ist senkrecht auf der Abscissenaxe, die Punkte fallen also in eine auf die X-Axe senkrechte Linie für $\alpha(s-3c) + c(s-3b) = 0$, welches eintritt für $\alpha = \frac{1}{2}c$ und $a = b$, also für das gleichschenklige Dreieck.

Lässt man den Winkel C von 180° bis 0° abnehmen, so geht (x', y') aus dem positiv Unendlichen nach der Grundlinie c, während (x^{IV}, y^{IV}) von c aus aufwärts strebt; es müssen folglich beide Punkte in ihrem Zuge an einander vorbeigehen. Hat der Winkel C bis 90° abgenommen, so ist (x', y') in der Spitze C. Bei Kleinerwerden von C steigt (x', y') in das Dreieck hinab und kann nun erst (x^{IV}, y^{IV}) begegnen, weil dieser Punkt beständig innerhalb des Dreiecks ist.

Betrachtet man Taf. VI. Fig. 7., in welcher die Linie $C'''D$ der Gleichung $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ entspricht, so ist für diesen Fall $\beta = C'''D = C'D.\sqrt{3}$, weil, wie bekannt, $(C'' = 90^0)$, $C'D^2 = \alpha(c-\alpha)$. Diese Linie erreicht ihren höchsten Werth, wenn $C''D$ am grössten ist. Diess tritt bei $\alpha = \frac{1}{2}c$ ein; $\beta = C'''D$ ist alsdann $\frac{1}{2}c\sqrt{3}$. In diesem Fall ist das Dreieck gleichseitig*), folglich $a+b = 2c$

*) $b^2 = \beta^2 + \alpha^2 = \frac{1}{4}(3c^2) + \frac{1}{4}(c^2) = c^2$, also $b = c$. Da nun für $\alpha = \frac{1}{2}c$, $a = b$, so ist $a = b = c$. Dass $\beta = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$ ein Maximum ist,

oder $c=\frac{1}{2}(a+b)$. Bei allen Werthen von $\alpha \gtrless \frac{1}{2}c$ ist also β, daher $a+b$ kleiner*), und folglich $2c > a+b$ oder $c > \frac{1}{2}(a+b)$. Es liegt daher, wenn β bereits die Höhe $\sqrt{3\alpha(c-\alpha)}$ erreicht hat, nach dem Vorhergehenden, wonach für $c > \frac{1}{2}(a+b)$, $y^{IV} > y'''$, der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) über dem Punkte (x''', y''') und auch über dem Punkte (x', y'), weil bei $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$, $y' = y''$ und (x''', y''') stets zwischen (x', y') und (x'', y'') sich befindet. Das Aneinandervorbeigleiten der Punkte (x^{IV}, y^{IV}) und (x', y') ist also, wenn β^2 die Höhe $3\alpha(c-\alpha)$ erreicht hat, bereits geschehen, musste also bei $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$ geschehen sein, und zwar, nach §. 17., bei $\beta^2 = \frac{\alpha s}{c}(c-\alpha)$, dem Nullwerthe der Tangente der Verbindungslinie der Punkte (x^{IV}, y^{IV}) und (x', y') **). Es ist also für

---

findet man, wenn man das Differentiale $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0$ für die Gleichung

$$\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$$

sucht; man findet $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \frac{3(c-2\alpha)}{2\beta} = 0$ und hieraus $\alpha = \frac{1}{2}c$.

Die Linie, welche die Gleichung $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ darstellt, ist in Taf. VI. Fig. 7 a.) durch den Punkt C''' bezeichnet; sie ist eine geschlossene Curve mit vier symmetrischen Zweigen.

*) In der Seiten-Relation (§. 24.) $(b^2-a^2)^2 = c^2(2c^2-b^2-a^2)$ ist b entweder gleich a oder von a verschieden. Ist $b=a$, so ist $b^2-a^2=0$, also $2c^2-b^2-a^2$, das ist $2c^2-2a^2=0$, folglich $a=c$; $a=b=c$ und das Dreieck gleichseitig. Ist b von a verschieden, so ist $(b^2-a^2)^2$ positiv, also $2c^2 > b^2+a^2$, $c^2 > \frac{1}{2}(b^2+a^2)$, $c^2 > \frac{1}{4}(2b^2+2a^2)$, $c > \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2a^2}$. Nun ist aber $2b^2+2a^2 > a^2+b^2+2ab$, das ist $b^2+a^2 > 2ab$. Diess wird klar, wenn man die grössere Seite, z. B. b, mit $a+m$ bezeichnet. Man hat alsdann $a^2+a^2+2am+m^2 > 2a(a+m)$ oder $2a^2+2am+m^2 > 2a^2+2am$, was offenbar richtig ist; es ist also, da $\sqrt{2b^2+2a^2} > \sqrt{a^2+b^2+2ab}$, das ist grösser als $a+b$, auch $c > \frac{1}{2}(a+b)$. Ist folglich a von b verschieden, d. h. das Dreieck ungleichseitig, so ist $\frac{1}{2}(a+b) < c$. Hier ist unterstellt $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$, wo β die Seite $C'''D$ des in den Kreis vom Halbmesser $C''D$ eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist. Ist also bei diesem Werthe von β a nicht gleich b, so ist $\frac{1}{2}(a+b) < c$ und ist $a=b$, so ist das Dreieck gleichseitig.

**) Substituirt man in $\beta^2 = \frac{\alpha s}{c}(c-\alpha)$ für β^2 den Werth b^2-a^2 und für a oder b seinen Werth aus der Relation $a^2 = b^2+c^2-2ac$, so erhält man eine Gleichung in b oder a, deren Wurzeln das Dreieck bestimmen, wofür, für ein gegebenes c und α, die Ordinaten y' und y^{IV} gleich sind.

Digitized by Google

$\beta^2 \overline{\gtrless} 3\alpha(c-\alpha)$, $y^{IV} > y'$. Für $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ ist $a+b=2c$, das ist $c = \frac{1}{2}(a+b)$ nur, wenn α den Werth $\frac{1}{2}c$ hat; es kann daher für $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$, $\frac{1}{2}(a+b) = c$ oder $\frac{1}{2}(a+b) > c$ nicht Statt finden; es liegt also für $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$, (x^{IV}, y^{IV}) stets über (x''', y'''). Da nun für $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$, $y'' < y'$, so sind die vier Ordinaten y, der wachsenden Grösse nach geordnet, für $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$, y'', y''', y^{IV}, y' vor $y^{IV} = y'$ und y'', y''', y', y^{IV} nach $y^{IV} = y'$. Der Punkt (x'', y'') liegt in diesem Falle unter (x''', y'''), denn (x'', y'') ist bei C stumpf unter der Grundlinie, also unter (x''', y'''), das stets innerhalb des Dreiecks ist. Beide Punkte steigen aufwärts, gleich sind sie erst bei $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$, also ist für $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$, $y'' < y'''$.

Bei $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ ist $y^{IV} > y'''$, aber $y' = y'' = y'''$. Die Stellung der Punkte zu einander ist hierdurch bestimmt.

Wird $\beta^2 > 3\alpha(c-\alpha)$, das ist, nimmt der Winkel C mehr ab, so ist $y'' > y'$, also $y''' < y''$ und $> y'$. a und b werden mit β grösser, also tritt bei $\beta^2 > 3\alpha(c-\alpha)$ einmal der Fall ein, wo $a+b > 2c$, folglich $c < \frac{1}{2}(a+b)$ und $y^{IV} < y'''$ Statt findet. Ueber $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ hinaus sind also Anfangs die vier Ordinaten y, abnehmend geordnet, y^{IV}, y'', y''', y', dann y'', y^{IV}, y''', y', zuletzt aber und bis an's Ende der Wanderung der vier Punkte y'', y''', y^{IV}, y'. Der Punkt (x'', y'') erreicht den Punkt (x^{IV}, y^{IV}) erst für $\beta^2 > 3\alpha(\alpha-c)$ und zwar in dem Punkte, wo (§. 18.) $\beta^2 = \frac{s(b^2-\alpha c)}{2c}$ $= \frac{\alpha s(\alpha-c)}{2c-s}$; denn (x'', y'') ist für C stumpf unter der Grundlinie c, (x^{IV}, y^{IV}) über derselben, also über (x'', y''). Bei $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ ist (x^{IV}, y^{IV}) noch über (x'', y''); es tritt also $y^{IV} = y''$ erst bei $\beta^2 > 3\alpha(c-\alpha)$ ein. Die Anordnung der Ordinaten ist daher bei $\beta^2 > 3\alpha(c-\alpha)$ Anfangs y^{IV}, y'', y''', y', dann y'', y^{IV}, y''', y'. Die Gleichheit von y'' und y^{IV} tritt früher ein als die Gleichheit von y''' und y^{IV}, das heisst, (x'', y'') erreicht (x^{IV}, y^{IV}) früher, als (x''', y''') den Punkt (x^{IV}, y^{IV}) erreicht; denn fände $y''' > y^{IV}$ früher Statt als $y'' > y^{IV}$, so würde (x'', y'') den Punkt (x''', y'''), den es bereits bei $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ eingeholt hat, nochmals passiren müssen, ehe es in gleiche Linie mit (x^{IV}, y^{IV}) käme; daher die Anordnung y'', y''', y^{IV}, y' die letzte ist.

Die Ordinaten y sind also der wachsenden Grösse nach geordnet:

für $\beta^2 < 3\alpha(c-\alpha)$: y'', y''', y^{IV}, y',
y'', y''', y', y^{IV};

Digitized by Google

für $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$: $y' = y'' = y''', y^{IV}$;
für $\beta^2 > 3\alpha(c-\alpha)$: y', y''', y'', y^{IV},
y', y''', y^{IV}, y'',
y', y^{IV}, y''', y''.

Wenn die vier Punkte in einer und derselben, der X-Axe parallelen, Linie liegen sollen, so muss gleichzeitig $\beta^2 = 3\alpha(c-\alpha)$ und $c = \frac{1}{2}(a+b)$ Statt finden. Substituirt man diesen Werth $\frac{1}{2}(a+b)$ für c in die Seiten-Relation (§. 24. am Ende) $(a^2-b^2)^2 = c^2(2c^2-b^2-a^2)$, so findet man $a-b=0$, das ist $a=b$; also $a=b=c$. Das Dreieck ist also, wenn $y' = y'' = y''' = y^{IV}$, gleichseitig; in welchem Falle die vier Punkte in einem Punkte zusammenfallen. (Siehe die zweite Anmerkung zu diesem Paragraphen).

Diess in Bezug auf die Entfernung der vier Punkte von der Abscissenaxe an aufwärts, also in Bezug auf die Grösse der Ordinaten y. Was die Entfernung der Punkte von der Ordinatenaxe, das ist die Grösse der Abscissen x, betrifft, so geben die folgenden Ausführungen Aufschluss.

x^{IV} kann grösser, gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}c$ sein. Diess ist in der Gleichung $x^{IV} = \frac{(a+b)c}{s} = \frac{1}{2}c + m$ enthalten, wo m positiv, Null oder negativ zu nehmen ist. Diess giebt $2ac + 2bc = cs + 2sm$ oder, da $\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ und $s = a+b+c$ ist, $b^2-a^2+bc-ac = 2sm$ und $m = \frac{b^2-a^2+c(b-a)}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}(b-a)$. Ist $b > a$, so ist m positiv und x^{IV} grösser als $\frac{1}{2}c$; ist $b < a$, so ist m negativ und $x^{IV} < \frac{1}{2}c$; ist endlich $b = a$, so ist $m = 0$ und $x^{IV} = \frac{1}{2}c$.

x^{IV} ist also gleich $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(b-a)$; x''' aber (§. 25.) gleich $\frac{1}{2}c + \frac{1}{6}\frac{b+a)(b-a)}{c} = \frac{1}{2}c + \frac{b+a}{3c}\cdot\frac{1}{2}(b-a)$.

Ist $b-a$ positiv und $b+a > 3c$, so ist x''' und $x^{IV} > \frac{1}{2}c$ und $< \alpha$*), und $x''' > x^{IV}$; es liegt also der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) der Ordinatenaxe näher als der Punkt (x''', y'''). Ist, bei $b-a$ positiv,

*) Für $b-a$ positiv liegt der grössere Theil des Winkels C und der grössere Theil der Seite c links von β; es fallen desshalb die Linien, die den Winkel C und die Seite c, von der Spitze C ausgezogen, theilen, links von β. In diesen Linien müssen aber die Punkte (x''', y''') und (x^{IV}, y^{IV}) liegen; x''' und x^{IV} sind daher, bei $b-a$ positiv, kleiner als α. Bei $b-a$ negativ ist die Sache umgekehrt.

$b+a<3c$, so ist x''' und $x^{IV}>\frac{1}{2}c$ und $<\alpha$ und $x'''<x^{IV}$; es liegt also der Punkt (x''', y''') der Ordinatenaxe näher als der Punkt (x^{IV}, y^{IV}). Ist, bei $b-a$ positiv, $b+a=3c$, so ist x''' und $x^{IV}>\frac{1}{2}c$ und $<\alpha$, aber $x'''=x^{IV}$; die Punkte (x''', y''') und (x^{IV}, y^{IV}) sind also gleichweit von der Ordinatenaxe entfernt.

Ist $b-a$ negativ und $b+a>3c$, so ist x''' und $x^{IV}<\frac{1}{2}c$ und $>\alpha$ und $x'''<x^{IV}$; der Punkt (x''', y''') liegt also der Ordinatenaxe näher als der Punkt (x^{IV}, y^{IV}). Ist $b-a$ negativ und $b+a<3c$, so ist x''' und $x^{IV}<\frac{1}{2}c$ und $>\alpha$ und $x'''>x^{IV}$; der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) liegt also der Ordinatenaxe näher als der Punkt (x''', y'''). Ist bei $b-a$ negativ $b+a=3c$, so ist x''' und $x^{IV}<\frac{1}{2}c$ und $>\alpha$ aber $x'''=x^{IV}$ und die Punkte (x''', y''') und (x^{IV}, y^{IV}) sind gleichweit von der Ordinatenaxe entfernt. — Ist also

$$\alpha>\tfrac{1}{2}c, \text{ so ist } b>a,$$

und es sind der Grösse nach geordnet die Abscissen x

$$\text{für } b+a>3c;\quad x'', x^{IV}, x''', x'$$
$$\text{für } b+a<3c;\quad x'', x''', x^{IV}, x'$$
$$\text{für } b+a=3c;\quad x'', x'''=x^{IV}, x';$$

$$\alpha<\tfrac{1}{2}c, \text{ so ist } b<a,$$

und es sind die Abscissen x der Grösse nach geordnet

$$\text{für } b+a>3c;\quad x', x''', x^{IV}, x''$$
$$\text{für } b+a<3c;\quad x', x^{IV}, x''', x''$$
$$\text{für } b+a=3c;\quad x', x'''=x^{IV}, x'';$$

$$\alpha=\tfrac{1}{2}c, \text{ so ist } b=a \text{ und } x'=x''=x'''=x^{IV}=\tfrac{1}{2}c.$$

§. 27.

Bei der seitherigen Untersuchung war die Grösse von α willkührlich geblieben; sie gelten also für jeden Werth von α kleiner als c; ebenso geht aus dem Vorhergehenden, namentlich aus §. 25. und §. 26, hervor, dass die vier Senkrechten auf der Abscissenaxe, in welchen die vier Schneidepunkte liegen, um so näher einander sind, je kleiner der Unterschied zwischen den Seiten a und b ist, und dass sie folglich in eine Linie zusammenfallen, wenn dieser Unterschied aufhört, d. h. wenn das Dreieck gleichschenklig ist. Dieser Fall bietet einige Besonderheiten dar und soll desshalb in den folgenden Paragraphen besonders erörtert werden.

Digitized by Google

§. 28.

Gleichschenkliges Dreieck.

Im gleichschenkligen Dreiecke ist:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}c, \quad \beta^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{1}{4}(4b^2 - c^2), \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - c^2};$$

also:

$$x' = \tfrac{1}{2}c, \qquad y' = \frac{\tfrac{1}{2}c}{\tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - c^2}}(c - \tfrac{1}{2}c) = \frac{c^2}{2\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{3c^2}{6\sqrt{4b^2 - c^2}}.$$

$$x'' = \tfrac{1}{2}c, \qquad y'' = \frac{b^2 - \tfrac{1}{2}c^2}{\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{2b^2 - c^2}{2\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{6b^2 - 3c^2}{6\sqrt{4b^2 - c^2}}.$$

$$x''' = \frac{c + \tfrac{1}{2}c}{3} = \tfrac{1}{2}c, \qquad y''' = \frac{\sqrt{4b^2 - c^2}}{6} = \frac{4b^2 - c^2}{6\sqrt{4b^2 - c^2}}.$$

$$x^{IV} = \frac{\tfrac{1}{2}c^2 + bc}{2b + c} = \tfrac{1}{2}c; \quad y^{IV} = \frac{\tfrac{1}{2}c\sqrt{4b^2 - c^2}}{2b + c} = \frac{c(2b - c)\sqrt{4b^2 - c^2}}{2(4b^2 - c^2)} = \frac{c(2b - c)}{2\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{6bc - 3c^2}{6\sqrt{4b^2 - c^2}}.$$

Im gleichschenkligen Dreiecke liegen also die vier Punkte, da x für alle den Werth $\tfrac{1}{2}c$ hat, in der auf der Mitte der Grundlinie errichteten Senkrechten.

§. 29.

(x', y') und (x'', y'').

Ist $b < c$, also $C > 60^0$, so ist:

$$2b^2 < 2c^2, \quad 2b^2 - c^2 < c^2, \quad 6b^2 - 3c^2 < 3c^2;$$

demnach $y' > y''$. In diesem Falle liegt also der Schneidepunkt der Höhen über dem Schneidepunkte der Senkrechten aus der Mitte der Seiten. Ist $C > 60^0$ aber $< 90^0$, so ist $\tfrac{1}{2}C < 45^0$, also $A > 45^0$ und β (die dem Winkel A gegenüberstehende Seite) $> \tfrac{1}{2}c$, $\beta^2 > \tfrac{1}{4}c^2$. Hält man diess mit der Gleichung

$$y' = \frac{c^2}{2\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{\tfrac{1}{2}c^2}{\tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{\tfrac{1}{2}c^2}{\beta} = \frac{\tfrac{1}{2}c^2}{\beta^2}\beta$$

zusammen, so ist, weil $\tfrac{1}{4}c^2 < \beta^2$, der Factor von β ein ächter

Bruch; folglich $y' < \beta$ und positiv, also (x', y') innerhalb des Dreiecks; es ist aber auch $b^2 = \beta^2 + \frac{1}{4}c^2 > \frac{1}{2}c^2$, weil $\beta^2 > \frac{1}{4}c^2$, das ist $2b^2 > c^2$ oder $2b^2 - c^2 > 0$ oder positiv; folglich y'' positiv. Ferner ist $\beta^2 > \beta^2 - m$ (m eine unbestimmte positive Grösse); folglich:

$$\beta^2 > b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 - m \quad \text{und} \quad \beta^2 > \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - m,$$

also:

$$\beta > \frac{\frac{1}{4}(2b^2 - c^2)}{\beta} + \frac{\frac{1}{2}b^2 - m}{\beta} \text{ und daher } \beta > y'' + \frac{\frac{1}{2}b^2 - m}{\beta} \text{ oder } \beta > y'',$$

wenn man die unbestimmte willkührliche Grösse m gleich $\frac{1}{2}b^2$ setzt. Es sind demnach bei $C > 60^0$ und $< 90^0$ die Punkte (x', y') und (x'', y'') innerhalb des Dreiecks.

Ist $C = 90^0$, so ist $\frac{1}{2}C = 45^0$ und $A = 45^0$, also $\beta = \frac{1}{2}c$, $\beta^2 = \frac{1}{4}c^2$ oder $4\beta^2 = c^2$. Führt man diesen Werth von c^2 in die Gleichung

$$y' = \frac{c^2}{2\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{c^2}{4.\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{c^2}{4\beta}$$

ein, so ist $y' = \frac{4\beta^2}{4\beta} = \beta$; es fällt also bei $C = 90^0$ der Schneidepunkt der Höhen in die Spitze C des Dreieicks. y'' ist aber, weil

$$b^2 = \beta^2 + \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{1}{2}c^2 \quad \text{oder} \quad 6b^2 = 3c^2,$$

Null; der Schneidepunkt der Senkrechten aus der Mitte der Seiten fällt also bei $C = 90^0$ in die Mitte der Grundlinie c.

Ist $C > 90^0$, so ist $A < 45^0$, also $\beta < \frac{1}{2}c$ und $\beta^2 < \frac{1}{4}c^2$. Berücksichtigt man diese Ungleichheit bei der Gleichung

$$y' = \frac{c^2}{2\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{\beta} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{\beta^2}\beta,$$

$$\text{so ist } \frac{\frac{1}{4}c^2}{\beta^2} > 1, \text{ also } y' > \beta.$$

Der Schneidepunkt der Höhen rückt also von C über 90^0 an über die Spitze C des Dreiecks hinaus und fällt ausserhalb des Dreiecks in die Verlängerung von β.

Ferner ist, da $\beta < \frac{1}{2}c$ und $\beta^2 < \frac{1}{4}c^2$, wenn man diesen Werth von β in $b^2 = \beta^2 + \frac{1}{4}c^2$ berücksichtigt, $b^2 < \frac{1}{2}c^2$ oder $2b^2 < c^2$, also $2b^2 - c^2 < 0$ oder negativ; es ist also, da $2b^2 - c^2$ der Zähler von $y'' = \frac{2b^2 - c^2}{2\sqrt{4b^2 - c^2}}$ ist, y'' negativ und der Punkt (x'', y'') fällt demnach von C über 90^0 an unter die Grundlinie in die Verlän-

Digitized by Google

gerung von β. Die Grenze ist hier $C = 180^0$. In diesem Falle ist $\beta = 0$, also $y'' = -\infty$ und $y' = +\infty$.

Ist $b = c$, so ist das Dreieck gleichseitig und $C = 60^0$; in diesem Falle ist $6b^2 - 3c^2 = 3c^2$, folglich $y' = y''$. Bei dem gleichseitigen Dreiecke fallen also die Punkte zusammen und es ist dafür:

$$x' = x'' = \tfrac{1}{2}c \quad \text{und} \quad y' = y'' = \frac{3c^2}{6\sqrt{3c^2}} = \frac{\sqrt{3c^2}}{6} = \frac{2\beta}{6} = \frac{\beta}{3}.$$

Ist $b > c$, also $C < 60^0$, so ist $2b^2 > 2c^2$ und $2b^2 - c^2 > c^2$, ferner $6b^2 - 3c^2 > 3c^2$ oder $y'' > y'$; in diesem Falle liegt also der Schneidepunkt der Höhen unter dem Schneidepunkte der Senkrechten aus der Mitte der Seiten. Bei $C < 60^0$ ist $\tfrac{1}{2}C < 30^0$ und $A > 60^0$, also $\beta > \tfrac{1}{2}c$. Es ist daher nach denselben Ausführungen wie bei $C > 60^0$, aber $< 90^0$, (x', y') und (x'', y'') innerhalb des Dreiecks. Die Grenze ist hier $A = B = 90^0$, also da $\alpha = b \cos A$ und $\beta = b \sin A$, $\alpha = 0$ und $\beta = b$, in welchem Falle $y' = 0$ und $y'' = \tfrac{1}{2}b$, hier gleich wie ∞.

Erwägt man das Vorhergehende und betrachtet C von 180^0 an bis 0^0 abnehmend, so geht (x'', y'') vom negativ Unendlichen aus nach der Mitte der Grundlinie und (x', y') aus dem positiv Unendlichen nach der Spitze C. Diese Punkte werden bei $C = 90^0$ erreicht. Von $C = 90^0$ bis $C = 60^0$ befindet sich (x'', y'') im ersten Drittheil von β und (x', y') in der Länge von der Spitze C bis zu $\tfrac{1}{3}\beta$. Bei $C = 60^0$ treffen (x', y') und (x'', y'') in $\tfrac{1}{3}\beta$ zusammen. Von $C = 60^0$ bis $C = 0^0$ geht (x', y') bis zur Grundlinie und (x'', y'') von $\tfrac{1}{3}\beta$ bis zur unerreichbaren Grenze $\tfrac{1}{2}b$.

(x', y') und (x'', y'') sind also stets gleichzeitig innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks.

§. 30.

(x''', y''').

Ist $b < c$, also $C > 60^0$, so ist $4b^2 - c^2 < 3c^2$, also $y''' < y'$; ferner $6b^2 - 3c^2 < 4b^2 - c^2$, also $y'' < y'''$. Der Punkt (x''', y''') liegt also in diesem Falle zwischen den Punkten (x', y') und (x'', y'').

Ist $b = c$, also $C = 60^0$ (Fall der Gleichseitigkeit), so ist $y''' = y'' = y'$. Die drei Punkte fallen also in einen zusammen.

Ist $b > c$, also $C < 60^0$, so ist $4b^2 - c^2 > 3c^2$, also $y''' > y'$; ebenso ist bei $b > c$, $2b^2 > 2c^2$, $6b^2 > 2c^2 + 4b^2$, $6b^2 > 3c^2 - c^2 + 4b^2$,

$6b^2-3c^2 > 4b^2-c^2$, also $y'' > y'''$. Der Punkt (x''', y''') liegt also in diesem Falle ebenfalls zwischen den Punkten (x', y') und (x'', y'').

Es liegt also (x''', y''') zwischen (x', y') und (x'', y'') oder es fallen diese Punkte in einen zusammen. (x''', y''') ist aber stets innerhalb des Dreiecks, da $y''' = \frac{1}{3}\beta$ für jedes Dreieck gilt und ausserdem bei dem gleichschenkligen Dreiecke (x''', y''') in der Höhe β liegt.

Eine weitere Vergleichung der Ordinaten y''', y'', y' ist nicht nothwendig, denn für $C = 90^0$ liegt (x', y') in der Spitze C, (x'', y'') in der Grundlinie c, also (x''', y''') zwischen beiden. Für $C > 90^0$ liegt (x', y') über der Spitze C, (x'', y'') unter der Grundlinie c, also (x''', y''') ebenfalls zwischen beiden.

Der Zug von (x''', y''') geht also, wenn man den Winkel C von 180^0 bis 0^0 abnehmen lässt, von c aus nach oben. (x', y') ist über, (x'', y'') unter ihm, bis der Winkel C auf 90^0 kommt. Hier fallen die drei Punkte in einen Punkt zusammen. Wird $C < 90^0$, so ist nunmehr (x''', y''') über (x', y') und unter (x'', y'').

§. 31.

(x^{IV}, y^{IV}) und Vergleichung der Ordinaten y.

Ist $b < c$, also Winkel $C > 60^0$, so ist $6bc < 6c^2$, das ist $6bc-3c^2 < 3c^2$, also $y^{IV} < y'$; ferner ist in diesem Falle $6b^2 < 6bc$ und $6b^2-3c^2 < 6bc-3c^2$, also $y'' < y^{IV}$.

(x^{IV}, y^{IV}) ist also für $C > 60^0$ zwischen (x', y') und (x'', y''). Der Punkt (x''', y''') liegt ebenfalls zwischen diesen Punkten, und zwar, da für $C > 60^0$ die Grösse $\frac{1}{2}(a+b) < c$ (für $C = 60^0$ ist $a+b = 2c$ und $\frac{1}{2}(a+b) = c$) nach §. 26. über dem Punkte (x^{IV}, y^{IV}). Die Ordnung der Ordinaten y ist also bei $C > 60^0$ nach wachsender Grösse y'', y''', y^{IV}, y'.

Dass $y''' < y^{IV}$ geht auch aus folgender Betrachtung hervor. Ist $b < c$, so ist $b = c - m$, also

$$4b^2-c^2 = 4(c-m)^2-c^2 = 3c^2-8cm+4m^2;$$

ebenso ist:

$$6bc-3c^2 = 6(c-m)c-3c^2 = 3c^2-6cm.$$

Jener ist der Werth von y''', dieser der Werth von y^{IV}. Zieht man beide Grössen von einander ab, so erhält man:

Digitized by Google

$$y''' - y^{IV} = 4m^2 - 2cm;$$

es ist aber $m < \frac{1}{2}c$, denn in jedem Falle ist $b > \frac{1}{2}c$ (b ist die Hypotenuse und $\frac{1}{2}c$ eine Cathete); es ist also $2m < c$, $4m^2 < 2cm$, folglich $4m^2 - 2cm < 0$, das ist negativ, also $y''' < y^{IV}$.

Ist $C = 90^0$ oder $> 90^0$, so ist in der Anordnung der y kein Unterschied, nur dass (x', y') und (x'', y'') resp. in die Spitze C und die Grundlinie c oder über jene und unter diese fällt; y''' bleibt aber immer kleiner als y^{IV}, weil in diesen beiden Fällen $\frac{1}{2}(a+b) < c$ (§. 26.), und beide Punkte liegen zwischen den Punkten (x', y') und (x'', y''), weil $C > 60^0$.

Ist $b = c$, so ist $C = 60^0$; das Dreieck ist gleichseitig, und da in diesem Falle

$$6bc - 3c^2 = 4b^2 - c^2 = 6b^2 - 3c^2 = 3c^2,$$

das ist $y^{IV} = y''' = y'' = y'$, und alle y in die Höhe β fallen, so liegen die sämmtlichen vier Punkte in einem einzigen, und zwar, da $y''' = \frac{1}{3}\beta$, in dem Punkte, dessen Coordinaten $(\frac{1}{2}c, \frac{1}{3}\beta)$ sind.

Ist $b > c$, also Winkel $C < 60^0$, so ist:

$$6bc > 6c^2 \quad \text{und} \quad 6bc - 3c^2 > 3c^2;$$

also $y^{IV} > y'$; ebenso ist in diesem Falle:

$$6b^2 > 6bc, \quad 6b^2 - 3c^2 > 6bc - 3c^2,$$

also $y^{IV} < y''$. Der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) liegt also für $C < 60^0$ ebenfalls zwischen den Punkten (x', y') und (x'', y''). Der Punkt (x''', y''') liegt aber bei $C < 60^0$, da hier $\frac{1}{2}(a+b) > c$ (§. 26.) ist, über dem Punkte (x^{IV}, y^{IV}). Die Anordnung der Ordinaten y ist also bei $C < 60^0$, der wachsenden Grösse nach gesetzt, y', y^{IV}, y''', y''.

Dass $y''' > y^{IV}$ geht auch aus Folgendem hervor. Ist $b > c$, so ist $b = c + m$. Die Werthe der Zähler von y''' und y^{IV} sind also von jenen vorderen nur durch das Zeichen von m unterschieden. Man hat also als Differenz der Zähler von y''' und y^{IV} die Grösse $4m^2 + 2cm$, einen positiven Werth; es ist also $y''' > y^{IV}$.

Der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) liegt ebenso wie der Punkt (x''', y''') stets innerhalb des Dreiecks, denn y^{IV} liegt in der Senkrechten β und ist gleich $\frac{\beta c}{s}$, das ist gleich $\beta . \frac{c}{s}$, welcher, da $\frac{c}{s}$ ein ächter Bruch ist, kleiner als β ist. Es geht diess auch aus folgender Betrachtung hervor:

y^{IV} kann nicht negativ sein, d. h. (x^{IV}, y^{IV}) nicht unterhalb

Digitized by Google

c kommen, sonst wäre $3c(2b-c)<0$, $2b<c$, mit Worten: die Summe der beiden gleichen Seiten kleiner als die dritte.

y^{IV} kann nicht Null werden, d. h. (x^{IV}, y^{IV}) nicht in die Grundlinie c fallen, sonst wäre $3c(2b-c)=0$, das ist $2b=c$, mit Worten: die Summe der beiden gleichen Seiten gleich der dritten.

y^{IV} kann nicht gleich β sein, das heisst (x^{IV}, y^{IV}) nicht in die Spitze C fallen, denn es ist:

$$y^{IV}=\frac{6bc-3c^2}{6\sqrt{4b^2-c^2}}=\frac{(6bc-3c^2)\sqrt{4b^2-c^2}}{6(4b^2-c^2)}=\frac{3c(2b-c)\sqrt{4b^2-c^2}}{6(2b-c)(2b+c)}$$
$$=\frac{c\sqrt{4b^2-c^2}}{2(2b+c)}$$

und

$$\beta=\tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2-c^2}.$$

Wäre nun $y^{IV}=\beta$, so hätte man:

$$\frac{c\sqrt{4b^2-c^2}}{2(2b+c)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2-c^2} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{2b+c}=1,$$

das ist $c=2b+c$ oder $2b=0$, $b=0$.

y^{IV} kann nicht grösser als β sein, das heisst (x^{IV}, y^{IV}) nicht über die Spitze C hinausfallen, sonst wäre, nach voriger Ausführung,

$$\frac{c}{2b+c}>1, \quad c>2b+c, \quad 2b<0,$$

also b negativ.

§. 32.

Werthe der δ im gleichschenkligen Dreieck.

Im gleichschenkligen Dreiecke ist:

$$x'=x''=x'''=x^{IV}, \quad \alpha=\tfrac{1}{2}c, \quad \beta=\tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2-c^2}, \quad s=2b+c.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke für δ in §. 6. bis §. 12., so ist:

$$\delta'=\frac{(c+b)(c-b)}{\sqrt{4b^2-c^2}},$$

$$\delta''=\tfrac{3}{2}.\frac{(c+b)(c-b)}{\sqrt{4b^2-c^2}},$$

$$\delta''' = \tfrac{1}{3}.\frac{(c+b)(c-b)}{\sqrt{4b^2-c^2}},$$

$$\delta^{IV} = \frac{c(c-b)}{\sqrt{4b^2-c^2}},$$

$$\delta^{V} = \frac{b(b-c)}{\sqrt{4b^2-c^2}},$$

$$\delta^{VI} = \frac{b-c}{3}\sqrt{\frac{2b-c}{2b+c}}.$$

§. 33.

Gleichseitiges Dreieck.

Für den Fall der Gleichseitigkeit des Dreiecks ist:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}c, \quad b = c, \quad \beta^2 = b^2 - \alpha^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{3}{4}c^2 \quad \text{und} \quad \beta = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3};$$

also:

$$x' = \tfrac{1}{2}c, \qquad y' = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}(c - \tfrac{1}{2}c) = \frac{c}{2\sqrt{3}} = \frac{c\sqrt{3}}{2.3} = \tfrac{1}{3}\beta,$$

$$x'' = \tfrac{1}{2}c, \qquad y'' = \frac{b^2 - \alpha c}{2\beta} = \frac{c^2 - \frac{1}{2}c^2}{c\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{c\sqrt{3}} = \frac{c}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\beta,$$

$$x''' = \tfrac{1}{3}(c+\alpha) = \frac{\frac{3}{2}c}{3} = \tfrac{1}{2}c, \qquad y''' = \tfrac{1}{3}\beta = \frac{c\sqrt{3}}{2.3} = \frac{c}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\beta,$$

$$x^{IV} = \frac{\alpha c + bc}{s} = \frac{\frac{1}{2}c^2 + c^2}{3c} = \tfrac{1}{2}c, \quad y^{IV} = \frac{\beta c}{s} = \frac{\frac{1}{2}c^2\sqrt{3}}{3c} = \frac{c}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\beta,$$

wo $s = a + b + c$.

Die Coordinaten der vier Punkte sind also gleich; die vier Punkte liegen folglich in einem Punkte, dessen Coordinaten $\tfrac{1}{2}c$, $\tfrac{1}{3}\beta$ sind. Es geht diess schon aus den vorhergehenden Paragraphen hervor.

§. 34.

Geometrische Orte der Schneidepunkte.

Wenn man aus den Gleichungen der §§. 2. bis 5. für die vier Schneidepunkte Relationen entwickelt, welche ausser x und y, den Coordinaten der Schneidepunkte, nur zwei constante Grössen enthalten, so passen dieselben auf mehr als ein Dreieck, da ein Dreieck durch drei Stücke bestimmt ist, in der Relation aber nur

Digitized by Google

zwei vorkommen. Diese Gleichung ist die einer Curve und bildet den geometrischen Ort der Schneidepunkte für alle die Dreiecke, bei welchen jene zwei constanten Grössen dieselben sind, welche, mit Buchstaben bezeichnet, jedes mögliche Verhältniss zu einander haben können.

Legt man nun, wie in Taf. VI. Fig. 8., die kleinere von zwei Seiten, c, in die Abscissenaxe, ihren Endpunkt in den Anfangspunkt A, und lässt man die grössere Seite, b, um den Punkt A sich drehen, so erhält man alle möglichen Dreiecke bis auf zwei, das gleichseitige und das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Die Gleichung, welche nur die Constanten b und c enthält, ist also der geometrische Ort aller Schneidepunkte dieser Dreiecke. Setzt man $b=c$, so ist sie der geometrische Ort der Schneidepunkte aller gleichschenkligen Dreiecke, zu welchen auch jene beiden gehören. (Taf. VI. Fig. 9.)

In den folgenden Paragraphen sollen diese Relationen für die vier Schneidepunkte aufgesucht werden.

§. 35.

Geometrischer Ort der Punkte (x', y').

Um den geometrischen Ort der Schneidepunkte der Höhen der Dreiecke zu finden, scheide man aus den Gleichungen

$$x' = \alpha, \quad y' = \frac{\alpha}{\beta}(c-\alpha),$$

welche den Schneidepunkt eines besonderen Dreiecks bestimmen, α und β aus.

Man erhält, da $\beta^2 = b^2 - \alpha^2$:

$$y' = \frac{x'}{\sqrt{b^2-x'^2}}(c-x'), \quad y'^2(b^2-x'^2) = (c-x')^2 x'^2.$$

Für $b=c$ wird diese Gleichung:

$$y'^2(c^2-x'^2) = x'^2(c-x')^2, \quad y'^2(c-x')(c+x') = x'^2(c-x')^2,$$
$$y'^2(c+x') = x'^2(c-x').$$

§. 36.

Geometrischer Ort der Punkte (x'', y'').

Der geometrische Ort der Punkte (x'', y'') ist in der Gleichung

$$x'' = \tfrac{1}{2}c$$

enthalten, denn diese Gleichung ist nur von c abhängig. Für alle Dreiecke ist also $x'' = \frac{1}{2}c$. Der gesuchte geometrische Ort ist also die durch die Gleichung $x'' = \frac{1}{2}c$ dargestellte, auf der Mitte von c errichtete Senkrechte.

Setzt man in die Gleichung $y'' = \dfrac{b^2 - \alpha c}{2\beta}$ für β seinen Werth $\pm\sqrt{b^2 - \alpha^2}$, so ergibt sich:

$$y'' = \pm\frac{b^2 - \alpha c}{2\sqrt{b^2 - \alpha^2}}, \quad 4y''^2(b^2 - \alpha^2) = (b^2 - \alpha c)^2,$$

eine Function der Variabeln y'' und α, und man erhält den Werth von y'' für jedes Dreieck, wenn man den Werth von α des einzelnen Dreiecks in diese Gleichung substituirt.

Für $b = c$ wird diese Relation:

$$4y''^2(c^2 - \alpha^2) = (c^2 - \alpha c)^2, \quad 4y''^2(c + \alpha) = c^2(c - \alpha).$$

§. 37.

Geometrischer Ort der Punkte (x''', y''').

Um den geometrischen Ort der Schneidepunkte der Transversalen der Dreiecke zu finden, muss man aus den Gleichungen

$$x''' = \tfrac{1}{3}(\alpha + c), \quad y''' = \tfrac{1}{3}\beta,$$

welche den Schneidepunkt eines durch die Grössen α, β bestimmten besonderen Dreiecks bezeichnen, diese Grössen α und β ausscheiden und eine Relation zwischen x''', y''' und den beiden Seiten b und c des Dreiecks bilden.

Es ist $3x''' - c = \alpha$ und $y''' = \dfrac{\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{3}$, da $\beta^2 = b^2 - \alpha^2$ ist, also:

$$y'''^2 = \tfrac{1}{9}[b^2 - (3x''' - c)^2] = \tfrac{1}{9}(b^2 - 9x'''^2 + 6cx''' - c^2)$$

oder:

$$9y'''^2 + 9x'''^2 - 6cx''' = b^2 - c^2$$

die gesuchte Relation.

Ist $b = c$, so wird diese Gleichung:

$$3y'''^2 + 3x'''^2 = 2cx'''.$$

Digitized by Google

§. 38.

Geometrischer Ort der Punkte (x^{IV}, y^{IV}).

Um den geometrischen Ort der Schneidepunkte der die Winkel des Dreiecks halbirenden Linien zu finden, muss man aus den Gleichungen

$$x^{IV}=\frac{(\alpha+b)c}{a+b+c},\quad y^{IV}=\frac{\beta c}{a+b+c},$$

welche den Schneidepunkt eines besonderen, durch α, β und a bestimmten Dreieckes ausdrücken, die Grössen α, β und a ausscheiden. Man setze $a+b+c=s$ und lasse, der Kürze wegen, die Accente weg. Man erhält:

$$\frac{sx-bc}{c}=\alpha,\quad y=\frac{c\sqrt{b^2-\alpha^2}}{s},\quad (\beta^2=b^2-\alpha^2),$$

$$y=\frac{c\sqrt{b^2-\left(\frac{sx-bc}{c}\right)^2}}{s},\quad ys=\sqrt{2bcsx-s^2x^2},$$

$$y^2s^2=2bcsx-s^2x^2,\quad y^2s+x^2s-2bcx=0,$$

$$y^2=\frac{2bcx-sx^2}{s}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (S')$$

und für $b=c$:

$$y^2=\frac{2c^2x-sx^2}{s}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (S'')$$

Um a auszuscheiden, nehme man die Gleichung

$$a^2=b^2+c^2-2\alpha c$$

zu Hülfe. Es ist:

$$a^2+2bc=b^2+c^2+2bc-2\alpha c,$$

ferner:

$$2c(\alpha+b)=(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a)$$

und

$$\frac{2c(\alpha+b)}{s}=b+c-a.$$

Aus dem obenstehenden Ausdrucke für x erhält man aber:

$$2x=\frac{2c(\alpha+b)}{s}.$$

Es ist also:

Digitized by Google

$$2x = b + c - a \quad \text{und} \quad a = b + c - 2x.$$

Setzt man diesen Werth von a in die Gleichungen (S), so ist:

$$y^2 = \frac{2bcx - 2(b+c-x)x^2}{2(b+c-x)} = \frac{bcx - x^2(b+c-x)}{b+c-x}, \quad \text{(U')}$$

und für $b = c$:

$$y^2 = \frac{c^2x - x^2(2c-x)}{2c-x} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \text{(U'')}$$

§. 39.

Discussion der Gleichungen für die geometrischen Orte der Schneidepunkte.

Discussion der Gleichung $y'^2(b^2 - x'^2) = x'^2(c-x')^2$; $b > c$.

Setzt man $y' = \dfrac{x'(c-x')}{\pm\sqrt{b^2 - x'^2}}$, so ergeben sich zwei gleiche Werthe für y' mit entgegengesetzten Zeichen. Der negative Werth bezieht sich auf β negativ; es ist aber, da $\beta = b \sin A$, β negativ, wenn $\sin A$ negativ ist, also wenn b mit der Abscissenaxe einen Winkel $> 180^0$ macht, d. h. wenn das Dreieck unterhalb der X-Axe liegt. Die Curve, dargestellt durch diese Gleichung, hat also ober- und unterhalb der Abscissenaxe einerlei Form. Setzt man $x' = \pm b$, so ist $y' = \infty$. Setzt man $x' > \pm b$, so ist y' imaginär. Die Linie erstreckt sich also nicht über die in den Punkten $\pm b$ der Abscissenaxe errichteten Senkrechten hinaus, sie liegt zwischen diesen, und da sie dieselben erst in der Unendlichkeit erreicht, bilden diese Senkrechten Asymptoten zu der gesuchten Linie.

Ist $x' = 0$, so ist $y' = 0$; ist $x' = c$, so ist $y' = 0$; die Linie geht also durch den Anfangspunkt und durch den Punkt $(c, 0)$.

Für $x' > 0$ und $< c$ ist $y' = \pm P$. Die Curve liegt also von $x' = 0$ bis $x' = c$ in zwei symmetrischen geschlossenen Theilen ober- und unterhalb der rechten Seite der Abscissenaxe.

Für $x' > 0$ und $> c$ aber $< b$ wird $y' = \mp M$; y' verändert also im Punkte $(c, 0)$ das Zeichen, der Theil der Curve, der früher oberhalb der X-Axe lag, zieht sich nun unterhalb derselben hin und umgekehrt; es ist desshalb der Punkt $(c, 0)$ ein doppelter.

Für $x' < 0$ oder negativ, x' mag kleiner als c oder grösser

Digitized by Google

als c bis zu $-b$ sein, wird $y' = \mp N$; y' verändert also im Punkt (0, 0) ebenfalls das Zeichen, und es ist desshalb dieser Punkt ebenfalls ein doppelter.

Für $x' > c$ und $< b$, mag es nun positiv oder negativ sein, wird y' stets grösser und grösser, bis es für $x' = \pm b$, wie bereits oben bemerkt, unendlich wird.

Dass die Punkte (0, 0) und (c, 0) doppelte sind, sowie dass die Curve nur diese Punkte als doppelte hat, findet man auch, wenn man die Differentiale der Gleichung in Bezug auf x' und y' nimmt, und die Werthe, welche dieselbe auf Null bringen und der Gleichung selbst Genüge leisten, sucht; man findet:

$$y'(b^2 - x'^2)\partial y' = 0 \text{ und } \frac{x'(c-x')(x'^3 - 2b^2x' + b^2c)}{b^2 - x'^2}\partial x'$$

und hieraus nur:

$$y' = 0 \text{ und } x' = 0, \quad x' = c$$

als Werthe, welche der Gleichung Genüge thun; es sind desshalb $x' = 0$ und $x' = c$ mit $y' = 0$ die doppelten Punkte der Curve. Um zu untersuchen, ob die Curve Maxima oder Minima hat, entwickele man das Differentiale $\frac{\partial y'}{\partial x'}$ und setze dasselbe gleich Null. Man findet:

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \pm \frac{x'^3 - 2b^2x' + b^2c}{(b^2 - x'^2)\sqrt{b^2 - x'^2}}.$$

$x'^3 - 2b^2x' + b^2c = 0$ führt auf die reducirte Gleichung des zweiten Grades $t^2 + qt = \left(\frac{p}{3}\right)^3$, wo $p = -2b^2$ und $q = b^2c$ ist. Die Wurzeln dieser Gleichung in t sind t' und $t'' = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \frac{q^2}{4}}$. Setzt man für p und q ihre Werthe, so ist:

$$t = -\frac{b^2c}{2} \pm \sqrt{\frac{-32b^6 + 27b^4c^2}{4.27}}.$$

Da $b > c$, so ist dieser Ausdruck imaginär; es sind desshalb die drei Wurzeln der Gleichung in x reell, die sich aber, ehe man die Werthe von b und c weiss, nicht finden lassen, man müsste sie dann durch eine Reihe ausdrücken.

Es ist indess, um den Lauf der Curve angeben zu können, nicht nöthig, die Wurzeln selbst zu wissen, der Zug der Curve lässt sich im Allgemeinen doch bestimmen.

Die Gleichung

$$x'^3 - 2b^2x' + b^2c = 0$$

ist ohne zweites Glied, die Summe der Wurzeln gleich Null, daher die Wurzeln von verschiedenen Zeichen. Die Curve ist zwischen $x'=0$ und $x'=c$, in welchen Punkten sie die Abscissenaxe passirt, eine geschlossene Linie $y' = \pm P$, und es kann nur in diesen Grenzen von einem Maximum oder Minimum die Rede sein, da für $x' > +c$ oder x' negativ y' beständig im Wachsen ist. Nun kann, wenn eine geschlossene Linie in zwei Punkten die Abscissenaxe schneidet, in dieser Ausdehnung nur eine ungerade Anzahl Maxima oder Minima stattfinden; also hier höchstens eins, weil die Gleichung

$$x'^3 - 2b^2x' + b^2c = 0$$

nicht blos positive Wurzeln hat, und es muss diess ein Maximum sein, weil ein Minimum in der Ausdehnung von $x=0$ bis $x=c$ noch zwei Maxima nothwendig machte. Geht man auf das zweite Differential über und setzt $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{M}{N}$, so ist:

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = \frac{N\partial M - M\partial N}{N^2} = \frac{\partial M}{N} \text{ (weil } M=0\text{)} = \pm \frac{3x'^2 - 2b^2}{(b^2 - x'^2)\sqrt{b^2 - x'^2}}.$$

Null wird dieser Ausdruck nur für $x' = b\sqrt{\tfrac{2}{3}}$. Dieser Werth von x' ist aber keine Wurzel des Zählers vom ersten Differential, folglich wird dieser Ausdruck für keine Wurzel des Zählers von $\frac{\partial y'}{\partial x'}$ Null, und es ist demnach die Wurzel des Maximums $x' < b\sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

Obwohl es nach diesen Ausführungen unzweifelhaft ist, dass die Curve ein Maximum und nur eins zwischen den Punkten (0, 0) und (c, 0) hat, sowie, dass sie die in Taf. VI. Fig. 10. durch die Punkte bezeichnete ist, so kann man diess doch noch weiter darthun durch Aufsuchung des zweiten Differentials $\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2}$. Es ist diess

$$= \frac{-b^2(x'^2 - 3cx' + 2b^2)}{(b^2 - x'^2)^2\sqrt{b^2 - x'^2}}.$$

Der Ausdruck $x'^2 - 3cx' + 2b^2$ ist für x' negativ und Null offenbar positiv, er ist es aber auch für $x' = \frac{c}{n}$ und $x' = c + m$; $(c + m < b)$. Die erstere Substitution ergibt:

$$+\frac{1}{n^2}(c^2 - 3c^2n + 2b^2n^2), \text{ das ist } \frac{1}{n^2}(-c^2(n-1) + 2n(b^2n - c^2)).$$

Digitized by Google

Setzt man für b, die grössere Seite, den Werth $c+p$, so erhält man:

$$\frac{1}{n^2}[-c^2(n-1)+2nc^2(n-1)+2n^2(2cp+p^2)],$$

einen Ausdruck, der offenbar positiv ist. Die zweite Substitution $c+m$ ergibt:

$$2(b+c)(b-c)-m(c-m).$$

Nun ist $m<b-c$, da m nur ein Theil von $b-c$ ist, und $c-m<b+c$; es ist also dieser Ausdruck positiv. Da nun dieser Ausdruck $x'^2-3cx'+2b^2$ für alle möglichen Werthe von x' positiv ist, so ist $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ für alle möglichen Werthe negativ (der Nenner äussert auf das Zeichen keinen Einfluss, da $b>x'$); es haben also y und $\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2}$, wenn der Punkt oberhalb der x-Axe (wenn Nichts erwähnt wird, wird das Dreieck als über der Abscissenaxe liegend betrachtet) ist, verschiedene Zeichen, und wenn der Punkt unterhalb der Abscissenaxe liegt, einerlei Zeichen, folglich wendet die Curve im ersteren Falle der Abscissenaxe ihre concave, im letzteren Falle ihre convexe Seite zu.

Hiernach hat die Curve auch keine Flexionspunkte und keine Spitze, denn $\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2}=\infty$ gibt $x'=b$, ein Punkt, für welche die Ordinate erst in der Unendlichkeit die Curve trifft, und $\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2}=0$ gibt $x'=\frac{3c\pm\sqrt{9c^2-8b^2}}{4}$. Dieser Werth ist nur möglich für $9c^2 \overline{\gtrless} 8b^2$ oder $\frac{3c\sqrt{2}}{4} \overline{\gtrless} b$. In beiden Fällen ist aber $x' \overline{\gtrless} b$, da von x' negativ an bis $x'=b$ der Ausdruck $x^2-3cx'+2b^2$ stets positiv ist, also eine Wurzel desselben nicht zwischen $x'=\pm b$ liegt.

§. 40.

Discussion der Gleichung $y'^2(c+x')=x'^2(c-x')$; $b=c$.

Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$y'=\pm x'\sqrt{\frac{c-x'}{c+x'}},$$

so ergeben sich zwei gleiche Werthe für y' mit entgegengesetz-

Digitized by Google

ten Zeichen; die Curve wird also auch bei den gleichschenkligen Dreiecken von der Abscissenaxe in zwei symmetrische Theile getheilt, wovon der negative Theil wie in §. 40. für $A > 180^0$ gilt.

Für $x' = 0$ und $x' = c$ ist $y' = 0$. Die Curve geht also durch den Anfangspunkt und den Punkt $(c, 0)$.

Für $x = -c$ ist $y' = \infty$. Die Senkrechte in dem Punkte $-c$ der Abscissenaxe kommt also erst in der Unendlichkeit mit der Linie zusammen, bildet also eine Asymptote zu derselben.

Für $x' > c$, positiv oder negativ, ist y' imaginär; die Curve liegt also zwischen den beiden in den Punkten $+c$, $-c$ der Abscissenaxe errichteten Senkrechten.

Für $x' < +c$ ist $y' = \pm P$. Die Curve wird also für diese Werthe von x' von der Abscissenaxe in zwei symmetrisch geschlossene Theile getheilt.

Ist $x < c$ aber negativ, so ist $y' = \mp M$. Die Curve geht also durch den Anfangspunkt und der Theil der Curve, der für x positiv oberhalb der X-Axe war, kommt unterhalb derselben und der Theil unterhalb der X-Axe über dieselbe. Der Anfangspunkt ist also ein doppelter. Diess findet man auch, wenn man das Differential der Gleichung in Bezug auf x' und y' nimmt und die Werthe von x' und y' aufsucht, welche diese Differentiale auf Null bringen und zugleich der Gleichung genügen; man findet:

$$2y'(c + x') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{2x'(-x'^2 - cx' + c^2)}{c + x'} = 0\ldots$$

Diese Ausdrücke ergeben für den doppelten Punkt $x' = 0$, $y' = 0$, den Anfangspunkt.

Um die Werthe zu finden, für welche y' ein Maximum oder Minimum wird, entwickle man $\frac{\partial y'}{\partial x'}$ und setze es gleich Null; man erhält:

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{-y'^2 + 2x'(c - x') - x'^2}{2y'(c + x')},$$

und wenn man für y' seinen Werth setzt:

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \mp \frac{x'^2 + cx' - c^2}{(c + x')\sqrt{c^2 - x'^2}}.$$

$x'^2 + cx' - c^2 = 0$ gibt $x' = \frac{-c \pm c\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-c - c\sqrt{5}}{2}$ ist, vom

Digitized by Google

Zeichen abgesehen, grösser als c, weil $\frac{1}{2}c\sqrt{5} > \frac{1}{2}c$; dieser Werth macht y' imaginär, der andere Werth $-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c\sqrt{5}$ ist positiv und kleiner als c. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung, so ist:

$$y' = \pm\frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{c}{2}\sqrt{2(-1+\sqrt{5})} = \pm\frac{3-\sqrt{5}}{4}c\sqrt{2(-1+\sqrt{5})}.$$

Dieser Werth von y' ist ein Maximum; denn nimmt man das zweite Differential, so ist

$$\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2} = \partial\frac{M}{N} = \frac{N\partial M - M\partial N}{N^2} = \frac{\partial M}{N} = \mp\frac{\partial(x'^2+cx'-c^2)}{(c+x')\sqrt{c^2-x'^2}}$$
$$= \mp\frac{2x'+c}{(c+x')\sqrt{c^2-x'^2}}.$$

Substituirt man in diesem Ausdruck für x' den Werth $\frac{-c+c\sqrt{5}}{2}$, so ist

$$\frac{\delta^2 y'}{(\partial x')^2} = \mp\frac{2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\sqrt{2(-1+\sqrt{5})}}.$$

Der Werth $-\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\sqrt{5}$ ist also ein Maximum, weil er das zweite Differential negativ macht.

Entwickelt man das zweite Differentiale für alle Punkte, so ist, wenn man $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{D}{B\sqrt{AB}}$ setzt,

$$\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2} = \frac{2\partial(D)\times AB^3 - \partial(AB^3)\times D}{2AB^4\sqrt{AB}} = \frac{c^2(x'^3-3c^2x'-2c^3)}{AB^4\sqrt{AB}}$$
$$= \frac{c^2(x'+c)^2(x'-2c)}{AB^4\sqrt{AB}} = \frac{c^2(x'-2c)}{AB^2\sqrt{AB}}.$$

Dieser Ausdruck ist für x' negativ, null und positiv aber $<2c$, stets negativ; die Curve wendet also der X-Axe für y' positiv ihre concave und für y' negativ ihre convexe Seite zu.

$\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2} = 0$ gibt $x' = 2c$, ein Werth, welcher keinen Punkt für die Curve liefert.

$\frac{\partial^2 y'}{(\partial x')^2} = \infty$, gibt $x = \pm c$, der Werth $-c$ überschreitet die Grenzen der Curve; der Werth $+c$ gibt den Grenzpunkt $(c, 0)$. Die Curve hat also weder einen Beugpunkt noch einen Wieder-

Digitized by Google

kehrpunkt; sie hat die Form in Taf. VI. Fig. 11. und ist eine Focale, die im Anfangspunkt die X-Axe unter einem Winkel von 45^0 durchschneidet, weil $x' = 0$, das Differential $\frac{\partial y'}{\partial x'} = 1$ macht.

§. 41.

Discussion der Gleichungen für den Punkt (x'', y'').

Die Werthe von y'' liegen sämmtlich in der auf der Mitte von c errichteten Senkrechten und es ergeben sich diese Werthe, wenn man in den Gleichungen

$$4y''^2(b^2 - \alpha^2) = (b^2 - \alpha c)^2 \quad \text{und} \quad 4y''^2(c + \alpha) = c^2(c - \alpha)$$

für α die möglichen Werthe setzt, welche alsdann auf jener Senkrechten abgestochen werden können.

Diese Gleichungen stellen aber, da sie die Relationen zwischen den Veriabeln α und y'' enthalten, ebenfalls Linien dar, welche durch die stetige Aufeinanderfolge der um das Differentiale sich verändernden Werthe für α gebildet werden.

§. 42.

Discussion der Gleichung $4y''^2(b^2 - \alpha^2) = (b^2 - \alpha c)^2$; $b > c$.

Bringt man diese Gleichung auf die Form $y'' = \pm \frac{b^2 - \alpha c}{2\sqrt{b^2 - \alpha^2}}$, so ergeben sich zwei gleiche Werthe für y'' mit entgegengesetzten Zeichen. Die Curve wird also von der Abscissen-Axe in 2 symmetrische Theile getheilt und gilt wie in §. 40 der negative Theil für $A > 180^0$.

Nimmt man $\alpha > \pm b$, so ist y'' imaginär, die Linie liegt also zwischen den in den Punkten $\pm b$ auf der Abscissen-Axe errichteten Senkrechten.

Nimmt man $\alpha = \pm b$, so ist $y'' = \infty$; die Senkrechten in den Punkten $\pm b$ kommen also erst in der Unendlichkeit mit der Curve zusammen, sind also Asymptoten zu derselben.

Ist α negativ, mag es nun grösser, gleich oder kleiner als c sein, so nimmt y'' für α von b an kleiner werdend, immer mehr und mehr ab, weil bei dem Kleinerwerden von α der Zähler ab und der Nenner zunimmt, bis für $\alpha = 0$, $y'' = \pm \frac{b}{2}$ ist.

Ist α positiv und kleiner als c, so ist $y'' < \pm\frac{b}{2}$ und grösser als $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$; denn ist $\alpha < c$, so ist $\alpha^2 < \alpha c$; $-b^2+\alpha^2 < \alpha c - b^2$; $b^2-\alpha^2 > b^2-\alpha c$; $\sqrt{b^2-\alpha^2} > \sqrt{b^2-\alpha c}$.—. y'' ist aber

$$= \pm\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2-\alpha c}\times\sqrt{b^2-\alpha c}}{\sqrt{b^2-\alpha^2}}.$$

Da nun $\sqrt{b^2-\alpha^2} > \sqrt{b^2-\alpha c}$, so ist:

$$\frac{\sqrt{b^2-\alpha c}}{\sqrt{b^2-\alpha^2}} < 1;$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2-\alpha c}\times\sqrt{b^2-\alpha c}}{\sqrt{b^2-\alpha^2}} < \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-\alpha c} \text{ oder } y'' < \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-\alpha c};$$

es ist aber auch $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\sqrt{b^2} > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-\alpha c}$. Da nun $y'' < \frac{1}{2}\sqrt{b^2-\alpha c}$ so ist auch $y'' < \frac{b}{2}$ für $\alpha < c$.

Ferner: $\alpha < c$ gibt $\alpha(\alpha-c) > c(\alpha-c)$ [denn $\alpha-c$ ist negativ]; $\alpha^2-\alpha c > \alpha c - c^2$; $-2\alpha b^2 c > -\alpha^2 b^2 - b^2 c^2$; $b^4 - 2\alpha b^2 c + \alpha^2 c^2 > b^4 - \alpha^2 b^2 - b^2 c^2 + \alpha^2 c^2$; $(b^2-\alpha c)^2 > (b^2-\alpha^2)(b^2-c^2)$; $b^2-\alpha c > \sqrt{b^2-\alpha^2} \times \sqrt{b^2-c^2}$; $\frac{1}{2}\frac{b^2-\alpha c}{\sqrt{b^2-\alpha^2}} > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$; $y'' > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$.

Für $\alpha = c$ ist $y'' = \pm\frac{1}{2}\frac{b^2-c^2}{\sqrt{b^2-c^2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$.

Ist α positiv und grösser als c, so ist $y'' > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$; denn $\alpha > c$ gibt $\alpha(\alpha-c) > c(\alpha-c)$; $\alpha^2-\alpha c > \alpha c - c^2$; $-2\alpha c > -\alpha^2 - c^2$; $-2\alpha b^2 c > -\alpha^2 b^2 - b^2 c^2$; $b^4 - 2\alpha b^2 c + \alpha^2 c^2 > b^4 - \alpha^2 b^2 - b^2 c^2 + \alpha^2 c^2$; $(b^2-\alpha c)^2 > (b^2-c^2)\times(b^2-\alpha^2)$; $b^2-\alpha c > \sqrt{b^2-c^2} \times \sqrt{b^2-\alpha^2}$; $\frac{1}{2}\frac{b^2-\alpha c}{\sqrt{b^2-\alpha^2}} > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$; $y'' > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$.

Es ist also für α positiv, wenn $\alpha > c$, $y'' > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$; wenn $\alpha = c$, $y'' = \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$ und wenn $\alpha < c$, $y'' > \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$. Für α negativ ist $y'' > \frac{b}{2}$ also auch grösser als $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$. Aus diesem folgt, dass $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$ für y'' ein Minimum ist.

Diess zeigt sich auch, wenn man das Differential $\frac{\partial y''}{\partial \alpha}$ entwickelt und gleich Null setzt. Es ist

Digitized by Google

$$\frac{\partial y''}{\partial \alpha} = \pm \frac{b^2(\alpha - c)}{2(b^2-\alpha^2)\sqrt{b^2-\alpha^2}}.$$

Gleich Null gesetzt erhält man $\alpha = c$. Um zu erkennen, ob diess ein Maximum oder Minimum ist, muss man $\frac{\partial^2 y''}{(\partial\alpha)^2}$ entwickeln; man erhält

$$\frac{\partial^2 y''}{\partial \alpha^2} = \pm \frac{b^2(b^2-\alpha^2)+3\alpha b^2(\alpha - c)}{2(b^2-\alpha^2)^2\sqrt{b^2-\alpha^2}}.$$

Setzt man hierin $\alpha = c$, so erhält man

$$\frac{\partial^2 y''}{\partial \alpha^2} = \pm \frac{b^2}{2(b^2-\alpha^2)\sqrt{b^2-\alpha^2}};$$

es ist also $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$ ein Minimum, da das zweite Differential dasselbe Zeichen wie y'' hat und man für $\alpha = c$, $y'' = \frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$ erhält.

Es ist aber auch das zweite Differential, wenn man den gemeinschaftlichen Factor b^2 herauszieht und für $b^2-\alpha^2$ seinen Werth β^2 setzt

$$\frac{\partial^2 y''}{\partial \alpha^2} = \pm \frac{b^2(\beta^2 - 3\alpha(c-\alpha))}{2\beta^3}.$$

Dieser Ausdruck ist für α negativ oder α grösser als c positiv; folglich wendet in diesen Grenzen die Curve der Abscissen-Axe ihre convexe Seite zu. Ist $\frac{\partial^2 y''}{\partial \alpha^2} = 0$, so enthält die Curve eine Biegung; diess ist der Fall, wenn $\beta^2 - 3\alpha(c-\alpha) = 0$ das ist $b^2 + 2\alpha^2 - 3\alpha c = 0$; hieraus ergiebt sich der doppelte Werth für

$$\alpha = \frac{3c \pm \sqrt{9c^2 - 8b^2}}{4}.$$

Dieser Werth für α ist nur möglich, wenn $9c^2 \geqq 8b^2$ das ist $\frac{3\sqrt{2}}{4} \geqq \frac{b}{c}$ ist. Ist $\frac{b}{c} > \frac{3\sqrt{2}}{4}$, also der Beugungspunkt (Nullwerth) unmöglich, so bleibt $\frac{\partial^2 y''}{\partial \alpha^2}$, welches von der ersten Bewegung des Schenkels b nach rechts an positiv ist, positiv, weil es nur nach dem Nullwerth negativ werden kann, und die Curve hat keinen Flexionspunkt, sondern nur ein Minimum. Ist $b = c$, wie in der Gleichung des folgenden Paragraphes, so ist $\frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{b}{c} (=1)$; der eine Beugungspunkt ist in $\alpha = \frac{c}{2}$, der andere Punkt in $\alpha = c$,

Digitized by Google

wo aber die Curve durch die Axe geht. Die Fig. 12. (Taf. VII.) ist die Curve ohne Biegung. Hier ist $\frac{b}{c}=\frac{4}{3}$ also $\frac{b}{c}>\frac{3\sqrt{2}}{4}=1{,}05...$

Diese verschiedenen Werthe von y'' auf der Senkrechten in $x''=\frac{c}{2}$ abgestochen, ergeben die verschiedenen Werthe von y'' für das Dreieck, die also von $\alpha=-b$ an sich aus dem Unendlichen herabsenken, bis sie für $\alpha=c$ das Minimum $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-c^2}$ erreichen, von da an aber wieder wachsen, bis sie für $\alpha=+b$ wieder ins Unendliche sich erheben.

§. 43.

Discussion der Gleichung $4y''^2(c+\alpha)=c^2(c-\alpha)$; $b=c$.

Bringt man die Gleichung auf die Form $y''=\pm\frac{c}{2}\sqrt{\frac{c-\alpha}{c+\alpha}}$, so ergeben sich ebenfalls zwei gleiche Werthe für y'' mit entgegengesetzten Zeichen. Die Curve wird also von der X-Axe in zwei symmetrische Theile geschnitten und gilt, wie in §. 40. der negative Werth für $A>180^0$.

Nimmt man $\alpha>c$ negativ oder positiv, so ist y'' imaginär; die Linie liegt also zwischen den in den Punkten $\pm c$ auf der Abscissen-Axe errichteten Senkrechten.

Ist $\alpha=-c$, so ist $y''=\infty$. Die Senkrechte in $-c$ kommt also erst in dem Unendlichen mit der Curve zusammen und ist demnach eine Asymptote zu derselben.

Ist α negativ und kleiner als c, so ist y'' mit dem Kleinerwerden von α beständig im Abnehmen, weil der Zähler ab und der Nenner zunimmt, bis es für $\alpha=0$ den Werth $\pm\frac{c}{2}$ erhält.

Ist α positiv und kleiner als c, so ist $y''=\pm P<\pm\frac{c}{2}$, denn $\frac{\sqrt{c-\alpha}}{\sqrt{c+\alpha}}<1$ gibt $\pm\frac{c}{2}\sqrt{\frac{c-\alpha}{c+\alpha}}<\pm\frac{c}{2}$, und nimmt mit dem Wachsen von α stets ab, da in $\frac{\sqrt{c-\alpha}}{\sqrt{c+\alpha}}$ der Zähler ab und der Nenner zunimmt, bis für $\alpha=c$ man $y''=0$ erhält.

Differentiirt man die Gleichung, so ist:

$$\frac{\partial y''}{\partial\alpha}=\mp\frac{c^2}{2(c+\alpha)\sqrt{c^2-\alpha^2}}.$$

Digitized by Google

Diess kann nicht gleich Null gesetzt werden; es ist aber für $\alpha = c$ unendlich, daher die Grenze für α; das zweite Differential

$$\left(\frac{\partial^2 y''}{(\partial\alpha)^2} = \pm \frac{c^2(c-2\alpha)}{2(c+\alpha)(c^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

hat einerlei Zeichen mit y'' bis $\alpha = \frac{c}{2}$, nachher verschiedene Zeichen mit y''. Die Linie wendet also der Abscissen-Axe bis $\alpha = \frac{c}{2}$ ihre convexe Seite zu, in diesem Punkte ist eine Biegung, von welcher an die Curve bis zu $\alpha = c$ ihre concave Seite der X-Axe zukehrt. Die Curve hat also die in Taf. VII. Fig. 13. dargestellte Form, wovon jedoch nur der obere Theil gegeben ist.

Die Werthe von y'', welche bei diesen Dreiecken auf der Senkrechten aus der Mitte von c abgestochen werden, nehmen also, wenn A von 180^0 bis 0^0 abnimmt, beständig bis zu Null ab.

§. 44.

Discussion der Gleichung $9y'''^2 = b^2 - 9x'''^2 + 6cx''' - c^2$; $b > c$.

Gibt man dieser Gleichung die Form $y'''^2 + (x''' - \frac{c}{3})^2 = \frac{b^2}{9}$ und vergleicht sie mit der allgemeinen Gleichung des Kreises $(y-q)^2 + (x-p)^2 = r^2$, so sieht man, dass sie die Gleichung eines Kreises ist, dessen Coordinaten des Mittelpunktes $\left(\frac{c}{3}, 0\right)$ und dessen Halbmesser $\frac{b}{3}$ sind. Beschreibt man also in der Entfernung $\frac{c}{3}$ von A aus D mit der Länge $\frac{b}{3}$ einen Kreis, so ist derselbe der geometrische Ort der Punkte (x''', y''').

Lösst man die Gleichung nach y''' auf, so erhält man:

$$y''' = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6cx''' - 9x'''^2 + b^2 - c^2}.$$

Die Curve, der Kreis, wird also von der Abscissen-Axe in zwei symmetrische Theile geschnitten und gilt, wie §. 40., der negative Werth für $A > 180^0$.

Ist $6cx''' - 9x'''^2 + b^2 - c^2 = 0$, so ist $x''' = \frac{1}{3}(c \pm b)$, und $y''' = 0$; es sind diess die Punkte E und F (Taf. VII. Fig. 14.). Da $x''' = \frac{1}{3}(\alpha + c)$, so ist α in diesem Fall $\pm b$. Es sind diess die Grenzen, der sich α bei seinem Wachsen nach rechts und links

Digitized by Google

nähert, ohne sie erreichen zu dürfen, wenn das Dreieck existiren soll.

Ist $6cx''' - 9x'''^2 + b^2 - c^2 < 0$, das ist $9x'''^2 - 6cx''' + c^2 - b^2 > 0$; also $x''' > \frac{1}{3}(c \pm b)$, so ist y''' imaginär. Alsdann ist $\alpha > b$.

Ist $6cx''' - 9x'''^2 + b^2 - c^2 > 0$, das ist $9x'''^2 - 6cx''' + c^2 - b^2 < 0$, also $x''' < \frac{1}{3}(c \pm b)$, so erhält y''' zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Zeichen, von denen der negative sich auf die Lage des Dreiecks unterhalb der Abscissen-Axe bezieht.

Ist $x''' = 0$, so ist $y''' = \pm\frac{1}{3}\sqrt{b^2 - c^2}$ und $\alpha = -c$; das Dreieck hat alsdann die Lage ABC^{I}.

Ist $x''' = \frac{1}{3}c$, so ist $y''' = \pm\frac{1}{3}b$ und $\alpha = 0$, das Dreieck hat alsdann die Lage ABC^{IV} (rechtwinkelig; $\alpha = b \cos A = 0$; $\cos A = 0$, $A = 90^0$).

Ist $x''' = \frac{1}{3}2c$, so ist $\alpha = c$; das Dreieck ist ABC^{VIII}, rechtwinkelig bei B. y''' ist ebenfalls $= \pm\frac{1}{3}\sqrt{b^2 - c^2}$.

Ist $x''' < \frac{1}{3}c$ also $\frac{1}{3}c > \frac{1}{3}(\alpha + c)$ so ist $\alpha < 0$ also negativ; die Seite b liegt in diesem Falle links der Ordinaten-Axe.

Ist $x''' = \frac{1}{2}c$, so ist $\alpha = \frac{1}{2}c$, $y''' = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}c^2} = \pm\frac{1}{3}\beta$, da $b^2 - \frac{1}{4}c^2 = \beta^2$; das Dreieck ist alsdann gleichschenkelig und hat die Lage ABC^{VI}.

Ist $x''' = \dfrac{b^2 + 2c^2}{6c}$, so ist $\alpha = \dfrac{b^2}{2c}$. Diess ist die Lage ABC^{VII} des gleichschenkeligen Dreiecks, wo AC die ungleiche Seite ist; denn es ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2\alpha c$, oder für α seinen Werth $\dfrac{b^2}{2c}$ gesetzt $a^2 = c^2$, $a = c$, oder $AB = BC^{VII}$.

Differentiirt man die Gleichung, so ist $\dfrac{\partial y'''}{\partial x'''} = \dfrac{c - 3x'''}{3y'''}$. Setzt man $\dfrac{\partial y'''}{\partial x'''} = 0$, so ist $x''' = \frac{1}{3}c$, der Werth für y''' ein Maximum, α ist alsdann gleich Null und das Dreieck hat die Lage ABC^{IV}.

§. 45.

Discussion der Gleichung $3y'''^2 = 2cx''' - 3x'''^2$; $b = c$.

Gibt man dieser Gleichung die Form $y'''^2 + x'''^2 - \frac{1}{3}2cx = 0$ oder $y'''^2 + (x''' - \frac{1}{3}c^2)^2 = \dfrac{c^2}{9}$ und vergleicht sie mit der allgemeinen Gleichung des Kreises $(y - q)^2 + (x - p)^2 = r^2$, so findet man wieder die Gleichung eines Kreises, dessen Coordinaten des Mittelpunktes $(\frac{1}{3}c, 0)$ und dessen Halbmesser $\frac{1}{3}c$ sind. Beschreibt man also aus D in der Entfernung $\frac{1}{3}c$ von A mit eben dieser Länge $\frac{1}{3}c$ einen Kreis, so ist derselbe der geometrische Ort der Punkte (x''', y'''), wenn die Dreiecke gleichschenkelig sind. (Taf. VII. Fig. 15.)

Digitized by Google

Lösst man die Gleichung nach y''' auf, so erhält man:

$$y''' = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}(2cx'''-3x'''^2)},$$

die Grösse unter dem Radical ist Null für $x'''=0$ und $x'''=\frac{2}{3}c$. Für diese beiden Werthe von x''' ist also $y'''=0$. Da allgemein $x'''=\frac{1}{3}(\alpha+c)$, so ist für $x'''=0$, $\alpha=-c$ und für $x'''=\frac{2}{3}c$, $\alpha=+c$, es sind diess die beiden Grenzen der Lage des beweglichen Schenkels c, welche er nie erreichen darf, wenn ein Dreieck bestehen soll, denn ist $\frac{1}{3}(2cx'''-3x'''^2)<0$, also $x'''>\frac{2}{3}c$, so ist y''' imaginär, also $\alpha>c$.

Ist $\frac{1}{3}(2cx'''-3x'''^2)>0$, also $x'''<\frac{2}{3}c$, so hat y''' zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Zeichen, von denen der negative sich auf die Lage des Dreiecks unterhalb der Abscissen-Axe bezieht.

Ist $x'''<\frac{1}{3}c$, so ist $\alpha<0$, also negativ. Die bewegliche Seite c hat alsdann eine Lage links der Ordinaten-Axe.

Ist $x'''=\frac{1}{3}c$, so ist $y'''=\pm\frac{1}{3}c$ und $\alpha=0$, der bewegliche Schenkel c hat alsdann die senkrechte Lage und das Dreieck ist ABC''.

Ist $x'''>\frac{1}{3}c$, so ist $\alpha>0$, also positiv, der bewegliche Schenkel c hat eine Lage rechts der Ordinaten-Axe.

Ist $x'''=\frac{1}{2}c$, so ist $y'''=\pm\frac{c}{2\sqrt{3}}=\frac{c\sqrt{3}}{6}$ und $\alpha=\frac{1}{2}c$. Das Dreieck ist alsdann gleichseitig und ABC'''.

Ist $x'''=\frac{1}{3}(c\pm\sqrt{c^2-\beta^2})$, so ist $\alpha=\pm\sqrt{c^2-\beta^2}$, das Dreieck hat alsdann für α negativ eine Lage links und für α positiv eine Lage rechts der Y-Axe.

Differentiirt man die Gleichung, so ist $\frac{\partial y'''}{\partial x'''}=\frac{c-3x'''}{3y}$. Setzt man $c-3x'''=0$, so ist für $x'''=\frac{1}{3}c$ y''' ein Maximum, wie natürlich, da die grösste Ordinate des Kreises, die im Mittelpunkte ist.

Discussion der Gleichungen für die Punkte (x^{IV}, y^{IV}).

(Der Kürze wegen bleiben die Accente weg.)

1. Discussion der Gleichungen U.

a) Gleich. (U'): $y^2=\frac{bcx-x^2(b+c-x)}{b+c-x}$; $b>c$. (Taf. VII. Fig. 16.)

§. 46.

Giebt man dieser Gleichung die Form $y=\pm\sqrt{\frac{x(x-c)(x-b)}{b+c-x}}$, so zeigt sich, dass die gesuchte Linie aus zwei durch die Ab-

Digitized by Google

scissen-Axe getrennten symmetrischen Theilen besteht mit entgegengesetzten Zeichen, der negative Werth gilt für $A > 180^0$, also für die Lage des Dreiecks unter der X-Axe.

Ist x negativ, so ist y imaginär, die Curve hat also keinen Punkt links der Ordinaten-Axe.

Ist x gleich Null, so ist $y=0$; der Anfangspunkt ist also ein Punkt der Curve.

Ist x positiv und kleiner als c, so hat y stets einen Werth, bis es bei $x=c$ wieder Null ist; die Curve bildet also eine geschlossene Linie von $x=0$ bis $x=+c$, in welchen beiden Punkten sie die X-Axe trifft.

Ist $x>c$ aber $<b$, so ist y imaginär. Zwischen den beiden, in den Punkten c und b der Abscissen-Axe errichteten, Senkrechten liegt also kein Punkt der Curve.

Ist $x=b$, so ist $y=0$, die Linie trifft also bei b wieder die X-Axe.

Ist $x>b$ aber $<b+c$, so hat y Werthe, die Curve also Punkte in dieser Ausdehnung.

Ist $x=b+c$, so ist y unendlich, die Senkrechte in $x=b+c$ trifft die Curve erst in der Unendlichkeit und ist demnach eine Asymptote zu derselben.

Ist $x>b+c$, so ist y imaginär, die Curve erstreckt sich also nicht über $x=b+c$ hinaus.

Die Lage des Dreiecks für ein x; nämlich der Werth von α ergibt sich aus der Gleichung:

$$x=\frac{(\alpha+b)c}{s}=\frac{(\alpha+b)c}{b+c+\sqrt{b^2+c^2-2\alpha c}}.$$

Die gesuchte Curve besteht also aus zwei getrennten Theilen, von denen der eine zwischen $x=0$ und $x=c$ liegende Theil eine geschlossene Linie bildet, der andere aber ein unendlicher Zweig zwischen $x=b$ und $x=b+c$ ist. Die Curve für die Punkte (x^{IV}, y^{IV}) liegt aber, wie vorher nachgewiesen, stets innerhalb des Dreiecks; es kann also dieser unendliche Zweig der Linie, der durch die Gleichung (U′) dargestellt ist, bei der Curve für die Punkte (x^{IV}, y^{IV}) ausser Frage bleiben, da die gesuchte Curve für die Punkte (x^{IV}, y^{IV}) nur der zwischen $x=0$ und $x=c$ liegende Theil sein kann.

Um zu sehen, ob die Curve doppelte Punkte hat, differentiire man die Gleichung:

Digitized by Google

$$y^2 - \left(\frac{x^3-(b+c)x^2+bcx}{b+c-x}\right) = V = 0,$$

in Bezug auf x und y. Man erhält:

$$\frac{\partial(V)}{\partial y} = 2y\partial y;\ \frac{\partial(V)}{\partial x} = \frac{-2x^3+4(b+c)x^2-2(b+c)^2x+bc(b+c)}{(b+c-x)^2}.$$

$2y\partial y = 0$ gibt $y=0$. Für diesen Werth von y kann x nur $=0$, $=c$, $=b$ sein; da aber diese drei Werthe von x der Gleichung:

$$\frac{\partial(V)}{\partial x} = 0$$

nicht genügen, so hat die gesuchte Linie keine doppelten Punkte.

Um die Maxima oder Minima der Linie zu finden, entwickele man $\frac{\partial y}{\partial x}$ für die Gleichung:

$$y = \sqrt{\frac{x(x-c)(x-b)}{b+c-x}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}};$$

man findet:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(A).B - \partial(B)A}{2B\sqrt{AB}} = \frac{-2x^3+4(b+c)x^2-2(b+c)^2x+bc(b+c)}{2B\sqrt{AB}}.$$

$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gibt:

$$2x^3-4(b+c)x^2+2(b+c)^2x-bc(b+c) = 0. \quad . \quad . \quad (M)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind sämmtlich reell, da ihr erstes Differential die beiden reellen Wurzeln $\frac{1}{6}[2(b+c)\pm(b+c)]$ hat. Eine der Wurzeln der Gleichung (M) liegt zwischen $x=c$ und $x=b$, denn ihre Werthe für diese beiden Substitutionen sind (für c), $bc(b-c)$ positiv und (für b), $-bc(b-c)$ negativ. Die Curve hat aber zwischen den Abscissen c und b keinen Punkt, diese Wurzel fällt also für die Curve aus und es bleiben für Maxima und Minima nur noch zwei Wurzeln, von denen aber nur eine zwischen $x=0$ und $x=c$ liegen kann, weil die Curve zwischen diesen beiden Werthen, für welche sie die X-Axe trifft, eine geschlossene Linie ist, folglich in diesen Grenzen nur eine ungerade Anzahl Maxima und Minima liegen kann; ja es kann diese Wurzel nur ein Maximum bedeuten, weil ein Minimum noch zwei Maxima bedingen würde.

Ueber den Punkt $x=c$ hinaus kann von einem Maximum keine Rede sein, da für die von da an möglichen Punkte der Curve

Digitized by Google

(von $x=b$ bis $x=b+c$) die Ordinaten beständig im Wachsen sind.

Setzt man $x=\frac{mc}{n}$ und $m<n$, so ergibt sich:

$$\frac{2m^3c^3}{n^3}-\frac{4(b+c)m^2c^2}{n^2}+\frac{2(b+c)^2mc}{n}-b^2c-bc^2,$$

oder:

$$\frac{c^3(2m(m-n)^2)+bc^2(-(2m-n)^2)n+b^2c(2m-n)n^2}{n^3}.$$

Der Factor in m und n des ersten Gliedes ist für x positiv, unbedingt positiv, beim zweiten Gliede unbedingt negativ, beim dritten Gliede positiv oder negativ, je nachdem $2m$ grösser oder kleiner als n ist; ferner ist $(2m-n)n^2>(2m-n)^2n$, weil $n>m$, ebenso $b^2c>bc^2>c^3$; es ist also, wenn $2m\overset{=}{>}n$, der Ausdruck (M), einerlei, welche Werthe b und c hat, positiv; also ist von $x=\frac{1}{2}c$ bis $x=c$ kein Zeichenwechsel, dieser kommt, weil (M) für $x=0$ negativ, in der Ausdehnung $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}c$ vor.

Will man den Ort des Maximums näher untersuchen, so gebe man dem n bestimmte Werthe. Setzt man $n=100$, so liegt das Maximum zwischen $x=\frac{38c}{100}$ und $x=\frac{40c}{100}$. Auf das Verhältniss von b zu c kommt es an, ob das Maximum zwischen $x=\frac{38c}{100}$ und $\frac{39c}{100}$ oder zwischen $\frac{39c}{100}$ und $\frac{40c}{100}$ liegt.

Die dritte Wurzel von (M) liegt über b rechts hinaus, denn setzt man $x=b+nc$, so erhält man für (M):

$$2c^3n^3+2c^2n^2(b-2c)+2c^2n(c-2b)+bc(c-b)$$

einen Ausdruck, welcher jedenfalls einmal das Zeichen des ersten Gliedes (+), für n variabel, erhält, also das der Substitution von b für x entgegengesetzte Zeichen; von da an bleibt der Ausdruck stets positiv *).

Es ist zwar zweifellos, dass der fragliche Punkt der Curve zwischen $x=0$ und $x=\frac{1}{2}c$ ein Maximum ist; es geht diess aber

*) Für $\frac{\partial y}{\partial x}=\infty$ ergeben sich wieder die Grenzpunkte $(0,0)$, $(c,0)$, $(b,0)$

Digitized by Google

auch aus dem Werthe von $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ hervor. Man erhält für dieses zweite Differential:

$$\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2} = \frac{2A(\partial^2(A) \times B^2 + \partial(A) \times B + A) - \partial(AB)(\partial(A) \times B + A)}{4A.B^2\sqrt{AB}}.$$

Setzt man im Zähler dieses Ausdrucks für A und B ihre Werthe, so ist:

$$\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2} = \frac{bc(4x^4 - 4(b+c)x^3 + 4bc(b+c)x - bc(b+c)^2)}{4AB^2\sqrt{AB}}.$$

Setzt man $x = \frac{c}{n}$, so ist:

$$\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2} = \frac{bc(4c^4(1-n) + bc^3 n(-4 + n^2(4-n)) + 2b^2c^2n^3(2-n) - b^3cn^4)}{4AB^2n^4\sqrt{AB}}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist für jeden positiven Werth von n (auch wenn er sich als unächter Bruch darstellt) negativ, der Nenner aber positiv, denn $\sqrt{AB}$ ist mit dem positiven Zeichen zu nehmen, wenn man den oberen Theil der Curve betrachtet, n^4 und B^2 sind an sich positiv und A ist für $x = \frac{c}{n}$ ebenfalls positiv. $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ ist also für jeden positiven Werth von n negativ, also auch für den Werth des hier untersucht werdenden Punktes; folglich ist dieser Punkt ein Maximum, und die Curve wendet in der ganzen Ausdehnung von $x=0$ bis $x=c$ der X-Axe ihre concave Seite zu, da y und $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ entgegengesetzte Zeichen haben.

Um zu prüfen, ob die Curve Beugungspunkte hat, muss man $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ gleich Null und unendlich setzen. Der Nullwerth gibt:

$$4x^4 - 4(b+c)x^3 + 4bc(b+c)x - bc(b+c)^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat, wenn man $\pm 0x^2$ hinzufügt, drei Abwechslungen und eine Folge der Zeichen, also, dem Anscheine nach, drei positive Wurzeln und eine solche negative.

Setzt man $x = b - nc$, so erhält man:

$$4n^4c^4 - 4c^3n^3(3b-c) + 12bc^2n^2(b-c) - bc(b-c)^2(4n+1).$$

Da nun dieser Ausdruck jedenfalls einmal das Zeichen des ersten Gliedes, +, bei n variabel, erhält, die Gleichung für $x=0$ aber

Digitized by Google

einen negativen Werth hat, so liegt ein Zeichenwechsel, folglich auch wenigstens eine Wurzel, links der Ordinatenaxe, und ist diese Wurzel die negative, welche aber, da y für x negativ imaginär ist, für die Curve ausfällt.

Zwischen $x=0$ und $x=c$ liegt keine Wurzel, da in diesen Grenzen der Ausdruck (siehe vorne $x=\frac{c}{n}$) für jeden positiven Werth von n stets negativ ist, also ein Zeichenwechsel nicht Statt finden kann. Die Curve hat also in diesen Gränzen keinen Beugungspunkt und wendet der Abscissenaxe stets ihre concave Seite zu.

Setzt man $x=b+\frac{mc}{n}$, so erhält man:

$$\frac{4m^4c^4+4c^3m^3n(3b-c)+12bc^2m^2n^2(b-c)+bc(b-c)^2n^3(4m-n)}{n^4}.$$

Dieser Ausdruck ist für $4m \overset{=}{>} n$, das ist $m \overset{=}{>} \frac{n}{4}$, also $x=b+$ (einem Werthe $\overset{=}{>} \frac{c}{4}$) stets positiv, welche Werthe m und n auch haben mögen; die Gleichung hat also über diesen Punkt hinaus unmöglich einen Zeichenwechsel, folglich keine Wurzel, und die Curve wendet, da von diesem Werthe y und $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ stets einerlei Zeichen haben, der X-Axe stets ihre convexe Seite zu.

Ist $4m<n$, so wird der Zähler von $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$:

$$-bc(b-c)^2n^4+4bcm(b-c)^2n^3+12bc^2m^2(b-c)n^2$$
$$+4c^3m^3(3b-c)n+4m^4c^4,$$

oder, wenn man dem Buchstaben m den Werth 1 verschafft, was man, da n keine ganze Zahl zu sein braucht, stets kann:

$$-bc(b-c)^2z^4+4bc(b-c)^2z^3+12bc^2(b-c)z^2+4c^3(3b-c)z+4c^4.$$

Dieser Ausdruck erhält, bei z variabel, einmal das Zeichen des ersten Gliedes, $-$, und behält es von da an stets; es ist also zwischen $x=b+\frac{1}{4}c$ und diesem Werthe von Z, der den Ausdruck negativ macht, eine Wurzel der Gleichung, und bis $x=b$ nur eine, weil y für $x=b$ negativ ist. Die Curve wendet von diesem Punkte, einer Biegung, an der X-Axe ihre concave Seite zu.

Digitized by Google

Was die beiden andern Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}=0$ betrifft, so werden sie, wenn sie überhaupt möglich sind, zwischen den Punkten $(c, 0)$ und $(b, 0)$ liegen, wiewohl man durch die Substitution von $c+\frac{(b-c)m}{n}$ oder $b-\frac{(b-c)m}{n}$ für x einen Ausdruck erhält, der wahrscheinlich in allen Fällen negativ ist. Eine weitere Untersuchung ist jedoch unnöthig, da die Curve zwischen diesen beiden Punkten nicht fortsetzt und auch selbst der unendliche Zweig der von der Gleichung (U′) dargestellten Linie, eigentlich nicht zu der Curve gehört, die hier untersucht werden soll, zu der Curve der Punkte (x^{IV}, y^{IV}).

Setzt man $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}=\infty$, das ist $AB^2\sqrt{AB}=0$, so kann diess nur Statt finden für $x=0$, $=c$, $=b$, $=b+c$. Der Werth $b+c$ fällt aus, da die betreffende Ordinate die Curve nicht trifft; die Werthe 0, b zeigen keine Biegung an, weil linker Seite, und der Werth c zeigt keine Biegung an, weil rechter Seite die Curve keine Fortsetzung hat. Diese drei Werthe gehören vielmehr Grenzpunkten an.

Die Curve hat also nur einen Flexionspunkt zwischen $x=b$ und $=b+\frac{1}{2}c$.

Spitzen der ersten Art (Ceratoiden) hat die Curve nicht, da der einzige hier zu berücksichtigende Nullwerth einen Beugungspunkt gibt, folglich die Ordinate links dieses Punktes nicht unmöglich ist, und die Werthe, die das zweite Differential unendlich machen, entweder für die Curve ausfallen, wie $b+c$, oder Punkten angehören, in welchen die Curve der Abscissenaxe, beiderseits, ihre concave Seite zuwendet.

Rückkehrpunkte der zweiten Art (Ramphoide) hat die Curve nicht, weil y für kein x zwei Werthe mit einerlei Zeichen und die Curve eine durch die X-Axe symmetrisch getheilte Form hat.

§. 47.

b) Gleichung (U″): $y^2=\frac{c^2x-x^2(2c-x)}{2c-x}$; $b=c$. (Taf. VII. Fig. 17.)

Gibt man der Gleichung die Form:

$$y=\pm\frac{\sqrt{x(x-c)^2}}{\sqrt{2c-x}}=\pm\sqrt{\frac{x(c-x)^2}{2c-x}}=\pm\frac{(c-x)\sqrt{x}}{\sqrt{2c-x}},$$

Digitized by Google

so zeigt sich, dass die gesuchte Linie aus zwei durch die Abscissenaxe getrennten symmetrischen Theilen mit entgegengesetzten Zeichen besteht; der negative Werth gilt für $A > 180^0$, also für die Lage des Dreiecks unter der X-Axe.

Ist x negativ, so ist y imaginär; die Curve hat also keinen Punkt links der Ordinatenaxe.

Ist $x = 0$, so ist $y = 0$; der Anfangspunkt ist also ein Punkt der Curve.

Ist x positiv und kleiner als c, so hat y stets einen Werth bis für $x = c$, $y = 0$ sich ergibt. Die Curve bildet also zwischen $x = 0$ und $x = c$ eine geschlossene Linie, die in den Punkten $(0, 0)$ und $(c, 0)$ die Abscissenaxe trifft.

Ist $x > c$, so ist $y = \mp$ u. s. w.; die Curve geht also im Punkte $(c, 0)$ durch die Abscissenaxe, der Theil der Linie oberhalb der X-Axe zieht sich nun unterhalb derselben fort, und umgekehrt; dieser Punkt ist also ein doppelter.

Ist $x = 2c$, so ist y unendlich; die Senkrechte im Punkte $(2c, 0)$ ist also eine Asymptote der Curve.

Ist $x > 2c$, so ist y imaginär; über $2c$ hinaus hat also die Curve keinen Punkt.

Dass der Punkt $(c, 0)$ ein doppelter Punkt ist, ergibt sich auch, wenn man $y^2 - \frac{x(c-x)^2}{2c-x} = V = 0$ in Bezug auf y und x differentiirt und diese Differentiale gleich Null setzt. Es ist:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2y\partial y; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-2x^3 + 8cx^2 - 8c^2x + 2c^3}{(2c-x)^2};$$

$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ gibt $y = 0$; $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ gibt $(x-c)(x^2 - 3cx + c^2) = 0$. Der Gleichung der Curve entsprechen nur die beiden Wurzeln $x = c$ und $y = 0$; es ist also auch nur der Punkt $(c, 0)$ ein doppelter.

Um die Maxima und Minima der Curve zu finden, entwickele man das Differential $\frac{\partial y}{\partial x}$. Man erhält, wenn man die Bezeichnung der vorigen Paragraphen beibehält:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(A) \times B + A}{2B\sqrt{AB}},$$

und wenn man die jetzigen Werthe für A und B setzt:

Digitized by Google

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-x^3+4cx^2-4c^2x+c^3}{B\sqrt{AB}}=\frac{-(x-c)(x^2-3cx+c^2)}{B(x-c)\sqrt{Bx}}$$

$$=\frac{-(x^2-3cx+c^2)}{B\sqrt{Bx}}.$$

Setzt man diess $=\infty$, so ergibt sich nur für $x=0$ der Anfangspunkt als Grenze, da für $x=2c$ die Ordinate die Curve nicht erreicht. Setzt man $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, so ist:

$$x^2-3cx+c^2=0, \quad \text{also} \quad x=\frac{c(3\pm\sqrt{5})}{2};$$

der Werth $\frac{c(3+\sqrt{5})}{2}$ gibt, da er grösser als $2c$ ist, keinen Punkt der Curve, der Werth $\frac{c(3-\sqrt{5})}{2}$ ist für ein Maximum, denn setzt man ihn in $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$, welches, wenn man die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehält,

$$=\frac{c^3(x^4-2cx^3+2c^3x-c^4)}{AB^2\sqrt{AB}}=\frac{c^2(x-c)^3(x+c)}{-(x-c)^3B^2\sqrt{xB}}=\frac{-c^2(x+c)}{B^2\sqrt{Bx}}$$

ist, so erhält man, da zwischen $x=0$ und $x=c$ beständig $x<c$ Statt findet, also $\sqrt{(x-c)^2}=-(x-c)$ ist, für $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ einen negativen Werth. Dieses Maximum liegt zwischen $x=0$ und $x=\frac{1}{2}c$, da $\frac{c(3-\sqrt{5})}{2}<\frac{c}{2}$. Setzt man in $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ für x den Werth $\frac{c}{n}$, so erhält man für jeden Werth von n einen negativen Werth, so lange $x<c$, also bis zu dem doppelten Punkte $(c, 0)$. Wird $x>c$, so ist $\frac{c^2(x-c)^3(x+c)}{(x-c)^3B^2\sqrt{xB}}$ positiv, folglich $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}=\frac{c^2(x+c)}{B^2\sqrt{xB}}$, wenn man $\frac{c}{n}$ für x setzt, für jeden Werth von n positiv; es haben folglich vor dem Punkte $(c, 0)$, y und $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}$ verschiedene, nach diesem Punkte aber einerlei Zeichen, daher wendet die Curve vor diesem Punkte der X-Axe ihre concave, nach demselben aber ihre convexe Seite zu. Es ist hier immer, wenn nichts Besonderes bemerkt ist, der Theil der Curve, für welchen $\sqrt{AB}$ positiv ist, betrachtet, für $-\sqrt{AB}$ findet, wie man leicht sieht, dasselbe Statt.

Digitized by Google

Um die Beugungspunkte und Spitzen der ersten Art (Ceratoiden) zu finden, muss man $\frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2}=0$ und $=\infty$ setzen. Was den Nullwerth betrifft, gibt $x=-c$ keinen Punkt der Curve; $B\sqrt{xB}=0$ kann nur sein für $x=2c$ und $=0$; die Ordinate für $x=2c$ trifft die Curve nicht. Der Werth $x=0$ liefert keinen Beugpunkt, weil links des Anfangspunktes kein Punkt der Curve ist; $x=0$ liefert auch keinen Rückkehrpunkt der ersten Art, weil die Curve zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(c, 0)$ der X-Axe beständig ihre concave Seite zuwendet; man erhält nur einen Grenzpunkt für $x=0$, in welchem die Curve einfach die Abscissenaxe passirt.

Die Curve hat also weder einen Flexionspunkt, noch eine Spitze der ersten Art; sie hat aber auch keine Spitze der zweiten Art (Ramphoide), weil für keine Abscisse zwei Werthe mit gleichen Zeichen Statt haben, vielmehr, wie bei all diesen Curven, stets $y=\pm$ u. s. w. ist. Die Curve hat also die in Taf. VII. Fig. 17. angegebene Form, die kleinen c entsprechen den grossen C, es ist also c^4 der Punkt für das Dreieck ABC^{IV}.

Setzt man in $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-(x^2-3cx+c^2)}{B\sqrt{Bx}}$ für x den Werth c, so ist $\frac{\partial y}{\partial x}=1$; die Curve schneidet also die Abscissenaxe bei ihrem Durchgange im Punkte $(c, 0)$ unter einem Winkel von 45^0.

Setzt man in $y=(c-x)\sqrt{\frac{x}{2c-x}}$ für x die Grösse $c-x$, so erhält man $y=x\sqrt{\frac{c-x}{c+x}}$, die nämliche Gleichung wie in §. 40. für die Punkte (x', y'). Die Veränderung von x in $c-x$ spricht aus, dass die Ordinatenaxe in die Spitze B des Dreiecks verlegt worden ist und die positiven Abscissen links der Y-Axe zu nehmen sind.

§. 48.

2. Discussion der Gleichungen S.

a) Gleichung (S'): $y^2=\frac{2bcx-sx^2}{s}$; $b>c$. (Taf. VII. Fig. 16.)

Die Discussion der Gleichungen U hat Curven dargestellt, welche mehr als die Punkte (x^{IV}, y^{IV}) enthalten, denn, welche Lage der Schenkel b von den Werthen $-b$ bis $+b$ für x auch

Digitized by Google

haben mag, der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) liegt stets zwischen den Senkrechten, die in den Punkten (0, 0) und $(c, 0)$ errichtet werden; die unendlichen Zweige rechts des Curvenblattes, welche in den Gleichungen U enthalten sind, gehören also der Curve für die Punkte (x^{IV}, y^{IV}) nicht an, sie sind durch die Elimination von a aus den Gleichungen S in die gefundenen Curven für die Gleichungen U eingebracht worden.

Wendet man zur Aufsuchung der Curve für die Punkte (x^{IV}, y^{IV}) die Gleichungen S an, so erhält man blos dieses eiförmige Blatt, weil die Gleichungen S direct aus den Werthen x^{IV} und y^{IV} hergeleitet sind.

Die Gleichung (S′) unter die Form

$$y^2 + x^2 - \frac{2bc}{s}x = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 + (x - \frac{bc}{s})^2 = \left(\frac{bc}{s}\right)^2$$

gebracht und verglichen mit der allgemeinen Gleichung des Kreises: $(y-q)^2 + (x-p)^2 = r^2$, ist die Gleichung eines Kreises, dessen Coordinaten des Mittelpunktes $\left(\frac{bc}{s}, 0\right)$ und dessen Halbmesser $\frac{bc}{s}$ sind. Diese Gleichung ist von a abhängig, sie ist also für jede Lage des Dreiecks eine andere; der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) liegt aber in der Kreislinie des dem einzelnen Werthe von a zugehörigen Kreises, weil die Werthe von x und y der Gleichung des Kreises $y^2 + x^2 - \frac{2bc}{s}x = 0$ entsprechen. Die Abscisse der Mittelpunkte aller Kreise ist $\frac{bc}{s}$ stets positiv, und es liegen offenbar alle Mittelpunkte zwischen dem grössten und kleinsten Werthe dieser Abscisse. Diese Werthe hängen von a ab, und es entspricht, da a im Nenner ist, der kleinste Werth der Abscisse dem grössten Werthe von a und umgekehrt. Der grösste Werth von a ist $b + c$, der kleinste Werth von a ist $b - c$; jenem grössten Werthe entspricht die Abscisse $\frac{bc}{2(b+c)}$, diesem kleinsten Werthe die Abscisse $\frac{1}{2}c$. Zwischen diesen beiden liegen also sämmtliche Mittelpunkte der hier vorkommenden Kreise, welche sämmtlich die Ordinatenaxe im Anfangspunkte berühren, da die Ordinate der Mittelpunkte gleich Null und die Abscissen derselben dem Halbmesser gleich sind.

Fasst man das Dreieck in einer seiner Lagen auf, so ist, da der Punkt (x^{IV}, y^{IV}) in der Kreislinie liegt, y^{IV}, die im

Digitized by Google

Punkte x^{IV} des Durchmessers $2v$ errichtete Senkrechte; es ist also $y^{IV2} = x^{IV}(2v - x^{IV})$. Nun ist:

$$x^{IV} = \frac{(\alpha + b)c}{s} \quad \text{und} \quad v = \frac{bc}{s},$$

also:

$$y^{IV2} = \frac{\alpha c + bc}{s}\left(\frac{2bc}{s} - \frac{\alpha c + bc}{s}\right) = \frac{(bc + \alpha c)(bc - \alpha c)}{s^2} = \frac{c^2(b^2 - \alpha^2)}{s^2}$$

und

$$y^{IV} = \pm \frac{c\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{s} = \pm \frac{c\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2 \mp 2\alpha c}},$$

da $a = +\sqrt{b^2 + c^2 \mp 2\alpha c}$ und zwar positiv ist, weil die Seiten des Dreiecks positiv anzunehmen sind.

y^{IV} hat also zwei gleiche Werthe von verschiedenen Zeichen, die Curve wird von der Abscissenaxe in zwei symmetrische Theile getheilt und der negative Werth gilt, wie in §. 39., für die Lage des Dreiecks unterhalb der Abscissenaxe. (Taf. VII. Fig. 16.)

Ist α negativ, so ist:

$$y = \pm \frac{c\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2 + 2\alpha c}}.$$

Ist, abgesehen von dem Zeichen, $\alpha > b$, so ist y imaginär; die Curve liegt also nicht über die Punkte $\pm b$ hinaus, ja sie geht nicht über den Anfangspunkt hinaus, da für $\alpha = -b$ $y = 0$ und $x = \frac{(\alpha + b)c}{s} = 0$ wird, auch überhaupt der Zähler von x, nämlich $\alpha c + bc$, für α negativ stets Null oder positiv ist, weil $\alpha c \overline{\overline{<}} bc$.

Bewegt sich der Schenkel b bei seiner Drehung mehr nach rechts, so wird α, der absoluten Grösse nach, kleiner, der Zähler des Werthes von y also grösser und der Nenner desselben kleiner, y selbst also grösser. Dieser wachsende Zustand bleibt, bis α zu Null herabsinkt, in welchem Falle $y = \pm \frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}$ ist und der Schenkel b mit der Ordinatenaxe zusammenfällt. x ist alsdann ebenfalls $\frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}$.

Bewegt sich der Schenkel b weiter nach rechts, so ist α positiv und

Digitized by Google

$$y = \pm \frac{c\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2 - 2\alpha c}}.$$

Der Zähler dieses Werthes nimmt, bei dem nunmehrigen Wachsen von α, ab, der Nenner aber ebenfalls, und es lässt sich desshalb über die Grösse von y aus dieser Form des Ausdrucks nichts, ohne Weiteres, bestimmen. Es ist aber bis jetzt gewiss, dass die Curve bei der Drehung des Schenkels b von dem Punkte $-b$ der Abscissenaxe bis zu dem Punkte $+b$ derselben eine geschlossene Linie ist, dass sie für diese beiden Lagen des Schenkels mit der Abscissenaxe zusammentrifft, weil y für $\alpha = \pm b$ Null wird, und dass diese Punkte der Abscissenaxe für $\alpha = -b$ der Punkt $(0, 0)$ und für $\alpha = +b$ der Punkt $(c, 0)$ sind, weil $x = \frac{(\alpha + b)c}{s}$ für $\alpha = -b$ gleich Null wird und für $\alpha = +b$ den Werth $+c$ erhält.

Differentiirt man die Gleichung

$$y = \frac{c\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2 - 2\alpha c}},$$

der man die Form $y^2 = \frac{c\sqrt{A}}{b + c + \sqrt{B}}$ geben kann, in Bezug auf α, so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{Ac^2 - \alpha c(b + c + \sqrt{B})\sqrt{B}}{\sqrt{AB}.(b + c + \sqrt{B})^2}.$$

Setzt man diess gleich Null, so ist $Ac^2 = \alpha c(b + c + \sqrt{B})\sqrt{B}$. Diess führt, wenn man für A und B ihre Werthe setzt und reducirt, auf die Gleichung:

$$(b + \alpha)(\alpha^3 c^2 + 3\alpha^2 bc^2 - (b^2c^2 + 2bc^3 + 2b^3c)\alpha + b^3c^2) = 0.$$

Der Factor $(b + \alpha)$ fällt aus, der andere Factor ist eine Gleichung des dritten Grades, die entweder nur eine reelle Wurzel oder drei reelle Wurzeln hat. Ist letzteres der Fall, so ist, da eine Folge und zwei Abwechselungen der Zeichen Statt findet, eine Wurzel negativ, die beiden andern sind positiv. Ohne mich mit der weiteren Auflösung dieser Gleichung aufzuhalten, will ich aus der Art der Wurzeln den Zug der Linie zu bestimmen suchen.

Hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel, so kann diese, da der Zug der Linie von dem Anfangspunkte an bis zu dem Punkte $(c, 0)$ geschlossen ist und die Linie von $\alpha = -b$ bis $\alpha = 0$ der Abscissenaxe ihre concave Seite zuwendet (es ist diess bei den

Digitized by Google

Gleichungen U hinreichend auseinander gesetzt *), nur ein Maximum anzeigen.

Hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, so kann ebenfalls nur ein Maximum Statt haben, denn für $\alpha = -b$ bis $\alpha = 0$ wendet, wie ausgeführt, die Linie der Abscissenaxe ihre concave Seite zu. Der Punkt $\alpha = 0$ ist auch kein Maximum, weil $\alpha = 0$ keine Wurzel der Gleichung in α ist. Maxima und Minima liegen also in dem Theile der Linie, für welche α positiv ist. Da nun nur eine ungerade Anzahl von Maximis und Minimis vorhanden sein kann, weil die Linie eine geschlossene ist, und die Abscissenaxe in den Punkten $(0, 0)$ und $(c, 0)$ schneidet, und ferner ein Minimum noch zwei Maxima bedingen würde, so können die zwei übrigen positiven Wurzeln nur ein Maximum andeuten.

Welchen Einfluss das Verhältniss von b zu c auf den Zug der Linie hat, geht aus folgender Vergleichung der Ordinaten für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{1}{2}c$ hervor; die erstere will ich mit y_0, die andere mit $y_{\frac{1}{2}c}$ bezeichnen. Es ist:

$$y_0 \text{**)} = \frac{c\sqrt{b^2}}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}, \quad y_{\frac{1}{2}c} = \frac{c\sqrt{2b-c}}{2\sqrt{2b+c}}.$$

Vergleicht man beide, so ist:

$$\frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}} \gtreqless \frac{c\sqrt{2b-c}}{2\sqrt{2b+c}},$$

. . . .

$$5b^2c^4 \gtreqless 4b^4c^2,$$

. . . .

$$\frac{5}{4} \gtreqless \frac{b^2}{c^2},$$

$$1,1 \ldots \gtreqless \frac{b}{c}.$$

---

*) Dass das aus den Gleichungen S hergeleitete eiförmige Blatt mit dem aus den Gleichungen U hergeleiteten identisch ist, kann wohl Niemand in Zweifel ziehen, da bei beiden Gleichungen einerlei Werthe von x und y zu Grunde liegen.

**) $\sqrt{b^2-\alpha^2}$ ist mit dem positiven Zeichen zu nehmen, da hier der oberhalb der Abscissenaxe liegende Theil der Curve betrachtet werden soll.

Digitized by Google

Es hängt also von dem Verhältniss $\frac{b}{c}$ ab, ob y_0 grösser, gleich oder kleiner als $y_{\frac{1}{2}c}$ ist; die Curve hat also drei Variationen.

§. 49.

b) Gleichung (S''): $y^2 = \frac{2c^2x - sx^2}{s}$; $b = c$. (Taf. VII. Fig. 17.)

Setzt man auch diese Gleichung unter der Form

$$y^2 + x^2 - \frac{2c^2}{2c+a}x = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 + (x - \frac{c^2}{2c+a})^2 = \left(\frac{c^2}{2c+a}\right)^2$$

ein, so sieht man, dass sie die Gleichung eines Kreises ist, dessen Halbmesser $\frac{c^2}{2c+a}$ und dessen Coordinaten des Mittelpunktes $\left(\frac{c^2}{2c+a}, 0\right)$ sind.

Die Ausführungen des vorigen Paragraphen gelten auch hier. Der grösste Werth von a ist aber hier $2c$ und der kleinste Werth Null; jenem grössten Werthe entspricht die Abscisse $\frac{1}{4}c$ des Mittelpunktes, diesem kleinsten die Abscisse $\frac{1}{2}c$. Die sämmtlichen Mittelpunkte der Kreise (S'') liegen also in dem zweiten Viertheil der Grundlinie c von A an gerechnet.

Die Gleichungen für y sind hier $y = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - \alpha^2}}{2c + \sqrt{2c(c \mp \alpha)}}$. Ist α negativ, so ist $y = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - \alpha^2}}{2c + \sqrt{2c(c + \alpha)}}$. Die Ordinate wächst auch hier wieder bis zu $\alpha = 0$. Ist α positiv, so nimmt der Zähler ab, der Nenner aber ebenfalls, und es gelten dieselben Bemerkungen wie bei der Gleichung (S').

Das Differential ist hier $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{Ac^2 - \alpha c(2c + \sqrt{B})\sqrt{B}}{\sqrt{AB}.(2c + \sqrt{B})^2}$. Der Nullwerth führt auf die Gleichung:

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 c - 5\alpha c^2 + c^3 = 0 \quad \text{oder} \quad (\alpha - c)(\alpha^2 + 4\alpha c - c^2) = 0.$$

Die Wurzeln des zweiten Factors sind $c(-2 \pm \sqrt{5})$. Für $\alpha = c(-2 - \sqrt{5})$ ist y imaginär. Die Wurzel $c(-2 + \sqrt{5})$ entspricht einem Maximum, weil die Curve von Anfang an ihre concave Seite der X-Axe zuwendet, und ein Minimum, da die Curve eine geschlossene Linie ist, die die Abscissenaxe in zwei Punkten schneidet, noch zwei Maxima bedingen würde. Dieses Maxi-

Digitized by Google

mum liegt zwischen $\alpha=0$ und $\alpha=\frac{1}{2}c$, denn $\alpha=0$ und $=\frac{1}{2}c$ sind nicht Wurzeln der Gleichung in α.

Da hier $b=c$, so ist hier $1, 1 \ldots > \frac{b}{c}=1$, also ist die Ordinate für $\alpha=0$ grösser als die für $\alpha=\frac{1}{2}c$.

Die Darstellung des zweiten Differentials könnte diess näher bewahrheiten, die Gleichungen U sind jedoch in dieser Beziehung hinreichend discutirt.

Der Zug der Linie ist durch Punkte dargestellt.

§. 50.

Die Curven, welche die Punkte (x^{IV}, y^{IV}) bei der Drehung des linken Schenkels des Dreiecks um den Anfangspunkt A beschreiben, sind eiförmige Linien, die mit ihrem stumpfen Ende den Anfangspunkt berühren und deren Axe in der Abscissenaxe liegt. Es folgt diess aus den Gleichungen U und aus den Gleichungen S. Aus den Gleichungen U, weil das Maximum zwischen den Punkten (0, 0) und $(\frac{1}{2}c, 0)$ liegt; aus den Gleichungen S, weil für α negativ Zähler und Nenner des Werthes für y^{IV} für ein Wachsen sprechen, für α positiv aber, die Wirkung, welche der Zug der Linie durch die Abnahme des Zählers erleidet, durch die Wirkung, welche die gleichzeitige Abnahme des Nenners herbeiführt, gehemmt, ja im Anfange ganz aufgehoben wird, da im Anfang für α positiv die Curve sich noch von der X-Axe entfernt. Es steigt deshalb die Linie im Anfange noch in die Höhe, wodurch das stumpfe Ende gebildet wird, während der fernere Verlauf, für α positiv, und namentlich das Annähern an die Abscissenaxe, das Fallen der Linie, langsamer vor sich geht.

Die Fig. 16. und Fig. 17. auf Taf. VII. stellen diese beiden Linien in den Punkten c dar.

§. 51.

Wenn man die Gleichungen der in den §§. 16. bis 19. aufgeführten vier Linien für die Fig. 9. auf Taf. VI. sucht, so hat man, da hier $b=c$ ist, nur in den gefundenen Gleichungen $b=c$ zu setzen. Diese Figur enthält nur gleichschenklige Dreiecke. Bei allen diesen Dreiecken liegen aber die vier fraglichen Punkte in der auf die ungleiche Seite aus der gegenüberliegenden Spitze gefällten Senkrechten. Es müssen folglich die vier Linien der §§. 16. bis 19. erstens durch den Ursprung gehen und zweitens müssen die vier Tangenten dieser Linien einander gleich sein.

Digitized by Google

Das erste ist augenfällig wenn man in den Werthen von x und y für $y=0$ und $x=0$ b gleich c setzt. Das zweite gibt eine kurze Umwandlung des Ausdrucks für die Tangenten dieser Linien.

Es ist nämlich

1) die Tangente in §. 16. für $b=c$:

$$\frac{c^2-3\alpha c+2\alpha^2}{\beta(c-2\alpha)}=\frac{c^2-\alpha c-2\alpha c+2\alpha^2}{\beta(c-2\alpha)}=\frac{c(c-\alpha)-2\alpha(c-\alpha)}{\beta(c-2\alpha)}=\frac{c-\alpha}{\beta};$$

2) die Tangente in §. 17. für $b=c$:

$$\frac{\alpha cs-\alpha^2 s-c^3+\alpha^2 c}{\beta(\alpha s-\alpha c-c^2)},$$

wenn man nämlich für β^2 seinen Werth $b^2-\alpha^2$ oder vielmehr $c^2-\alpha^2$ setzt. Addirt und subtrahirt man im Zähler dieses Bruchs αc^2, so erhält man:

$$\frac{\alpha cs-\alpha c^2-c^3-\alpha^2 s+\alpha^2 c+\alpha c^2}{\beta(\alpha s-\alpha c-c^2)}=\frac{c(\alpha s-\alpha c-c^2)-\alpha(\alpha s-\alpha c-c^2)}{\beta(\alpha s-\alpha c-c^2)}=\frac{c-\alpha}{\beta};$$

3) die Tangente in §. 18. für $b=c$:

$$\frac{2c^3-2\alpha^2 c-c^2 s+\alpha cs}{\beta(2\alpha c+2c^2-cs)};$$

streicht man den Factor c in Zähler und Nenner und addirt und subtrahirt im Zähler $2\alpha c$, so erhält man:

$$\frac{2\alpha c+2c^2-cs-2\alpha^2-2\alpha c+\alpha s}{\beta(2\alpha+2c-s)}=\frac{c(2\alpha+2c-s)-\alpha(2\alpha+2c-s)}{\beta(2\alpha+2c-s)}=\frac{c-\alpha}{\beta};$$

4) die Tangente in §. 19. für $b=c$:

$$\frac{\beta(s-3c)}{cs+\alpha s-3\alpha c-3c^2}=\frac{\beta(s-3c)}{s(c+\alpha)-3c(c+\alpha)}=\frac{\beta(s-3c)}{(c+\alpha)(s-3c)}=\frac{\beta}{c+\alpha}$$

$$=\frac{\beta^2}{\beta(c+\alpha)}=\frac{c^2-\alpha^2}{\beta(c+\alpha)}=\frac{(c-\alpha)(c+\alpha)}{\beta(c+\alpha)}=\frac{c-\alpha}{\beta}.$$

Der Ausdruck für die Tangente in allen vier Fällen ist also $\frac{c-\alpha}{\beta}$.

§. 52.

Das Dreieck zu construiren, wenn, bei der Annahme von §. 1., gegeben ist:

Digitized by Google

1. (x', y') und (x'', y'').

Der zweite Punkt ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, dessen Halbmesser die Länge vom Punkte (x'', y'') bis zum Anfangspunkte ist. Beschreibt man diesen Kreis, so hat man den Punkt B des Dreiecks.

Der erste Punkt liegt in der Senkrechten β und ist von der Spitze C des Dreiecks noch einmal so weit entfernt als (x'', y'') von der Grundlinie. Die Spitze C, folglich des Dreiecks, ist durch Abstechen dieser Länge zu finden.

2. (x', y') und (x''', y''').

Wenn diese beiden Punkte bekannt sind, so ist es auch (x'', y''), weil dieser Punkt in der Linie der beiden gegebenen Punkte, und zwar in der halben Entfernung von (x''', y''') liegt. Aus (x', y') und (x'', y'') ist aber das Dreieck nach dem Vorigen leicht beschrieben.

3. (x', y') und (x^{IV}, y^{IV}).

(x^{IV}, y^{IV}) ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, seine Entfernung von der Abscissenaxe dessen Halbmesser. Zieht man diesen Kreis, so gibt eine Tangente aus dem Anfangspunkt A an denselben die Lage der Seite b. Der Punkt (x', y') liegt in der auf der Basis senkrechten Linie β, welche durch die Spitze C geht. Errichtet man also in (x', y') eine Senkrechte auf die Basis c (Abscissenaxe), so gibt der Schneidepunkt mit der Tangente aus A die Spitze C, und die Tangente von C aus an den gezogenen Kreis die Spitze B des Dreiecks.

4. (x'', y'') und (x''', y''').

Es ist hier ebenfalls (x', y') bekannt, folglich das Dreieck aus (x', y') und (x'', y'') zu bestimmen.

5. (x'', y'') und (x^{IV}, y^{IV}).

(x'', y'') ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, dessen Halbmesser die Länge von A bis (x'', y'') ist. Zieht man diesen Kreis, so hat man die beiden Spitzen A und B des Dreiecks. (x^{IV}, y^{IV}) ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, dessen Halbmesser also bekannt ist. Zieht man diesen Kreis und aus A und B Tangenten an denselben, so gibt der Schneidepunkt dieser Tangenten die Spitze C und also das Dreieck ABC.

Digitized by Google

6. (x''', y''') und (x^{IV}, y^{IV}).

Da $y''' = \frac{1}{3}\beta$ ist, so darf man nur aus (x''', y''') eine Senkrechte auf die Abscissenaxe fällen und in der Entfernung $3y'''$ mit derselben eine Parallele ziehen, so hat man die Linie, in welcher die Spitze C liegen muss. Zieht man nun aus (x^{IV}, y^{IV}) (Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises) den Kreis mit dem Halbmesser y^{IV} und aus A eine Tangente an diesen Kreis, so muss, da diese Tangente die Seite b des Dreiecks ist, die Spitze C auch in dieser Linie liegen, folglich in dem Schneidepunkt mit jener Parallelen. Zieht man nun aus C an den Kreis eine Tangente, so ergibt sich die Seite a und Spitze B des Dreiecks.

§. 53.

Das Dreieck zu construiren, wenn die vier Schneidepunkte der Lage nach gegeben sind.

Hier ist der Werth der δ bekannt. Substituirt man nun diese Werthe in die §. 15. gefundene Gleichung des dritten Grades, so erhält man durch Auflösung derselben die Grösse der drei Seiten des Dreiecks. Die drei Wurzeln dieser Gleichung müssen reell sein *).

*) Diese Aufgabe rührt von Euler her und findet sich, wenn ich nicht irre, in Nov. Comentar. Acad. scientiarum imperial. Petropol. Tom XI pro anno 1765. Petropol. 1767.

Digitized by Google

XXIV.

Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen.

Von

dem Herausgeber.

Seit den Zeiten des Euclides hat die Frage von der Theorie der Parallelen die Geometer, wenn auch theilweise mit längeren Unterbrechungen, doch immer wieder von Neuem lebhaft beschäftigt, viele Abhandlungen sind verfasst worden, in denen man diese Versuche gesammelt und einer eingehenden Kritik unterworfen hat. Schon in einer im Jahre 1763 erschienenen verdienstlichen Schrift von Klügel sind achtundzwanzig mehr oder weniger von einander verschiedene Parallelentheorieen gesammelt und beurtheilt worden, und wer wollte alle die übrigen in den verschiedensten Sprachen und Ländern erschienenen Schriften ähnlicher Art aufzählen, die in den seit jener Zeit verflossenen hundert Jahren verfasst worden sind, was am Wenigsten hier mein Zweck und meine Absicht sein kann.

Alle Parallelentheorieen bewegen sich wenigstens zunächst um das berühmte eilfte Axiom des Euclides, dem man allgemein, und gewiss mit vollem Rechte, die zu einem Grundsatze erforderliche Evidenz — was freilich ein etwas schwankender und verschiedener Deutungen fähiger Begriff ist — abgesprochen hat. Bekanntlich ist dieser Satz der folgende:

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, und die Summe der beiden inneren auf derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel weniger als zwei rechte Winkel beträgt: so müssen die beiden durchschnittenen Linien, genugsam verlängert, auf der Seite der schneidenden Linie, auf welcher die beiden in Rede stehenden Win-

Digitized by Google

kel liegen, nothwendig zusammentreffen oder sich schneiden.

Klügel sagt von diesem Satze: „Allerdings kann man dem Satze die Stelle unter den Grundsätzen streitig machen. Doch konnte Euclides auch nicht ihn in die Reihe anderer scharf erwiesener Sätze bringen. Er hat ihn also, um einen Ausdruck aus der Kant'schen Philosophie zu borgen, als einen synthetischen Satz a priori unter die Grundsätze gestellt. Der Satz enthält eine Eigenschaft der geraden Linie, welche sie von den krummen unterscheidet, ob man gleich sie nicht aus der Natur derselben durch eine Verbindung mit andern Sätzen herleiten kann, weil sie unmittelbar in ihr liegt. Proklus setzt den Grundsatz unter die Postulate (*αιτηματα*)."

Lässt man den obigen Satz als Grundsatz gelten, so ist in den Elementen des Euclides die Parallelentheorie unstreitig mit der grössten Einfachheit und aller erforderlichen Strenge und Evidenz dargestellt, dieselbe fällt aber auch gänzlich, wenn man jenen Satz nicht als Grundsatz anerkennt, wobei ich — so bekannt die Sache auch an sich ist — doch hervorzuheben nicht unterlassen will, dass der wesentliche Inhalt der Parallelentheorie sich auf zwei Hauptsätze reducirt, von denen der zweite die Umkehrung des ersten ist; der Beweis des ersten Satzes lässt sich ohne das eilfte euclidische Axiom leicht in aller Strenge führen, was aber von dem umgekehrten Satze nicht gilt, so dass also die eigentliche Schwierigkeit in dem Beweise dieser Umkehrung liegt.

Vielfach hat man an die Stelle der euclidischen Erklärung der Parallelen:

Zwei in einer und derselben Ebene liegende Gerade heissen einander parallel, wenn sie, so weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag, niemals mit einander zusammentreffen oder sich schneiden.

und des eilften Axioms andere Erklärungen und andere mehr oder weniger evidente Grundsätze zu setzen versucht, wodurch aber die Schwierigkeit nicht gehoben, sondern im Wesentlichen immer die alte geblieben ist, wobei man diese Schwierigkeit nur immer in dem nachher genau und bestimmt zu bezeichnenden Sinne aufzufassen hat. Vorzüglich ist aber hervorzuheben, dass die Schwierigkeit in der Theorie der Parallelen mit der Schwierigkeit, einen anderen Satz, nämlich den Satz:

Die Summe der drei Winkel eines jeden ebenen Dreiecks beträgt zwei rechte Winkel.

Digitized by Google

streng zu beweisen, auf das Genaueste zusammenhängt und auf das Engste verbunden ist. Lässt man das eilfte euclidische Axiom als Grundsatz gelten, so ist der Satz von der Constanz der Summe der drei Winkel des ebenen Dreiecks leicht völlig streng zu beweisen; kann man aber umgekehrt diesen letzteren Satz unabhängig streng beweisen, so lässt sich daraus das euclidische eilfte Axiom mit völliger Evidenz und Strenge ableiten, und die Schwierigkeit in der Theorie der Parallelen ist dann völlig gehoben. Das Eine fällt also mit dem Anderen im Wesentlichen vollständig zusammen.

Will man nun aber überhaupt von einer Schwierigkeit in der Parallelentheorie reden, so scheint es mir vor allen Dingen nöthig zu sein, dass man klar und bestimmt ausspreche, worin man diese Schwierigkeit sucht und findet, weil auch nur dann erst überhaupt die Frage sich aufwerfen lässt, ob und wie dieselbe gehoben werden kann. Dass in verschiedenem Sinne eine Beseitigung derselben möglich ist und sich denken lässt, scheint mir unzweifelhaft zu sein, und es scheint mir hier selbst einer derjenigen Punkte vorzuliegen, wo Mathematik und Philosophie an einander streifen und sich berühren; ich bin auch überzeugt, dass mancher Philosoph kopfschüttelnd sich wundern wird, wie der Mathematiker überhaupt bei diesen Dingen eine Schwierigkeit finden kann, die nach seiner Ansicht vielleicht gar nicht vorhanden oder wenigstens leicht zu heben und zu beseitigen ist, eine Ansicht, die — bei den möglichen verschiedenen Auffassungsweisen — wohl auch nicht ohne alle Berechtigung sein und alles Grundes entbehren dürfte.

Deshalb will ich die hier zur Sprache kommende Frage, wie ich dieselbe von jetzt an in diesem Aufsatze auffassen werde, in möglichst bestimmter Weise wie folgt präcisiren und aussprechen:

Lässt sich unter Zugrundelegung der euclidischen Definition der Parallelen, mit Hülfe der niemals angefochtenen und angezweifelten Grundsätze des Euclides, aber mit Ausschluss des eilften unter denselben, ferner mit Hülfe der ohne dieses Axiom in aller Strenge beweisbaren und bewiesenen Propositionen I. bis XXVI. des ersten Buchs der Elemente des Euclides die Lehre von den Parallelen in aller Strenge begründen oder nicht?

In neuerer Zeit hat die Beantwortung dieser früher so vielfach discutirten Frage, wie es scheint, eine längere Reihe von Jahren geruhet oder ist wenigstens gegen früher sehr in den

Digitized by Google

Hintergrund getreten; ja die französische Akademie der Wissenschaften soll sich einmal die Zusendung neuer Parallelentheorieen Behufs ihrer Beurtheilung Seitens der Akademie in einer besonderen Bekanntmachung förmlich verbeten haben. Als nun aber Professor Peters in Altona neuerlichst durch die Veröffentlichung des so vieles Interessante enthaltenden Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher sich ein so wesentliches, nicht genug anzuerkennendes Verdienst erworben hatte, fand man, dass die Frage von der Parallelentheorie auch zwischen diesen beiden trefflichen Männern einmal lebhaft discutirt und ventilirt worden war. Die nächste Veranlassung zu dieser lebhaften Discussion hatte Schumacher gegeben, Gauss sprach sich mit seiner überall hervortretenden Superiorität in bestimmtester Weise über die schon oft aufgeworfene Frage aus, und liess auch nicht unerwähnt, dass dieselbe schon seit einer langen Reihe von Jahren der Gegenstand seines eifrigsten Nachdenkens gewesen sei. Zugleich erinnerte Gauss mit vielem Lobe an eine nunmehr schon vor fast dreissig Jahren erschienene Schrift des als Professor in Kasan verstorbenen russischen Mathematikers Nicolaus Lobatschewsky, mit deren Inhalt er sich im Wesentlichen ganz einverstanden erklärte. Ausserdem fand man, dass noch früher als Lobatschewsky der ungarische Mathematiker Bolyai, Farkas *), und auch sein Sohn J. Bolyai sich vielfach und gründlich mit der Theorie der Parallelen beschäftigt und ähnliche Ideen ausgesprochen hatten, so dass also diese neueren Ansichten vorzugsweise auf den älteren Bolyai, einen Freund von Gauss, zurückzuführen sein dürften, und dessen Name daher, wie es scheint, hauptsächlich genannt und der Nachwelt erhalten werden muss, wenn von den sich jetzt geltend zu machen suchenden neueren Ansichten über die Parallelentheorie die Rede ist.

Die Schriften von Bolyai und Lobatschewsky waren schon fast ganz der Vergessenheit anheim gefallen, und haben es wohl hauptsächlich den Bemerkungen von Gauss zu danken, dass sie jetzt wieder, ihrem unbestreitbaren Werthe gemäss, an's Licht gezogen worden sind.

Hiebei ist auch noch besonders hervorzuheben, dass Professor Hoüel in Bordeaux sich die Mathematiker zu besonderem Danke dadurch verpflichtet hat, dass er von der Schrift von Lobatschewsky, in Verbindung mit den zwischen Gauss und Schumacher gewechselten Briefen, eine französische Uebersetzung unter dem Titel:

---

*) Die Vornamen werden nachgesetzt.

Digitized by Google

Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. J. Lobatschewsky; traduit de l'Allemand par J. Hoüel. Suivi d'un extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris. Gauthier-Villars. 1866. 8°.

veröffentlicht hat, wozu neuerlichst noch die so eben unter dem Titel:

Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, ou Commentaire sur les XXXII premières propositions des Éléments d'Euclide, par J. Hoüel. Paris. Gauthier-Villars. 1867. 8°.

erschienene Schrift gekommen ist, welche wir der Beachtung der Mathematiker recht sehr empfehlen. In der besonderen Note VI. zu dieser letzteren Schrift hat ihr Verfasser aber auch mit Recht an die Verdienste Legendre's erinnert, welcher bereits in den Mémoires de l'Académie des Sciences. T. XII. p. 369. und in der 3ten bis 8ten Ausgabe seiner Éléments de Géométrie*) nach meiner Meinung und Ueberzeugung sehr schöne Beweise für alle die Sätze gegeben hat, welche auch Lobatschewsky bewiesen und überhaupt als mittelst der oben erwähnten Sätze des Euclides, und ohne dessen eilftes Axiom, beweisbaren Theil der Geometrie hingestellt hat. Diese schönen Legendre'schen Beweise der genannten Sätze mache ich nun, mit einigen eigenen Zusätzen, hauptsächlich zur Aufgabe der folgenden Darstellung, und empfehle dieselben der Aufmerksamkeit der Leser. Die Grundlage dieser Beweise bilden lediglich die sechs und zwangig ersten Propositionen des ersten Buchs der Elemente des Euclides; kommen im Folgenden Zurückweisungen auf diese Sätze vor, so beziehen sich dieselben auf die Uebersetzung oder vielmehr Bearbeitung der euclidischen Elemente von Is. Barrow, deren ich mich vorzugsweise gerne bediene, an deren Stelle aber natürlich auch jede andere gute Uebersetzung oder Ausgabe gesetzt werden kann, wobei ich übrigens bemerke, dass wenigstens in meiner Ausgabe der genannten Uebersetzung (Cantabrigiae. 1655. p. 7.) das gewöhnlich als das 11te bezeichnete Axiom die Nummer 13. hat.

---

*) In den neueren Ausgaben, z. B. in der mir vorliegenden 11ten, finden sich die nachher erwähnten Sätze nebst ihren Beweisen nicht mehr, weil darin die Theorie der Parallelen auf eine der gewöhnlichen sich ziemlich anschliessende Weise dargestellt ist. Legendre sagt selbst in der Vorrede: „D'après l'avis de plusieurs professeurs distingués, on s'est déterminé à rétablir dans cette onzième édition, la théorie des parabèles à-peu-près sur la même base qu'Euclide."

Digitized by Google

I.

Erklärung. Gerade Linien, welche in einer und derselben Ebene liegen, heissen einander parallel, wenn sie, so weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag, niemals mit einander zusammentreffen oder sich schneiden.

II.

Lehrsatz. Die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks kann nicht grösser als zwei rechte Winkel sein.

Beweis. Sei ABC in Fig. I. ein beliebiges ebenes Dreieck; man soll beweisen, dass die Summe seiner drei Winkel, welche wir der Kürze wegen mit $\int ABC$ bezeichnen wollen, nicht grösser als zwei rechte Winkel oder nicht grösser als $2R$ sein kann. Zu dem Ende nehmen wir das Gegentheil an und setzen also voraus, dass:

1) . . . . $\int ABC > 2R$

sei.

Man verlängere die Seite AB über B hinaus und trage auf der Verlängerung, von B an, die Seite AB eine gewisse Anzahl Mal, im Allgemeinen $n$mal, in BD, DE, EF, ..., XY, YZ auf, so dass also die ganze gerade Linie $AZ = (n+1).AB$, also:

2) . . . . $AY = n.AB$

ist. Ueber diesen aufgetragenen Linien beschreibe man (Prop. XXII. mit Bezug auf Prop. XX.) die dem gegebenen Dreiecke ABC und also auch sämmtlich unter einander congruenten Dreiecke:

$$BDK,\quad DEL,\quad EFM, ..., XYV,\quad YZW,$$

und ziehe die Linien:

$$CK,\quad KL,\quad LM,\quad MN, ..., VW,$$

wodurch die Dreiecke:

$$BCK,\quad DKL,\quad ELM, ..., YVW$$

entstehen, welche gleichfalls sämmtlich unter einander congruent sind (Prop. XIII. Prop. IV.), so dass also:

$$CK = KL = LM = MN = ... = VW,$$

folglich:

3) . . . . $CKLMN \ldots . VW = n.CK$

ist, wo $CKLMN \ldots . VW$ im Allgemeinen als eine gebrochene Linie zu betrachten ist.

Betrachten wir nun das dem Dreiecke ABC congruente Dreieck BDK, so ist:

$$\angle KBD = \angle BAC,$$

folglich, weil (Prop. XIII. Coroll. 2.)

$$\angle KBD + \angle CBA + \angle CBK = 2R$$

ist, auch:

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle CBK = 2R,$$

und weil nun nach 1):

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB > 2R$$

ist, so ist offenbar:

$$\angle ACB > \angle CBK.$$

Daher ist in den beiden Dreiecken ABC und CBK:

$$AC = BK, \quad BC = BC, \quad \angle ACB > \angle CBK;$$

folglich (Prop. XXIV.):

$$AB > CK.$$

Weil nun die sämmtlichen Dreiecke:

$$ABC, \quad BDK, \quad DEL, \quad EFM, \ldots., XYV, \quad YZW$$

unter einander congruent sind, so ist ganz auf dieselbe Weise überhaupt:

$$AB > CK, \quad BD > KL, \quad DE > LM, \ldots., XY > VW;$$

folglich:

$$\underbrace{AB + BD + DE + \ldots. + XY}_{AY} > \underbrace{CK + KL + LM + \ldots. + VW}_{CKLMN \ldots . VW},$$

also nach 2) und 3):

4) . . . . $n.AB > n.CK.$

Setzen wir nun:

5) . . . . $AB - CK = \delta,$

wo δ eine völlig bestimmte nicht verschwindende Grösse ist, so

Digitized by Google

kann man offenbar die ganze Zahl n immer so gross annehmen, dass $n\delta$ grösser als die völlig bestimmte Grösse $4.AC$, folglich:

6) . . . . $n\delta > 4.AC$

ist.

Durch Addition der Ungleichungen 4) und 6) erhalten wir:

$$n.AB + n\delta > n.CK + 4.AC,$$

also, weil nach 5):

$$n\delta = n.AB - n.CK$$

ist:

$$n.AB + n.AB - n.CK > n.CK + 4.AC,$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten $n.CK$ addirt:

$$2n.AB > 2n.CK + 4.AC,$$

und, wenn man nun durch Zwei dividirt:

$$n.AB > n.CK + 2.AC,$$

also, weil $AC = WY$ ist:

$$n.AB > AC + n.CK + WY,$$

folglich nach 2) und 3):

$$AY > AC + CKLMN \dots VW + WY$$

oder:

$$AY > ACKLMN \dots VWY,$$

was nach einem aus Prop. XX. auf bekannte Weise leicht herzuleitenden Corollarium ungereimt ist.

Daher ist die Annahme, dass die Summe der drei Winkel des Dreiecks ABC grösser als zwei rechte Winkel sein könne, falsch, und die Summe der drei Winkel eines jeden ebenen Dreiecks kann also niemals grösser als zwei rechte Winkel sein, w. z. b. w.

III.

Zusatz. Die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks kann nur zwei rechten Winkeln gleich oder kleiner als zwei rechte Winkel sein; es kann nur:

$$\int ABC \overset{=}{<} 2R$$

sein.

Digitized by Google

Die Summe zweier Winkel eines ebenen Dreiecks ist immer kleiner als zwei rechte Winkel.

IV.

Lehrsatz. **Wenn es nur irgend ein einziges ebenes Dreieck giebt, in welchem die Winkelsumme zwei rechte Winkel beträgt, so ist allgemein die Summe der Winkel eines jeden ebenen Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln.**

Beweis. Ein gewisses Dreieck, dessen Winkelsumme zwei rechte Winkel beträgt, wollen wir überhaupt durch ABC bezeichnen, so dass also:

$$\int ABC = 2R$$

ist.

1. In Fig. II. beschreibe man (Prop. XXII. mit Bezug auf Prop. XX.) über der Seite BC des Dreiecks ABC, in welchem

$$\int ABC = 2R$$

ist, ein diesem Dreiecke congruentes Dreieck BCD, so dass

$$CD = AB, \quad BC = BC, \quad BD = CA;$$
$$\angle BDC = \angle BAC, \quad \angle DCB = \angle CBA, \quad \angle CBD = \angle ACB$$

ist. Hierauf verlängere man die Seiten AB und AC über B und C hinaus, mache $BB' = AB$ und $CC' = AC$ und ziehe die Geraden $B'D$ und $C'D$. Weil nach der Voraussetzung

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 2R$$

und nach Prop. XIII. Coroll. 2.

$$\angle DBB' + \angle CBA + \angle CBD = 2R$$

ist, so ist offenbar:

$$\angle BAC + \angle ACB = \angle DBB' + \angle CBD,$$

und folglich, weil nach dem Obigen $\angle ACB = \angle CBD$ ist:

$$\angle BAC = \angle DBB',$$

also offenbar (Prop. IV.):

$$\Delta BB'D \cong \Delta ABC.$$

Auf ganz ähnliche Art zeigt man, dass

Digitized by Google

$$\Delta\, CC'D \cong \Delta\, ABC$$

ist. Daher sind die vier Dreiecke:

$$ABC,\quad BCD,\quad BB'D,\quad CC'D$$

sämmtlich unter einander congruent, und es ist folglich:

$$\angle BDC = \angle BAC,$$
$$\angle CDC' = \angle CBA,$$
$$\angle BDB' = \angle ACB;$$

also:

$$\angle BDC + \angle CDC' + \angle BDB' = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB$$
$$= \int ABC = 2R,$$

folglich $B'DC'$ nach Prop. XIV. eine gerade Linie, und daher $AB'C'$ ein ebenes Dreieck, welches mit dem Dreiecke ABC gleiche Winkel, also auch dieselbe Winkelsumme $2R$, und den Winkel bei A gemeinschaftlich hat, und in welchem die Seiten AB' und AC' doppelt so gross sind als die entsprechenden Seiten AB und AC.

Ganz auf dieselbe Art, wie man aus dem Dreiecke ABC das Dreieck $AB'C'$ ableitete, kann man aus diesem Dreiecke ein Dreieck $AB''C''$ ableiten, welches mit dem Dreiecke $AB'C'$ oder ABC gleiche Winkel, also auch dieselbe Winkelsumme $2R$, und den Winkel A gemeinschaftlich hat, und in welchem die Seiten AB'' und AC'' zweimal so gross als die entsprechenden Seiten AB' und AC', also viermal so gross sind als die entsprechenden Seiten AB und AC.

Da man nun dieses Verfahren beliebig oft wiederholen kann, so ist klar, dass man aus dem Dreiecke ABC immer ein Dreieck ableiten kann, welches mit dem Dreiecke ABC gleiche Winkel, also auch dieselbe Winkelsumme $2R$, und den Winkel bei A gemein hat, und dessen zwei den Winkel A einschliessende Seiten grösser sind als zwei gegebene beliebig grosse Linien.

2. In Fig. III. sei jetzt $AB'C'$ ein beliebiges, mit dem Dreiecke ABC den Winkel A gemein habendes Dreieck. Nach 1. construire man ein Dreieck $AB''C''$, welches mit dem Dreieck ABC gleiche Winkel, also auch dieselbe Winkelsumme

$$\int AB''C'' = 2R,$$

und den Winkel A gemeinschaftlich hat, und dessen den Winkel A einschliessenden Seiten AB'' und AC'' grösser sind als die

Digitized by Google

Seiten AB' und AC' des Dreiecks $AB'C'$. Zieht man nun die Linie $B''C'$, so ist offenbar, weil nach Prop. XIII. Coroll. 2. die Winkelsummen bei B' und C' zwei rechte Winkel betragen:

$$\int AB'C' + \int B'B''C' + \int C'B''C'' = 4R + \int AB''C'',$$

also, weil nach dem Obigen

$$\int AB''C'' = 2R$$

ist:

$$\int AB'C' + \int B'B''C' + \int C'B''C'' = 6R.$$

Nach III. ist aber ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\int AB'C' \; \overset{=}{<} \; 2R,$$

$$\int B'B''C' \; \overset{=}{<} \; 2R,$$

$$\int C'B''C'' \; \overset{=}{<} \; 2R.$$

Wollte man nun in diesen Vergleichungen auch nur ein einziges Mal das untere Zeichen nehmen, so würde man durch Addition immer erhalten:

$$\int AB'C' + \int B'B''C' + \int C'B''C'' < 6R,$$

da doch, wie wir so eben gesehen haben,

$$\int AB'C' + \int B'B''C' + \int C'B''C'' = 6R$$

ist. Man muss also in den obigen Vergleichungen immer und überall die oberen Zeichen nehmen, und folglich setzen:

$$\int AB'C' = 2R, \quad \int B'B''C' = 2R, \quad \int C'B''C'' = 2R;$$

so dass also, wie hier bewiesen werden sollte:

$$\int AB'C' = 2R$$

ist.

3. In Fig. IV. sei endlich $A'B'C'$ ein ganz beliebiges Dreieck. Wenn dieses Dreieck mit dem Dreieck ABC nicht lauter gleiche Winkel hat, so muss wenigstens ein Winkel von $A'B'C'$ kleiner sein als ein Winkel von ABC, weil, wenn alle Winkel von $A'B'C'$ grösser oder theilweise gleich und theilweise grösser als die Winkel von ABC wären, offenbar immer

$$\int A'B'C' > \int ABC,$$

Digitized by Google

folglich, weil nach der Voraussetzung bekanntlich

$$\int ABC = 2R$$

ist:

$$\int A'B'C' > 2R$$

sein würde, was nach II. oder III. unmöglich ist.

Wir wollen nun annehmen, dass

$$\angle B'A'C' < \angle BAC$$

sei, und den Winkel BAC in $B'A'E$ an $A'B'$ antragen (Prop. XXIII.). Nehmen wir nun in $A'E$ einen beliebigen Punkt C'' an und ziehen $B'C''$, so muss von $B'C''$ offenbar die Seite $A'C'$ oder ihre Verlängerung über C' hinaus in einem gewissen Punkte D geschnitten werden, weil die Punkte B' und C'' nach dem Obigen jedenfalls auf entgegengesetzten Seiten von $A'C'$, die von B' ausgehenden Linien $B'C'$ und $B'C''$ aber immer auf einer Seite von $A'B'$ liegen. Weil das Dreieck $A'B'C''$ und das Dreieck ABC, dessen Winkelsumme zwei rechte Winkel beträgt, einen Winkel gemein haben, so ist nach Nr. 2.:

$$\int A'B'C'' = \int ABC = 2R.$$

Weil das Dreieck $A'B'D$ und das Dreieck $A'B'C''$, dessen Winkelsumme, wie wir so eben sahen, zwei rechte Winkel beträgt, einen Winkel gemein haben, so ist nach Nr. 2.:

$$\int A'B'D = \int A'B'C'' = 2R.$$

Weil das Dreieck $A'B'C'$ und das Dreieck $A'B'D$, dessen Winkelsumme, wie wir so eben gesehen haben, zwei rechte Winkel beträgt, einen Winkel gemein haben, so ist nach Nr. 2.:

$$\int A'B'C' = \int A'B'D = 2R,$$

wodurch nun also bewiesen ist, dass, wenn es nur irgend ein Dreieck ABC giebt, für welches

$$\int ABC = 2R$$

ist, auch in völliger Allgemeinheit für jedes andere ganz beliebige Dreieck $A'B'C'$ immer

$$\int A'B'C' = 2R$$

ist.

V.

So hätten wir denn nun, wie wir glauben, mit euclidischer Strenge Zweierlei bewiesen, nämlich:

Digitized by Google

A. Die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks kann nicht grösser sein als zwei rechte Winkel, dieselbe kann nur eben so gross oder kleiner als zwei rechte Winkel sein.

B. Wenn nur in irgend **einem** ebenen Dreiecke die Summe der drei Winkel zwei rechte Winkel beträgt, so beträgt in völliger Allgemeinheit in allen ebenen Dreiecken, ohne alle Ausnahme, die Summe der drei Winkel zwei rechte Winkel, und ist also eine den Werth $2R$ habende constante Grösse.

Wo ist denn nun aber oder welches ist denn nun das Individuum der ebenen Dreiecke, von dem man a priori mit euclidischer Strenge, bloss mit Hülfe der euclidischen Grundsätze, natürlich mit völliger Ausschliessung des berühmten eilften Axioms, beweisen kann, dass die Summe seiner drei Winkel genau zwei rechte Winkel beträgt? Bis jetzt ist kein solches Individuum gefunden worden, Keinem ist es gelungen, den in Rede stehenden Beweis auf die angegebene Weise auch nur für ein einziges ebenes Dreieck zu führen; wie die Sache jetzt liegt, sind nur ebene Dreiecke mit einer zwei rechte Winkel übersteigenden Winkelsumme unmöglich, gleich möglich dagegen sind ebene Dreiecke mit Winkelsummen, die gleich zwei rechten Winkeln oder kleiner als zwei rechte Winkel sind; es ist aber auch nach den vorher bewiesenen Sätzen entweder in allen ebenen Dreiecken die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln, oder in allen ebenen Dreiecken die Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel; und da scheinen sich nun, um hierüber zur Entscheidung zu kommen, die Ansichten der neueren Geometer, und zwar zum Theil sehr gewichtiger Stimmen, darin zu vereinigen, dass die apriorische theoretische Betrachtung mit dem Obigen ihre Endschaft erreicht habe, und nichts Anderes übrig bleibe, als die Erfahrung zu befragen. Also die Geometrie doch wenigstens in **einem** Punkte eine Erfahrungswissenschaft!! In allen ebenen Dreiecken aber, deren Winkel bis jetzt mit den genauesten und vollkommensten winkelmessenden Instrumenten gemessen worden sind, hat sich die Summe der Winkel jederzeit mit der grössten Annäherung gleich zwei rechten Winkeln, nahezu in gleich vielen Fällen etwas kleiner oder etwas grösser als zwei rechte Winkel, ergeben; auch haben sich die Abweichungen der gemessenen Winkelsummen von zwei rechten Winkeln stets desto kleiner herausgestellt, dieselben sind jederzeit der Null desto näher gekommen, je vollkommener die angewandten Messinstrumente waren; je genauer die Winkel auf ihren

Digitized by Google

Limben und Nonien sich ablesen liessen; je mehr Sorgfalt man auf die Messungen verwandte; je günstiger die Umstände, unter denen die Messungen angestellt wurden, waren; von je weniger störenden äusseren Einflüssen dieselben afficirt wurden. Man bilde sich nur ein einziges ebenes Dreieck von einer der Winkelmessung besonders günstigen Form, warte die Messung besonders begünstigende Umstände ab und messe die Winkel mit der grössten Sorgfalt und mit den genauesten Instrumenten, welche die mechanische Kunst herzustellen im Stande ist, so wird man alles Obige vollkommen bestätigt finden, wie die Erfahrung schon in der vielfachsten Weise gelehrt hat. Also giebt es erfahrungsmässig ebene Dreiecke, deren Winkelsummen mit der allergrössten Annäherung zwei rechte Winkel betragen, wodurch wir uns nun nach den oben in aller Strenge a priori bewiesenen Sätzen für berechtigt halten müssen, wenigstens mit der grössten Wahrscheinlichkeit — aber mehr dürfen wir auch zur Zeit für unsere Behauptung nicht beanspruchen — den Satz:

1. In jedem ebenen Dreiecke ist die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln.

auszusprechen, und auf diesem Fundamente das weitere Gebäude der Geometrie aufzuführen. Einige weitere Bemerkungen über diesen Gegenstand wird man am Ende dieser Abhandlung finden.

Mittelst Prop. XIII. ist aus dem vorstehenden Satze auf bekannte Weise leicht der folgende Satz abzuleiten:

2. Jeder Aussenwinkel eines ebenen Dreiecks ist der Summe der beiden inneren ihm gegenüberstehenden Winkel des Dreiecks, welche von ihm nicht Nebenwinkel sind, gleich.

Da nach Prop. V. die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen ebenen Dreiecks einander gleich sind, so folgt aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar der folgende Satz:

3. Der an der Spitze eines gleichschenkligen ebenen Dreiecks liegende Aussenwinkel desselben ist jederzeit doppelt so gross als jeder der beiden an der Grundlinie liegenden Winkel, oder jeder dieser beiden letzteren Winkel ist halb so gross als der an der Spitze des Dreiecks liegende Aussenwinkel desselben.

VI.

Lehrsatz. (Eilfter euclidischer Grundsatz.)

Digitized by Google

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, und die Summe der beiden inneren auf derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel weniger als zwei rechte Winkel beträgt: so müssen die beiden durchschnittenen geraden Linien, genugsam verlängert, auf der Seite der schneidenden Linie, auf welcher die beiden in Rede stehenden Winkel liegen, nothwendig zusammentreffen oder sich schneiden.

Beweis. In Fig. V. seien AC und BD zwei von der dritten geraden Linie AB geschnittene gerade Linien, und die Summe der beiden inneren an derselben Seite der schneidenden geraden Linie AB liegenden Winkel BAC und ABD betrage weniger als zwei rechte Winkel, oder es sei, wenn wir der Kürze wegen:

$$\angle BAC = \alpha, \quad \angle ABD = \beta$$

setzen:

$$\alpha + \beta < 2R.$$

Auf der Linie AC mache man nun $AA_0 = AB$ und ziehe A_0B, mache $A_0A_1 = A_0B$ und ziehe A_1B, mache $A_1A_2 = A_1B$ und ziehe A_2B, mache $A_2A_3 = A_2B$ und ziehe A_3B, u. s. w.; dass man dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen oder beliebig oft wiederholen kann, ist klar. Nehmen wir nun an, dass A_n der letzte der nach dem vorhergehenden Verfahren auf der Linie AC aufgetragenen Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \ldots.$$

sei, so sind

$$AA_0B, \quad A_0A_1B, \quad A_1A_2B, \ldots, A_{n-1}A_nB$$

gleichschenklige Dreiecke mit den Grundlinien

$$A_0B, \quad A_1B, \quad A_2B, \quad A_3B, \ldots, A_nB,$$

und nach dem Satze V. 3. ist folglich, wenn wir der Kürze wegen den völlig bestimmten Winkel ABA_0 oder AA_0B durch γ bezeichnen:

$$\angle AA_0B = \gamma,$$
$$\angle A_0A_1B = \tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\angle A_1A_2B = \tfrac{1}{4}\gamma,$$
$$\angle A_2A_3B = \tfrac{1}{8}\gamma,$$
u. s. w.
$$\angle A_{n-1}A_nB = \frac{1}{2^n}\gamma.$$

Digitized by Google

In dem Dreiecke ABA_n ist also:

$$\int ABA_n = \angle BAA_n + \angle ABA_n + \angle A_{n-1}A_nB = \alpha + \angle ABA_n + \frac{1}{2^n}\gamma,$$

und folglich, weil nach V. 1.:

$$\int ABA_n = 2R$$

ist:

$$\alpha + \angle ABA_n + \frac{1}{2^n}\gamma = 2R,$$

also:

$$\angle ABA_n = 2R - \alpha - \frac{1}{2^n}\gamma.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung

$$\alpha + \beta < 2R$$

ist, so kann man, wenn δ eine gewisse völlig bestimmte nicht verschwindende Grösse bezeichnet:

$$\alpha + \beta = 2R - \delta$$

setzen, woraus sich unmittelbar:

$$2R - \alpha = \beta + \delta,$$

also nach dem Obigen:

$$\angle ABA_n = \beta + \delta - \frac{1}{2^n}\gamma$$

oder, insofern nicht $\delta < \frac{1}{2^n}\gamma$ ist:

$$\angle ABA_n = \angle ABD + (\delta - \frac{1}{2^n}\gamma)$$

ergiebt. Da aber δ eine völlig bestimmte nicht verschwindende Grösse ist, so kann man offenbar *) die ganze Zahl n immer so gross annehmen, dass

$$\frac{1}{2^n}\gamma < \delta,$$

folglich $\delta - \frac{1}{2^n}\gamma$ eine Null übersteigende Grösse ist; dann ist, wegen der so eben bewiesenen Gleichung

$$\angle ABA_n = \angle ABD + (\delta - \frac{1}{2^n}\gamma),$$

---

*) Zum Ueberfluss könnte ich hier auf Elem. Lib. X. Prop. I. verweisen.

Digitized by Google

offenbar:

$$\angle ABA_n > \angle ABD,$$

und die von B ausgehende Linie BD liegt also innerhalb des Winkels ABA_n des Dreiecks ABA_n, woraus sich, weil jedes Dreieck ein endlicher, nach allen Seiten hin vollständig begränzter Raum ist, die von B ausgehende Linie BD aber über D hinaus in's Unendliche verlängert werden kann, und von ihr die schon in B geschnittenen Seiten AB und A_nB des Dreiecks ABA_n ein zweites Mal nicht geschnitten werden können, in der unzweideutigsten Weise ergiebt, dass von der über D hinaus genugsam verlängerten Linie BD die Seite AA_n des Dreiecks ABA_n, also die Linie AC, nothwendig geschnitten werden muss, w. z. b. w.

VII.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, und die Summe zweier inneren auf derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel beträgt zwei rechte Winkel: so sind die beiden ersten von der dritten durchschnittenen Linien einander parallel.

Beweis. In Fig. VI. werden die beiden Linien AE und CF von der dritten geraden Linie MN in B und D geschnitten, und es sei:

$$\angle ABD + \angle CDB = 2R;$$

es soll bewiesen werden, dass die beiden Linien AE und CF unter dieser Voraussetzung einander parallel sind. Denn wären die Linien AE und CF einander nicht parallel, so müssten sie, genugsam verlängert, sich schneiden (I.). Schnitten sie sich auf derselben Seite der schneidenden Linie MN, auf welcher die beiden inneren Winkel ABD und CDB liegen, in G, so wäre BDG ein Dreieck und in demselben nach der Voraussetzung:

$$\angle GBD + \angle GDB = 2R,$$

was nach III. unmöglich ist. Schnitten die Linien AE und CF sich auf der anderen Seite der schneidenden Linie MN in H, so folgt dieselbe Ungereimtheit, weil aus

$$\angle ABD + \angle CDB = 2R$$

mittelst Prop. XIII. leicht herzuleiten ist, dass auch

$$\angle EBD + \angle FDB = 2R$$

ist. Die Linien AE und CF können sich also weder auf der einen, noch auf der anderen Seite der Linie MN schneiden; sie schneiden sich also niemals und sind daher nach I. einander parallel, w. z. b. w.

Anmerkung. Ueber Gegenwinkel, Wechselwinkel u. s. w. ist hier natürlich nichts weiter zu sagen.

VIII.

Lehrsatz. (Umkehrung des vorhergehenden Lehrsatzes.). Wenn zwei einander parallele gerade Linien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so beträgt die Summe jeder zwei inneren an derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zwei rechte Winkel.

Beweis. In Fig. VII. werden die einander parallelen geraden Linien AE und CF von der dritten Linie MN in B und D geschnitten; es soll bewiesen werden, dass unter dieser Voraussetzung

$$\angle ABD + \angle CDB = 2R$$

ist. Denn wäre nicht

$$\angle ABD + \angle CDB = 2R,$$

so könnte entweder

$$\angle ABD + \angle CDB < 2R$$

oder

$$\angle ABD + \angle CDB > 2R$$

sein. Wäre aber

$$\angle ABD + \angle CDB < 2R,$$

so würden nach VI. die Linien AE und CF, genugsam verlängert, auf der Seite von MN, auf welcher die Winkel ABD und CDB liegen, sich schneiden, und wären also nach I. einander nicht parallel, wie doch vorausgesetzt wurde. Wäre ferner

$$\angle ABD + \angle CDB > 2R,$$

so würde sich hieraus mittelst Prop. XIII. leicht herleiten lassen, dass

$$\angle EBD + \angle FDB < 2R$$

sein müsste, und ganz wie vorher würden also nach VI. die Linien

Digitized by Google

AE und CF, genugsam verlängert, auf der Seite von MN sich schneiden, auf welcher die Winkel ABD und CDB nicht liegen, dieselben wären also nach I. wieder einander nicht parallel, wie doch vorausgesetzt wurde. Daher kann weder

$$\angle ABD + \angle CDB < 2R,$$

noch

$$\angle ABD + \angle CDB > 2R$$

sein, und es ist also:

$$\angle ABD + \angle CDB = 2R,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Ueber Gegenwinkel, Wechselwinkel, u. s. w. ist auch hier nichts weiter zu sagen.

IX.

Schlussbemerkung. Im Obigen haben wir gesehen, dass, der strengen Theorie nach, ebene Dreiecke, deren Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln oder kleiner als zwei rechte Winkel ist, gleich möglich sind; nur die Unmöglichkeit ebener Dreiecke mit zwei rechte Winkel übersteigenden Winkelsummen ist streng erweisbar; entweder ist in allen ebenen Dreiecken die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln, oder in allen ebenen Dreiecken ist die Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel. Dadurch ist Lobatschewsky und, so viel ich weiss, auch J. Bolyai, dessen hierher gehörende Schrift mir aber jetzt noch nicht zu Gebote steht, veranlasst worden, gewissermassen zwei Geometrieen zu unterscheiden, von denen die eine von der Voraussetzung — oder Hypothese — ausgeht, dass die Winkelsumme jedes ebenen Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln ist, die andere dagegen die Voraussetzung — oder Hypothese — zur Grundlage ihrer Untersuchungen macht, dass die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks kleiner als zwei rechte Winkel oder überhaupt nicht grösser als zwei rechte Winkel ist; die letztere hat Lobatschewsky mit dem Namen Imaginäre Geometrie belegt, wogegen in neuerer Zeit die schon von Gauss gebrauchten Benennungen Euclidische Geometrie und Nichteuclidische Geometrie für diese beiden Geometrieen wieder besonders in Vorschlag gebracht worden sind. Was es nun mit dieser Nichteuclidischen Geometrie für eine Bewandtniss hat, gehört jetzt gar nicht hierher, und liegt ganz ausser dem Zweck und dem Bereiche dieser Abhandlung, die es durchaus nur mit der

Euclidischen Geometrie zu thun haben soll, indem ich auf die Nichteuclidische Geometrie — über welche die vorhergehenden nur ganz oberflächlichen Bemerkungen für jetzt genügen mögen — bald in einer besonderen ausführlichen Abhandlung zurückzukommen hoffe. Ueberhaupt muss ich mir die Bemerkung erlauben, dass die sogenannte Nichteuclidische Geometrie zunächst von der Euclidischen Geometrie ganz getrennt gehalten werden muss, namentlich auch Anfängern gegenüber, bei denen dergleichen Vermischungen und Vermengungen nur Unklarheit und Verwirrung erzeugen, und dass also auch namentlich in geometrische Elementarlehrbücher Erörterungen über die sogenannte Nichteuclidische Geometrie zur Zeit gar nicht gehören. Eben so bin ich der Meinung, dass es, so lange man sich lediglich auf dem Felde der Euclidischen Geometrie bewegt, ganz unnöthig und unnütz ist, an der euclidischen Definition der Parallelen auch nur die geringste Aenderung vorzunehmen, und dass es eben deshalb auch ganz unnöthig und unnütz ist, den sogenannten Winkel des Parallelismus — über den in einer späteren Abhandlung ein Mehreres — in der Euclidischen Geometrie zu betrachten, was in derselben gleichfalls nur Verwirrung hervorbringen kann, und nach meiner Meinung zunächst dahin gar nicht gehört. Alles dieses wird, wie ich glaube und hoffe, in der obigen Abhandlung seine Bestätigung finden. Was endlich die im Obigen hauptsächlich nach Legendre gegebenen Beweise der geometrischen Sätze, auf welche es hier vorzugsweise und ganz besonders ankommt, betrifft, so glaube ich, dass dieselben rücksichtlich ihrer wahrhaften geometrischen Strenge und Evidenz, wie wir diese Eigenschaften aus den Schriften der griechischen Geometer kennen lernen und uns aneignen können, über den von Lobatschewsky gegebenen Beweisen derselben Sätze stehen, welche letzteren Beweise selbst nicht von allen Zweifeln frei sein dürften, was aber weiter auszuführen hier jetzt nicht der Ort und der Zweck ist *); die vielleicht etwas grössere Weitläufigkeit der Legendre'schen Beweise wird durch ihre Strenge und Evidenz vollkommen aufgewogen, und Herrn

---

*) Auch stimme ich dem völlig bei, was Herr Angelo Forti in der etwas weiter unten angeführten kleinen Schrift (p. 19.) über die Schrift von Lobatschewsky sagt: „Per debito di critica mi è d'uopo dire, che le Memorie di Lobatschewsky sono generalmente esposte in modo alquanto oscuro. Questo difetto sopra una materia, che ha per carattere essenziale la chiarezza, e cui anzi si voleva aggiungere evidenza può avere cooperato a non far loro acquistare l'interesse e la diffusione, che meritavono."

Digitized by Google

Hoüel ist gewiss wiederholt zu danken, dass er diese Beweise in seinem oben erwähnten „Essai critique" wieder an's Licht gezogen und die Mathematiker von Neuem mit denselben bekannt gemacht hat. In Italien hat Herr Angelo Forti in Pisa in der kleinen Schrift: „Intorno alla Geometria immaginaria o non-euclidiana. Pisa." seine Landsleute mit diesen neueren geometrischen Untersuchungen vorläufig im Allgemeinen bekannt gemacht, und Herr G. Battaglini in Neapel hat neuerlichst eine sehr zu beachtende Schrift über die Nichteuclidische Geometrie oder die Pangeometrie unter folgendem Titel herausgegeben:

Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky. Nota per G. Battaglini (Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Fascicolo 6°. — Giugno 1867. Stamperia del Fibreno 1867.). 4°.

Wie schon gesagt, denke ich bald auf diese Nichteuclidische Geometrie ausführlich zurückzukommen, sobald die ganze betreffende Literatur mir vorliegt, was in diesem Falle durchaus nothwendig ist.

Um jedem Missverständnisse vorzubeugen, bemerke ich noch — wenn ich auch leider dies nur aus dem Gedächtnisse schreiben kann — rücksichtlich der obigen Legendre'schen Beweise, dass dieselben nicht mit einer anderen, als ungenügend erkannten, in den neueren Ausgaben der „Éléments de Géométrie" unterdrückten Parallelentheorie zu verwechseln sind, an welche sich auch — so viel ich mich noch erinnere — eine im Jahre 1818 in Halle erschienene verdienstliche Schrift von Hessling anschliesst.

Digitized by Google

XXV.

Ueber einen arithmetischen Satz von Lagrange.

Von
dem Herausgeber.

In den „**Additions à l'Algèbre d'Euler. Paragraphe IX. De la manière de trouver des fonctions algébriques de tous les degrés, qui étant multipliées ensemble produisent toujours des fonctions semblables**" hat Lagrange ausser anderen sehr bemerkenswerthen Sätzen, auf die wir bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffen, einen Satz bewiesen, welcher nach unserer Meinung verdient, noch auf eine andere Art, als von Lagrange geschehen, bewiesen zu werden. Einen neuen Beweis dieses Satzes will ich daher in diesem Aufsatze geben.

Es sei:

$$1) \ldots \begin{cases} A_1 = 1, & B_1 = 0, \\ A_2 = a, & B_2 = b, \\ A_3 = aA_2 - bA_1, & B_3 = aB_2 - bB_1, \\ A_4 = aA_3 - bA_2, & B_4 = aB_3 - bB_2, \\ A_5 = aA_4 - bA_3, & B_5 = aB_4 - bB_3, \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

wo alle Zeichen beliebige Grössen bedeuten.

Dann ist:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = bA_1, \quad B_3 = bA_2, \quad B_4 = bA_3, \ldots.$$

wie man leicht findet; also allgemein:

Digitized by Google

$$B_n = bA_{n-1},$$

welche Relation auch noch für $n=1$ gilt, wenn man $A_0=0$ setzt. Gilt nämlich diese Relation bis n, so ist, weil

$$B_{n+1} = aB_n - bB_{n-1}$$

ist:

$$B_{n+1} = abA_{n-1} - b^2A_{n-2} = b(aA_{n-1} - bA_{n-2}),$$

also, weil

$$A_n = aA_{n-1} - bA_{n-2}$$

ist:

$$B_{n+1} = bA_n,$$

und die zu beweisende Relation gilt folglich auch für $n+1$, also bis $n+1$, woraus sich nach bekannter Schlussweise ergiebt, dass sie allgemein gültig ist.

Weil

$$A_n = aA_{n-1} - bA_{n-2}$$

und, wie so eben bewiesen:

$$B_{n-1} = bA_{n-2}$$

ist, so ist:

$$A_n = aA_{n-1} - B_{n-1}.$$

Daher haben wir die folgenden Relationen:

$$2) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} A_1 = 1, & B_1 = 0, \\ A_2 = aA_1 - B_1, & B_2 = bA_1, \\ A_3 = aA_2 - B_2, & B_3 = bA_2, \\ A_4 = aA_3 - B_3, & B_4 = bA_3, \\ A_5 = aA_4 - B_4, & B_5 = bA_4, \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Setzen wir nun, die Binomial-Coefficienten auf gewöhnliche Weise bezeichnend:

3)

$$X_m = x^m - m_1 x^{m-1} y B_1 - m_2 x^{m-2} y^2 B_2 - m_3 x^{m-3} y^3 B_3 - \ldots,$$

$$Y_m = m_1 x^{m-1} y A_1 + m_2 x^{m-2} y^2 A_2 + m_3 x^{m-3} y^3 A_3 + \ldots;$$

so ist:

Digitized by Google

$$X_{m+1}$$
$$=x^{m+1}-(m+1)_1 x^m y B_1-(m+1)_2 x^{m-1} y^2 B_2-(m+1)_3 x^{m-2} y^3 B_3-\ldots,$$
$$Y_{m+1}$$
$$=(m+1)_1 x^m y A_1+(m+1)_2 x^{m-1} y^2 A_2+(m+1)_3 x^{m-2} y^3 A_3+\ldots;$$

also, weil nach einer allgemein bekannten Zerlegung der Binomial-Coefficienten:

$$(m+1)_1=m_0+m_1,$$
$$(m+1)_2=m_1+m_2,$$
$$(m+1)_3=m_2+m_3,$$
$$(m+1)_4=m_3+m_4,$$
u. s. w.

ist:

$$\begin{aligned}X_{m+1}&=x^{m+1}-m_0 x^m y B_1-m_1 x^{m-1} y^2 B_2-m_2 x^{m-2} y^3 B_3-\ldots\\&\quad-m_1 x^m y B_1-m_2 x^{m-1} y^2 B_2-m_3 x^{m-2} y^3 B_3-\ldots\\&=x(x^m-m_1 x^{m-1} y B_1-m_2 x^{m-2} y^2 B_2-m_3 x^{m-3} y^3 B_3-\ldots)\\&\quad-m_1 x^{m-1} y^2 B_2-m_2 x^{m-2} y^3 B_3-m_3 x^{m-3} y^4 B_4-\ldots,\end{aligned}$$

folglich nach 2):

$$\begin{aligned}X_{m+1}&=x(x^m-m_1 x^{m-1} y B_1-m_2 x^{m-2} y^2 B_2-m_3 x^{m-3} y^3 B_3-\ldots)\\&\quad-by(m_1 x^{m-1} y A_1+m_2 x^{m-2} y^2 A_2+m_3 x^{m-3} y^3 A_3+\ldots),\end{aligned}$$

also nach 3):

$$X_{m+1}=xX_m-byY_m.$$

Ferner ist nach derselben Zerlegung der Binomial-Coefficienten:

$$\begin{aligned}Y_{m+1}=&\quad m_0 x^m y A_1+m_1 x^{m-1} y^2 A_2+m_2 x^{m-2} y^3 A_3+\ldots\\&+m_1 x^m y A_1+m_2 x^{m-1} y^2 A_2+m_3 x^{m-2} y^3 A_3+\ldots\\=&\quad x(m_1 x^{m-1} y A_1+m_2 x^{m-2} y^2 A_2+m_3 x^{m-3} y^3 A_3+\ldots)\\&+m_0 x^m y A_1+m_1 x^{m-1} y^2 A_2+m_2 x^{m-2} y^3 A_3+\ldots,\end{aligned}$$

also nach 2):

$$\begin{aligned}Y_{m+1}=&\quad x(m_1 x^{m-1} y A_1+m_2 x^{m-2} y^2 A_2+m_3 x^{m-3} y^3 A_3+\ldots)\\&+m_0 x^m y A_1+m_1 x^{m-1} y^2 . aA_1+m_2 x^{m-2} y^3 . aA_2+\ldots\\&\qquad-m_1 x^{m-1} y^2 B_1-m_2 x^{m-2} y^3 B_2-\ldots\\=&\quad x(m_1 x^{m-1} y A_1+m_2 x^{m-2} y^2 A_2+m_3 x^{m-3} y^3 A_3+\ldots)\\&+y(x^m-m_1 x^{m-1} y B_1-m_2 x^{m-2} y^2 B_2-\ldots)\\&+ay(m_1 x^{m-1} y A_1+m_2 x^{m-2} y^2 A_2+m_3 x^{m-3} y^3 A_3+\ldots)\\=&\quad y(x^m-m_1 x^{m-1} y B_1-m_2 x^{m-2} y^2 B_2-\ldots)\\&+(x+ay)(m_1 x^{m-1} y A_1+m_2 x^{m-2} y^2 A_2+m_3 x^{m-3} y^3 A_3+\ldots),\end{aligned}$$

Digitized by Google

folglich nach 3):

$$Y_{m+1} = yX_m + (x+ay)Y_m.$$

Daher haben wir jetzt die beiden folgenden Relationen:

$$4) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{m+1} = xX_m - byY_m, \\ Y_{m+1} = yX_m + (x+ay)Y_m. \end{array} \right.$$

Folglich ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$X_{m+1}^2 + aX_{m+1}Y_{m+1} + bY_{m+1}^2$$

$$= \begin{array}{l|l|l|l} x^2 & X_m^2 - 2bxy & X_m Y_m + b^2y^2 & Y_m^2, \\ +axy & \quad -aby^2 & \quad -aby(x+ay) & \\ +by^2 & \quad +ax(x+ay) & \quad +b(x+ay)^2 & \\ & \quad +2by(x+ay) & & \end{array}$$

und daher, wie man nach leichter Reduction findet:

$$5) \ldots\ldots \quad X_{m+1}^2 + aX_{m+1}Y_{m+1} + bY_{m+1}^2$$
$$= (x^2 + axy + by^2)(X_m^2 + aX_m Y_m + bY_m^2.$$

Nun ist nach 3):

$$X_1 = x, \quad Y_1 = y;$$

also:

$$X_1^2 + aX_1Y_1 + bY_1^2 = x^2 + axy + by^2;$$

folglich nach 5):

$$X_2^2 + aX_2Y_2 + bY_2^2 = (x^2 + axy + by^2)(X_1^2 + aX_1Y_1 + bY_1^2)$$
$$= (x^2 + axy + by^2)^2,$$

$$X_3^2 + aX_3Y_3 + bY_3^2 = (x^2 + axy + by^2)(X_2^2 + aX_2Y_2 + bY_2^2)$$
$$= (x^2 + axy + by^2)^3,$$

$$X_4^2 + aX_4Y_4 + bY_4^2 = (x^2 + axy + by^2)(X_3^2 + aX_3Y_3 + bY_3^2)$$
$$= (x^2 + axy + by^2)^4,$$

u. s. w.,

was unmittelbar zu der folgenden sehr merkwürdigen Gleichung führt:

$$6) \ldots \quad X_m^2 + aX_mY_m + bY_m^2 = (x^2 + axy + by^2)^m,$$

zu welcher Lagrange a. a. O. durch ganz andere Betrachtungen gelangt ist.

Für $a = 0$ ist nach 1) offenbar:

Digitized by Google

$A_1 = 1,$ $B_1 = 0,$
$A_2 = 0,$ $B_2 = b,$
$A_3 = -bA_1 = -b,$ $B_3 = -bB_1 = 0,$
$A_4 = -bA_2 = 0,$ $B_4 = -bB_2 = -b^2,$
$A_5 = -bA_3 = b^2,$ $B_5 = -bB_3 = 0,$
$A_6 = -bA_4 = 0,$ $B_6 = -bB_4 = b^3,$
$A_7 = -bA_5 = -b^3,$ $B_7 = -bB_5 = 0,$
u. s. w. u. s. w.

also allgemein:

$$A_{2n} = 0, \quad A_{2n+1} = (-1)^n . b^n;$$
$$B_{2n} = (-1)^{n-1} . b^n, \quad B_{2n+1} = 0;$$

und folglich nach 3):

7)
$$X_m = x^m - m_2 x^{m-2} y^2 b + m_4 x^{m-4} y^4 b^2 - m_6 x^{m-6} y^6 b^3 + \ldots,$$
$$Y_m = m_1 x^{m-1} y - m_3 x^{m-3} y^3 b + m_5 x^{m-5} y^5 b^2 - m_7 x^{m-7} y^7 b^3 + \ldots;$$

wo dann in diesem Falle nach 6) die Relation:

8) . . . . $X_m^2 + bY_m^2 = (x^2 + by^2)^m$

Statt findet.

Nach 6) ist:

$$X_m^2 + aX_m Y_m + bY_m^2 = (x^2 + axy + by^2)^m,$$
$$X_n^2 + aX_n Y_n + bY_n^2 = (x^2 + axy + by^2)^n;$$

also:

$$(X_m^2 + aX_m Y_m + bY_m^2)(X_n^2 + aX_n Y_n + bY_n^2)$$
$$= (x^2 + axy + by^2)^{m+n},$$

folglich, weil nach 6):

$$X_{m+n}^2 + aX_{m+n} Y_{m+n} + Y_{m+n}^2 = (x^2 + axy + by^2)^{m+n}$$

ist:

$$(X_m^2 + aX_m Y_m + bY_m^2)(X_n^2 + aX_n Y_n + bY_n^2)$$
$$= X_{m+n}^2 + aX_{m+n} Y_{m+n} + bY_{m+n}^2.$$

Folglich ist ferner:

Digitized by Google

$$(X_m^2 + aX_mY_m + bY_m^2)(X_n^2 + aX_nY_n + bY_n^2)(X_p^2 + aX_pY_p + bY_p^2)$$
$$= (X_{m+n}^2 + aX_{m+n}Y_{m+n} + bY_{m+n}^2)(X_p^2 + aX_pY_p + bY_p^2)$$
$$= X_{m+n+p}^2 + aX_{m+n+p}Y_{m+n+p} + bY_{m+n+p}^2$$
$$= (x^2 + axy + by^2)^{m+n+p}.$$

Also ist ferner:

$$(X_m^2 + aX_mY_m + bY_m^2)(X_n^2 + aX_nY_n + bY_n^2)(X_p^2 + aX_pY_p + bY_p^2) \times (X_q^2 + aX_qY_q + bY_q^2)$$
$$= (X_{m+n+p}^2 + aX_{m+n+p}Y_{m+n+p} + bY_{m+n+p}^2)(X_q^2 + aX_qY_q + bY_q^2)$$
$$= X_{m+n+p+q}^2 + aX_{m+n+p+q}Y_{m+n+p+q} + bY_{m+n+p+q}^2$$
$$= (x^2 + axy + by^2)^{m+n+p+q}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist also allgemein:

9) . . . .
$$(X_m^2 + aX_mY_m + bY_m^2)$$
$$\times (X_n^2 + aX_nY_n + bY_n^2)$$
$$\times (X_p^2 + aX_pY_p + bY_p^2)$$
$$\times (X_q^2 + aX_qY_q + bY_q^2)$$
u. s. w.
$$\times (X_u^2 + aX_uY_u + bY_u^2)$$
$$= X_{m+n+p+\ldots+u}^2 + aX_{m+n+p+\ldots+u}Y_{m+n+p+\ldots+u} + bY_{m+n+p+\ldots+u}^2$$
$$= (x^2 + axy + by^2)^{m+n+p+\ldots+u}.$$

Man kann von dem Bisherigen mancherlei Anwendungen machen, worüber jedoch für jetzt die folgenden Bemerkungen genügen mögen.

Soll man X, Y so bestimmen, dass die Grösse

$$X^2 + aXY + bY^2$$

ein Quadrat wird, so setze man im Obigen $m=2$, und folglich nach 3):

$$X = X_2 = x^2 - by^2, \quad Y = Y_2 = 2xy + ay^2;$$

dann ist für jedes x und y:

Digitized by Google

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)^2.$$

Soll man X, Y so bestimmen, dass die Grösse

$$X^2 + aXY + bY^2$$

ein Cubus wird, so setze man im Obigen $m=3$, und folglich nach 3):

$$X = X_3 = x^3 - 3x^2yB_1 - 3xy^2B_2 - y^3B_3,$$
$$Y = Y_3 = 3x^2yA_1 + 3xy^2A_2 + y^3A_3;$$

also, weil nach 1):

$$A_1 = 1, \qquad B_1 = 0,$$
$$A_2 = a, \qquad B_2 = b,$$
$$A_3 = aA_2 - bA_1 = a^2 - b; \quad B_3 = aB_2 - bB_1 = ab$$

ist:

$$X = X_3 = x^3 - 3bxy^2 - aby^3,$$
$$Y = Y_3 = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3;$$

dann ist für jedes x und y:

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)^3.$$

Um die Grösse X so zu bestimmen, dass die Grösse

$$a + bX + X^2$$

ein Quadrat wird, kann man sich auf folgende Art verhalten. Nach dem Vorhergehenden wird

$$X^2 + bXY + aY^2$$

für jedes x und y ein Quadrat, wenn man

$$X = x^2 - ay^2, \quad Y = 2xy + by^2$$

setzt. Nun bestimme man mittelst der Gleichung:

$$2xy + by^2 = 1$$

die Grösse x, wodurch man:

$$x = \frac{1 - by^2}{2y},$$

und folglich:

$$X = \frac{(1 - by^2)^2}{4y^2} - ay^2 = \frac{(1 - by^2)^2 - 4ay^4}{4y^2} = \frac{1 - 2by^2 + (b^2 - 4a)y^4}{4y^2}$$

erhält. Dann wird für jedes y die Grösse

Digitized by Google

$$X^2 + bXY + aY^2,$$

und folglich, weil $Y = 1$ ist, für jedes y die Grösse

$$a + bX + X^2$$

ein Quadrat, wie verlangt wurde.

Dieses Quadrat ist nämlich:

$$(x^2 + bxy + ay^2)^2 = \left\{\left(\frac{1-by^2}{2y}\right)^2 + \frac{b(1-by^2)}{2} + ay^2\right\}^2 = \frac{\{1+(4a-b^2)y^4\}^2}{16y^4}.$$

Soll man X so bestimmen, dass

$$a + bX + c^2X^2$$

ein Quadrat wird, so bestimme man nach dem Vorhergehenden X so, dass

$$\frac{a}{c^2} + \frac{b}{c^2}X + X^2$$

ein Quadrat wird; dann ist auch

$$a + bX + c^2X^2 = c^2\left(\frac{a}{c^2} + \frac{b}{c^2}X + X^2\right)$$

ein Quadrat.

Soll man X so bestimmen, dass

$$a^2 + bX + cX^2$$

ein Quadrat wird, so bemerke man, dass

$$a^2 + bX + cX^2 = X^2(c + \frac{b}{X} + \frac{a^2}{X^2}),$$

also, wenn man

$$Y = \frac{1}{X}$$

setzt:

$$a^2 + bX + cX^2 = X^2(c + bY + a^2Y^2)$$

ist. Bestimmt man nun nach dem Vorhergehenden Y so, dass

$$c + bY + a^2Y^2$$

ein Quadrat ist, und setzt dann

$$X = \frac{1}{Y},$$

so ist auch

Digitized by Google

$$a^2+bX+cX^2=X^2(c+bY+a^2Y^2)$$

ein Quadrat, wie verlangt wurde.

Soll man X so bestimmen, dass

$$A+X^2$$

ein Quadrat wird, so hat man nach dem Vorhergehenden, wenn man nämlich in der Formel

$$a+bX+X^2$$

jetzt $a=A$, $b=0$ setzt,

$$X=\frac{1-4Ay^4}{4y^2}$$

zu setzen; dies giebt:

$$A+X^2=A+\left(\frac{1-4Ay^4}{4y^2}\right)^2=\left(\frac{1+4Ay^4}{4y^2}\right)^2.$$

Soll man X so bestimmen, dass die Grösse

$$1+AX^2$$

ein Quadrat wird, so beachte man, dass

$$1+AX^2=X^2(A+\frac{1}{X^2})=X^2(A+Y^2)$$

ist, wenn man

$$Y=\frac{1}{X}$$

setzt. Setzt man nun

$$Y=\frac{1-4Ax^4}{4x^2},$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$A+Y^2,$$

und folglich auch

$$1+AX^2=X^2(A+Y^2)$$

ein Quadrat, wo

$$X=\frac{1}{Y}=\frac{4x^2}{1-4Ax^4}$$

ist. Es ist nämlich für diesen Werth von X:

Digitized by Google

$$1+AX^2=1+\frac{16Ax^4}{(1-4Ax^4)^2}=\frac{(1-4Ax^4)^2+16Ax^4}{(1-4Ax^4)^2},$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$1+AX^2=\left(\frac{1+4Ax^4}{1-4Ax^4}\right)^2.$$

Sollen X, Y so bestimmt werden, dass

$$X^2 \pm Y^2$$

ein Quadrat wird, so wird man nach dem Obigen:

$$X=x^2 \mp y^2, \quad Y=2xy$$

setzen. Es ist dann

$$X^2 \pm Y^2=(x^2 \pm y^2)^2.$$

Soll man X, Y so bestimmen, dass

$$X^2 \pm Y^2$$

ein Cubus wird, so wird man nach dem Obigen:

$$X=x^3 \mp 3xy^2, \quad Y=3x^2y \mp y^3$$

setzen; es ist dann:

$$X^2 \pm Y^2=(x^2 \pm y^2)^3.$$

Alle diese Rechnungen haben für jetzt durchaus nur den Zweck, einige leichte Anwendungen des oben bewiesenen allgemeinen Satzes zu zeigen.

Digitized by Google

XXVI.

Wurfbewegung im widerstehenden Mittel.

(Nachtrag zu der Abhandlung in Thl. XLVI. No. XX.)

Von

Herrn Dr. *A. M. Nell*,

Lehrer an der technischen Schule zu Darmstadt.

---

§. 22.

Genauere Methode zur Berechnung der Wurfweite und des Einfallswinkels.

In §. 8. wurden die Formeln 61) und 62) entwickelt, um die Grössen ω und ε näherungsweise zu berechnen. Man könnte nun allerdings hiernach genauere Werthe erhalten, wenn man den mittelst 62) gefundenen Winkel ε an die Stelle von ε' in 61) setzte, nachdem man ζ nach 55) und 59) neu bestimmt hätte. Diese Rechnung würde indess unverhältnissmässig weitläufig ausfallen, und wollen wir daher eine andere Methode entwickeln.

Es wird wieder vorausgesetzt, dass ein Näherungswerth von ε gleich ε' mittelst 58) und ζ nach 59) berechnet wurde. Wird die Geschwindigkeit im Punkte F (Taf. V. Fig. 1.), wo der Tangentenwinkel gleich ε', durch v' bezeichnet, so ist

$$v' = \sqrt{\frac{g}{b} \cdot \frac{\sec \varepsilon'}{L + \Lambda \operatorname{tg} \varepsilon'}}.$$

Nun können wir uns vorstellen, das Geschoss beginne seine Bewegung im Punkte F unter dem Winkel ε' mit der Geschwindigkeit v', und setzen daher in Gleichung 30) (am Schlusse des §. 4.) $V = v'$, $\alpha = -\varepsilon'$ und schreiben ausserdem $-y$ statt y, damit die positive Richtung der Ordinaten nach abwärts gehe; dann wird:

Digitized by Google

$$\zeta = \operatorname{tg}\varepsilon'.\omega + \frac{g\omega^2}{2v'^2\cos^2\varepsilon'} + \frac{bg\omega^3}{3v'^2\cos^3\varepsilon'} + \frac{bg\omega^4}{6v'^2\cos^4\varepsilon'}(b + \frac{g\sin\varepsilon'}{2v'^2})....$$

Setzt man $\operatorname{tg}\varepsilon' = p'$, $v'^2\cos^2\varepsilon' = \frac{g}{b(L+\varDelta p')}$, so wird:

$$\zeta = p'\omega + \frac{b(L+\varDelta p')}{2}\omega^2 + \frac{b^2(L+\varDelta p')}{3\cos\varepsilon'}\omega^3$$
$$+ \frac{b^2(L+\varDelta p')}{6\cos^2\varepsilon'}(b + \frac{b(L+\varDelta p')\sin\varepsilon'\cos^2\varepsilon'}{2})\omega^4....$$

Führt man die Hülfsgrösse J ein (§§. 10., 11., 12.), nämlich:

$$J = \frac{b(L+\varDelta p')}{2p'},$$

und setzt:

$$\cos\varepsilon' = \frac{1}{1+p'^2},\quad \sin\varepsilon' = \frac{p'}{\sqrt{1+p'^2}},\quad b = \frac{1}{2k},$$

so erhält man endlich:

$$\zeta = p'\omega + Jp'\omega^2 + \frac{Jp'}{3k}\sqrt{1+p'^2}\,\omega^3 + \frac{Jp'(1+p'^2)}{6k}\left(\frac{1}{2k} + \frac{Jp'^2}{(1+p'^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\omega^4...$$

Durch Umkehrung dieser Reihe findet sich:

$$\omega = \frac{1}{p'}\zeta - \frac{J}{p'^2}\zeta^2 + \frac{J}{p'^3}(2J - \frac{\sqrt{1+p'^2}}{3k})\zeta^3$$
$$- \frac{J}{p'^4}(5J^2 - \frac{J(10+9p'^2)}{6k\sqrt{1+p'^2}} + \frac{1+p'^2}{12k^2})\zeta^4....;$$

hat man hiernach ω berechnet, so erhält man auch den Einfallswinkel ε, denn differentiirt man die obige Gleichung, so ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varepsilon' + \frac{gx}{v'^2\cos^2\varepsilon'} + \frac{bgx^2}{v'^2\cos^3\varepsilon'} + \frac{2bgx^3}{3v'^2\cos^4\varepsilon'}(b + \frac{g\sin\varepsilon'}{2v'^2})....$$

Für $x = \omega$ wird:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varepsilon,$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\varepsilon' + \frac{g\omega}{v'^2\cos^2\varepsilon'} + \frac{bg\omega^2}{v'^2\cos^3\varepsilon'} + \frac{2bg\omega^3}{3v'^2\cos^4\varepsilon'}(b + \frac{g\sin\varepsilon'}{2v'^2})....$$

Digitized by Google

Führt man wie früher die Grössen p', J und k ein, so findet sich:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = p\left(1+2J\omega+\frac{J\omega^2}{k}\sqrt{1+p'^2}+\tfrac{2}{3}\frac{J\omega^3}{k}\left(\frac{1+p'^2}{2k}+\frac{Jp'^2}{\sqrt{1+p'^2}}\right)\ldots\right).$$

Das vierte Glied in diesem Ausdrucke ist stets so klein, dass man es wohl in allen Fällen wird ausser Acht lassen können. Die gleiche Bemerkung gilt von dem vierten Gliede der Reihe für ω.

§. 23.

Statt der in §. 10. gegebenen Formeln für ω und ε, nämlich:

$$\omega = \frac{\frac{\zeta}{p_2}}{1+J\frac{\zeta}{p_2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\varepsilon = p_2(1+2J\omega),$$

wird man daher, um genauer zu rechnen, die folgenden anwenden:

$$\omega = \frac{\zeta}{p_2} - J\left(\frac{\zeta}{p_2}\right)^2 + \frac{J}{3}\left(\frac{\zeta}{p_2}\right)^3\left(6J - \frac{1}{k\cos\alpha_2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = p_2\left(1+2J\omega+\frac{J\omega^2}{k\cos\alpha_2}\right).$$

Ganz die gleichen Formeln gelten auch für die gleichnamigen Grössen in §. 11. und §. 12., wenn man p_4 und α_4 oder p_6 und α_6 an die Stelle von p_2 und α_2 setzt.

Wenden wir dies auf das Beispiel des §. 14. an, so ist:

$$\zeta = 0.485, \quad \log p_4 = 9.53148, \quad \alpha_4 = 18^0\,46'\,42'',$$

$$L + \Delta p_4 = 2.3980, \quad \log J = 6.54939,$$

$$\frac{\zeta}{p_4} = 1.42647$$

$$J\left(\frac{\zeta}{p_4}\right)^2 = \underline{0.00035}$$

$$1.42612.$$

Das dritte Glied findet sich gleich 0,000000671 oder beiläufig $\frac{7}{10000}$ Millimeter, ist also eine verschwindend kleine Grösse; wir haben daher $\omega = 1{,}426$.

Um auch ε zu berechnen, so ist:

$$\log 2J\omega = 7.00458-10, \quad \log\frac{J\omega^2}{k\cos\alpha_4} = 3{,}18454-10,$$

Digitized by Google

$$\log(1+2J\omega) = 0.00043, \quad \log(1+2J\omega + \frac{J\omega^2}{k\cos\alpha_4}) = 0.00043,$$

$$\log\operatorname{tg}\varepsilon = 9.53191.$$

Der Winkel ε findet sich also genau so wie früher, und auch ω weicht nur unmerklich von dem früheren Werthe ab.

Für die Curve mit dem Elevationswinkel von 45° war (§. 15.):

$$\zeta = 76.71, \quad \log p_6 = 0.16969, \quad \alpha_6 = 55^0 55' 8'', \quad \log J = 6.44965.$$

Hier erhält man:

$$\frac{\zeta}{p_6} = 51.8940$$

$$J\left(\frac{\zeta}{p_6}\right)^2 = 0.7583$$

$$\frac{J}{3}\left(\frac{\zeta}{p_6}\right)^3 (6J - \frac{1}{k\cos\alpha_6}) = 0.0175$$

$$\omega = 51.1532,$$

$$\log 2J\omega = 8.45955-10, \quad \log\frac{J\omega^2}{k\cos\alpha_6} = 6.42200-10,$$

$$\log(1+2J\omega) = 0.01234, \quad \log(1+2J\omega + \frac{J\omega^2}{k\cos\alpha_6}) = 0.01245,$$

$$\log\operatorname{tg}\varepsilon = 0.18214, \quad \varepsilon = 56^0 40' 38''.$$

Dieser Werth von ε ist um 25″ grösser als der früher berechnete.

§. 24.

Asymptoten der ballistischen Curve.

Poisson hat in seinem Traité de Mecanique nachgewiesen, dass sowohl der aufsteigende, als der niedersteigende Ast der Wurflinie eine Asymptote habe. Wir folgen hier seiner Entwickelung und werden dann zeigen, wie man die Lage der Asymptoten bestimmen könne.

Wir hatten früher, §. 3., die folgenden Differentialgleichungen gefunden:

$$bdx = -\frac{dp}{L - \Delta p}, \quad bdy = -\frac{pdp}{L - \Delta p}.$$

Diese Gleichungen wollen wir nun für den niedersteigenden Ast in der Weise transformiren, dass die neue Abscissenaxe FX (Taf. V. Fig. 2.) durch den höchsten Punkt F geht, wobei FJ', $J'K$ durch

x', y' bezeichnet werden sollen, so ist:

$$x = w + x', \quad y = H - y', \quad dx = dx', \quad dy = -dy',$$

$$p = -\frac{dy'}{dx'} = -p', \quad dp = -dp', \quad \Delta p = \Delta(-p') = -\Delta p'.$$

Vermittelst dieser Werthe nehmen die obigen Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$bdx' = \frac{dp'}{L + \Delta p'}, \quad bdy' = \frac{p'dp'}{L + \Delta p'}.$$

Setzt man $p' = \operatorname{tg}\varphi'$, so wird, wenn man sich die Curve nach abwärts fortgesetzt denkt, φ' stets grösser werden und sich immer mehr einem rechten Winkel nähern, folglich muss p' bis in's Unendliche wachsen. Um zu wissen, wie sich dann x' verhält, so ist:

$$d(\Delta p') = 2dp'\sqrt{1 + p'^2} = 2p'dp'(1 + \frac{1}{p'^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatze und integrirt die einzelnen Glieder, so findet man:

$$\Delta p' = 1.19314718 + lp' + p'^2 + \frac{1}{8p'^2} - \frac{1}{32p'^4} + \frac{5}{384p'^6} - \frac{3}{1024p'^8} + \ldots,$$

$$L + \Delta p' = L + 1.1931 + lp' + p'^2 + \frac{1}{8p'^2} - \ldots.$$

Hat nun p' einen sehr grossen Werth, so übertrifft das Quadrat davon alle anderen Glieder dieser Reihe in einem solchen Grade, dass man näherungsweise setzen kann:

$$L + \Delta p' = p'^2,$$

denn auch der Logarithmus einer grossen Zahl ist gegen diese, und umsomehr gegen ihr Quadrat vielmals kleiner.

Integrirt man nun die Gleichungen:

$$dx' = \frac{1}{b}\frac{dp'}{p'^2}, \quad dy' = \frac{1}{b}\frac{dp'}{p'}$$

von einem gewissen Punkte N (Taf. V. Fig. 2.) an, dessen Coordinaten ξ und η sein mögen, so findet man:

$$x' - \xi = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{p'}\right), \quad y' - \eta = \frac{1}{b} l \frac{p'}{\pi},$$

wo π dem Werthe von p' im Punkte N entspricht.

Digitized by Google

Die zweite Gleichung sagt, dass y' mit p' ohne Grenzen wächst; aus der ersten erkennt man dagegen, dass x' die Grenze $\xi+\frac{1}{b\pi}$ hat. Hiernach hat die Curve diejenige Vertikale zur Asymptote, welche dem letzteren Abstand entspricht, und zwar erhält man denselben um so genauer, je grösser der Werth von π genommen wurde. Hat man also nach unserer früheren Methode die Abscisse BM eines schon ziemlich tief gelegenen Punktes N bestimmt, so dass der Tangentenwinkel δ an diesem Punkte wenig von 90^0 verschieden ist, so erhält man den Abstand der Asymptote:

$$NO' = MO = \frac{1}{b \operatorname{tg} \delta} = 2k \cot \delta.$$

§. 25.

Um die im vorigen Paragraphen angedeutete Rechnung auszuführen sei $p^0 = \operatorname{tg} \varepsilon$, $p' = \operatorname{tg} \alpha'$, $p'' = \operatorname{tg} \alpha''$, $p''' = \operatorname{tg} \alpha'''$, wo $p' > p^0$, $p'' > p'$, u. s. f. Dabei ist es zweckmässig, die ersten Werthe von p langsam, die späteren rascher wachsen zu lassen. Der letzte Werth von p sei gleich π, also $\operatorname{tg} \delta = \pi$, wo δ jedenfalls ein Winkel, der nur wenig kleiner als 90^0. Nach dem Früheren haben wir die Formeln:

$$\log u' = 9.58406 + \log [\log \frac{L + \varDelta p'}{L + \varDelta p^0}],$$

$$\operatorname{tg} \varkappa' = \tfrac{1}{2}(p' + p^0) - \tfrac{1}{2}(p' - p^0) u',$$

$$a' = 6k \frac{u' \cos \varkappa'}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha' - \varkappa') \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varkappa' - \varepsilon)]},$$

$$\log u'' = 9.58406 + \log [\log \frac{L + \varDelta p''}{L + \varDelta p'}],$$

$$\log \operatorname{tg} \varkappa'' = \tfrac{1}{2}(p'' + p') - \tfrac{1}{2}(p'' - p') u'',$$

$$a'' = 6k \frac{u'' \cos \varkappa''}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha'' - \varkappa'') \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varkappa'' - \alpha')}],$$

u. s. w.

$$\left. \begin{aligned} CM &= a' + a'' + a''' + \dots, \\ CO &= CM + 2k \cot \delta. \end{aligned} \right\} \quad \text{(Taf. V. Fig. 2.)}$$

Zur Anwendung hiervon wollen wir die Lage der Asymptote für die Curve mit dem Elevationswinkel von 45^0 bestimmen.

Nehmen wir hier den genaueren, in §. 23. gefundenen Werth von ε, so haben wir:

Digitized by Google

$p^0 = 1.52104$	$\varepsilon = 56^0 40' 38''$	$\varDelta p^0 = 3.9738$
$p' = 2.7$	$\alpha' = 69\ 40\ 36$	$\varDelta p' = 9.4930$
$p'' = 5.0$	$\alpha'' = 78\ 41\ 24$	$\varDelta p'' = 27.8075$
$p''' = 12.0$	$\alpha''' = 85\ 14\ 11$	$\varDelta p''' = 147.6789$
$p^{IV} = 50.0$	$\alpha^{IV} = 88\ 51\ 15.2$	$\varDelta p^{IV} = 2505.1052$
$p^{V} = 100.0$	$\alpha^{V} = 89\ 25\ 37.4$	$\varDelta p^{V} = 10005.7983$
$\pi = 200.0$	$\delta = 89\ 42\ 48.7$	$\varDelta p^{VI} = 40006.4915$

$\log u' = 8.92343$	$\varkappa' = 64^0\ 7'\ 4''$	$a' = 1090.38$
$\log u'' = 9.14517$	$\varkappa'' = 74\ 50\ 4$	$a'' = 1090.05$
$\log u''' = 9.41234$	$\varkappa''' = 82\ 29\ 58{,}5$	$a''' = 1006.70$
$\log u^{IV} = 9.66948$	$\varkappa^{IV} = 87\ 24\ 43$	$a^{IV} = 629.77$
$\log u^{V} = 9.36282$	$\varkappa^{V} = 89\ 10\ 21$	$a^{V} = 99.43$
$\log u^{VI} = 9.36275$	$\varkappa^{VI} = 89\ 35\ 10{,}4$	$a^{VI} = 49.71$
		$CM = 3966.04$
		$2k \cot\delta = 49.76$
		$CO = 4015{,}80.$

Hätte man für δ einen kleineren Werth genommen, so würde man CO weniger genau gefunden haben; um dies besser zu beurtheilen, setzen wir zuerst:

$$\delta = \alpha', \quad CM = a', \quad CO = a' + 2k \cot\alpha'.$$

Genauer fände sich schon CO durch die folgende Rechnung:

$$\delta = \alpha'', \quad CM = a' + a'', \quad CO = CM + 2k \cot\alpha'', \text{ u. s. f.}$$

Wir können hiernach die folgende Tabelle bilden:

δ	CM	$2k \cot\delta$	CO
α'	1090.38	3686.28	4776.66
α''	2180.43	1990.60	4171.03
α'''	3187.13	829.42	4016.55
α^{IV}	3816.90	199.06	4015.96
α^{V}	3916.33	99.53	4015.86
α^{VI}	3966.04	49.76	4015.80

Hiernach findet sich, wenn δ beträchtlich kleiner als 90^0, der Werth von CO zu gross; dagegen nähert man sich ziemlich schnell dem richtigen Werthe, wenn man δ gehörig vergrössert.

Digitized by Google

§. 26.

Asymptote des aufsteigenden Astes.

Die Curve AP (Taf. V. Fig. 3.) kann man sich nach abwärts in der Weise fortgesetzt denken, als wenn der geworfene Körper seine Bewegung von einem tiefergelegenen Punkte Q mit einer solchen Geschwindigkeit und unter solcher Elevation begonnen habe, dass er, im Punkt A angekommen, die Geschwindigkeit V besitzt und die Richtung der Bewegung hier mit dem Horizont den Winkel α bildet. Um diesen Theil durch Punkte zu konstruiren, hat man in den Gleichungen

$$bdx = -\frac{dp}{L - \Delta p}, \quad bdy = -\frac{pdp}{L - \Delta p}$$

für p Werthe zu setzen, die grösser sind als $\operatorname{tg}\alpha$. Da nun $L = \frac{g}{bV^2\cos^2\alpha} + \Delta\operatorname{tg}\alpha$, so gibt es jederzeit einen spitzen Winkel β, der grösser als α und ausserdem so beschaffen ist, dass für $p = \operatorname{tg}\beta$ die Nenner in den beiden Differentialgleichungen zu Null werden. Diesen Werth von β erhält man durch Auflösung der Gleichung $L - \Delta\operatorname{tg}\beta = 0$.

Aus dem Werthe von dp, mag man ihn aus der ersten oder zweiten der obigen Gleichungen ableiten, ersieht man, dass bei unendlicher Zunahme von x und y (vom Zeichen abgesehen) die Grösse p aufhört zu wachsen, wenn sie sich unendlich wenig von $\operatorname{tg}\beta$ unterscheidet. Es kann daher p den Werth $\operatorname{tg}\beta$ niemals überschreiten und selbst nicht einmal erreichen, woraus folgt, dass der Ast AQ eine Asymptote RS hat, welche mit der Horizontalen AC den Winkel β bildet.

Vermittelst unserer Tafel I. lässt sich der Winkel β sehr einfach bestimmen, denn nach der Gleichung $\Delta\operatorname{tg}\beta = L$ geht man mit dem Werthe von L in die durch Δp bezeichnete Spalte, entnimmt das zugehörige p, welches also gleich $\operatorname{tg}\beta$ sein muss.

Für die erste der früher berechneten Wurflinien war

$$\alpha = 15^0, \quad L = 1.7051.$$

Man erhält:

$$\operatorname{tg}\beta = 0.7796 \quad \text{und} \quad \beta = 37^0\,56'\,22''.$$

Beim zweiten Beispiel war:

$$\alpha = 45^0, \quad L = 4.4653, \quad \operatorname{tg}\beta = 1.6517 \quad \text{und} \quad \beta = 58^0\,48'\,28''.$$

Digitized by Google

Um die Lage der Asymptote festzusetzen, sei AT (Taf. V. Fig. 3.) rechtwinklig zu dieser und durch irgend einen Punkt P der Curve die Linie PP' parallel zu TS gezogen, so findet sich, wenn $AP'=u$ gesetzt wird:

$$u=x\sin\beta-y\cos\beta,\quad du=dx\sin\beta-dy\cos\beta,$$

$$du=-\frac{dp\sin\beta}{b(L-\varDelta p)}+\frac{pdp\cos\beta}{b(L-\varDelta p)}=-\frac{(\operatorname{tg}\beta-p)dp\cos\beta}{b(L-\varDelta p)},$$

$$u=-\frac{\cos\beta}{b}\int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\operatorname{tg}\beta-p}{\varDelta\operatorname{tg}\beta-\varDelta p}dp,$$

$$AT=-\frac{\cos\beta}{b}\int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\beta}\frac{\operatorname{tg}\beta-p}{\varDelta\operatorname{tg}\beta-\varDelta p}dp.$$

Das negative Zeichen sagt, dass der Punkt T auf die negative Seite der u fällt; wir lassen dasselbe weg, da es uns nur auf den absoluten Werth ankommt. Setzen wir ausserdem $\operatorname{tg}\beta=P$, $\frac{1}{b}=2k$, und beachten, dass $AR=\frac{AT}{\sin\beta}$, so erhalten wir nachträglich:

$$AR=2k\cot\beta\int_p^P\frac{P-p}{\varDelta P-\varDelta p}dp=2k\cot\beta\int_p^P\frac{p-P}{\varDelta p-\varDelta P}dp.$$

§. 27.

Um die angedeutete Integration näherungsweise auszuführen, entwickeln wir den Bruch $\frac{p-P}{\varDelta p-\varDelta P}$ in eine nach den Potenzen von $(p-P)$ fortschreitende Reihe. Wir setzen $p-P=z$, $dp=dz$ und beachten, dass

$$d(\varDelta p)=2dp\sqrt{1+p^2},$$

$$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{1+(P+z)^2}=\sqrt{1+P^2}\sqrt{1+\frac{(2P+z)z}{1+P^2}},$$

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+P^2}}=1+\frac{P}{1+P^2}z+\frac{z^2}{2(1+P^2)^2}-\frac{Pz^3}{2(1+P^2)^3}+\frac{4P^2-1}{8(1+P^2)^4}z^4\ldots,$$

$$\varDelta p=2\int dp\sqrt{1+p^2}$$
$$=2\sqrt{1+P^2}\int dz\left(1+\frac{P}{1+P^2}z+\frac{z^2}{2(1+P^2)^2}-\frac{Pz^3}{2(1+P^2)^3}\ldots\right),$$

Digitized by Google

$$\frac{\Delta p}{2\sqrt{1+P^2}} = c + z + \frac{Pz^2}{2(1+P^2)} + \frac{z^3}{6(1+P^2)^2} - \frac{Pz^4}{8(1+P^2)^3} + \frac{4P^2-1}{40(1+P^2)^4}z^5 \ldots$$

Zur Bestimmung der Constanten c hat man $z=0$, wenn $p=P$, also:

$$c = \frac{\Delta P}{2\sqrt{1+P^2}},$$

$$\frac{\Delta p - \Delta P}{2\sqrt{1+P^2}(p-P)} = 1 + \frac{Pz}{2(1+P^2)} + \frac{z^2}{6(1+P^2)^2} - \frac{Pz^3}{8(1+P^2)^3} + \frac{4P^2-1}{40(1+P^2)^4}z^4 \ldots,$$

$$\frac{2\sqrt{1+P^2}(p-P)}{\Delta p - \Delta P} = 1 - \frac{Pz}{2(1+P^2)} + \frac{3P^2-2}{12(1+P^2)^2}z^2 - \frac{P(3P^2-7)}{24(1+P^2)^3}z^3 + \frac{45P^2(P^2-14)+38}{720(1+P^2)^4}z^4 \ldots,$$

$$2\sqrt{1+P^2}\int_p^P \frac{(p-P)\,dp}{\Delta p - \Delta P}$$

$$= \int_{p-P}^0 \left(dz - \frac{Pz\,dz}{2(1+P^2)} + \frac{3P^2-2}{12(1+P^2)^2}z^2 dz - \frac{P(3P^2-7)}{24(1+P^2)^3}z^3 dz + \frac{38+45P^2(P^2-14)}{720(1+P^2)^4}z^4 dz \ldots\right)$$

$$= P - p + \frac{P(P-p)^2}{4(1+P^2)} + \frac{(3P^2-2)(P-p)^3}{36(1+P^2)^2} + \frac{P(3P^2-7)(P-p)^4}{96(1+P^2)^3} + \frac{[38+45P^2(P^2-14)](P-p)^5}{3600(1+P^2)^4} \ldots$$

Da $P = \operatorname{tg}\beta$, so erhält man endlich:

$$\Delta R = k\cos\beta\cot\beta(P-p)\left[1 + \frac{\sin 2\beta}{8}(P-p) + \frac{(3P^2-2)\cos^4\beta}{36}(P-p)^2 + \frac{\sin 2\beta\cos^4\beta(3P^2-7)}{192}(P-p)^3 + \frac{(38+45P^2(P^2-14))\cos^8\beta)}{3600}(P-p)^4 \ldots\right].$$

Wenden wir diess auf die früher berechnete Wurflinie mit dem Elevationswinkel von 45° an, so ist dafür:

$$\log k = 3.69692, \quad \beta = 58^0\,48'\,28'', \quad P = 1.6517, \quad p = 1.$$

Mit diesen Werthen erhält man:

$$\Delta R = 1016.92 + 73.40 + 5.34 + 0.11 - 0.35 = 1095.42.$$

Digitized by Google

§. 28.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte Reihe für AR schreitet nach Potenzen der Differenz $(P-p)$ fort, convergirt daher nur dann sehr rasch, wenn letztere ein kleiner Bruch ist. Hat dagegen $P-p$ einen grösseren Werth, so kann man auf folgende Weise verfahren, um auch in diesem Falle eine rasch convergirende Reihe zu erhalten. Man berechnet zuerst ganz nach unserer früheren Methode die Coordinaten a', h' eines tiefer gelegenen Punktes A' (Taf. V. Fig. 3.), indem man für α' einen zwischen α und β gelegenen Werth annimmt, bestimmt sodann $A'R'$ nach der in §. 27. aufgestellten Reihe für AR, indem man darin $p' = \operatorname{tg}\alpha'$ an die Stelle von p setzt. Dann ist:

$$AR = A'R' + a' - h'\cot\beta.$$

Diese ganze Rechnung lässt sich nach folgenden Formeln ausführen:

$$p' = \operatorname{tg}\alpha',$$

$$\log u' = 9.58406 + \log[\log\frac{L-\Lambda p}{L-\Lambda p'}],$$

$$\operatorname{tg}\varkappa' = \tfrac{1}{2}(p'+p) + \tfrac{1}{2}(p'-p)u',$$

$$a' = 6k\frac{u'\cos\varkappa'}{\mathfrak{S}[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'-\varkappa')\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varkappa'-\alpha)]},$$

$$h' = a'\operatorname{tg}\varkappa',$$

$$A'R' = k\cos\beta\cot\beta(P-p')\,[1 + \frac{\sin 2\beta}{8}(P-p')$$

$$+\frac{(3P^2-2)\cos^4\beta}{36}(P-p')^2 + \frac{\sin 2\beta\cos^4\beta\,(3P^2-7)}{192}(P-p')^3\ldots],$$

$$AR = A'R' + a' - h'\cot\beta.$$

Wenden wir dies auf das Beispiel des §. 27. an und setzen, da $P = 1.6517$ und $p = 1$ ist, $p' = 1.3$, folglich:

$$\alpha' = 52^0 25' 52'', \quad \Lambda p' = 3.2106, \quad L - \Lambda p' = 1.2547.$$

Mit diesen Werthen erhält man:

$$\log u' = 8.96038, \quad \varkappa' = 49^0 19' 36'', \quad a' = 1775.14, \quad h' = 2065.70,$$

$$h'\cot\beta = 1250.66, \quad a' - h'\cot\beta = 524.48,$$

$$A'R' = 548.80 + 21.378 + 0.839 + 0.009 = 571.026,$$

$$AR = 571.03 + 524.48 = 1095.51.$$

Digitized by Google

Würde auch jetzt noch die Reihe nicht rasch genug convergiren, so könnte man für einen noch tiefer gelegenen Punkt A'' (Taf. V. Fig. 3.) die Coordinatendifferenzen mit dem Punkte A' bestimmen, indem man mit einem Tangentenwinkel α'', der zwischen α' und β liegt, die Grössen a'', h'' nach den analogen Formeln berechnet und $p'' = \operatorname{tg}\alpha''$ an die Stelle von p in der Reihe für AR setzt, wodurch man zunächst $A''R''$ erhält; dann ist:

$$AR = A''R'' + a' + a'' - (h' + h'')\cot\beta.$$

§. 29.

Gleichung der Wurflinie für einen kleinen Elevationswinkel.

Wenn α ein kleiner Winkel, so ist $\operatorname{tg}\alpha$ ein kleiner Bruch; dann wird man p^2 gegen 1 vernachlässigen können, da in dem grössten Theil der Bahnlinie (soweit sie in Betracht kommt) p kleiner ist als $\operatorname{tg}\alpha$.

Wegen $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ erhalten wir hiernach $s = x$. Die Gleichung

$$dp = -\frac{ge^{2bx}dx}{V^2\cos^2\alpha}$$

gibt durch Integration:

$$p = c - \frac{ge^{2bx}}{2bV^2\cos^2\alpha}.$$

Zur Bestimmung der Constanten ist $p = \operatorname{tg}\alpha$ für $x = 0$:

$$c = \operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2bV^2\cos^2\alpha},$$

$$p = \operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2bV^2\cos^2\alpha} - \frac{ge^{2bx}}{2bV^2\cos^2\alpha},$$

$$dy = dx\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2bV^2\cos^2\alpha}\right) - \frac{ge^{2bx}}{2bV^2\cos^2\alpha}dx,$$

$$y = c' + x\operatorname{tg}\alpha + \frac{gx}{2bV^2\cos^2\alpha} - \frac{ge^{2bx}}{4b^2V^2\cos^2\alpha};$$

für $x = 0$ ist auch $y = 0$, folglich:

$$y = \frac{g}{4b^2V^2\cos^2\alpha} + x\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2bV^2\cos^2\alpha}\right) - \frac{ge^{2bx}}{4b^2V^2\cos^2\alpha}.$$

Um auch die Zeit zu bestimmen, setzen wir in die Gleichung

$$gdt^2 = -dx\,dp$$

Digitized by Google

den obigen Werth von dp und erhalten dadurch:

$$gdt^2 = \frac{ge^{2bx}}{V^2\cos^2\alpha}dx^2 \text{ oder } dt = \frac{e^{bx}}{V\cos\alpha}dx, \quad t = c'' + \frac{e^{bx}}{bV\cos\alpha};$$

für $x=0$ ist auch $t=0$, daher:

$$t = \frac{e^{bx}-1}{bV\cos\alpha}.$$

Die Coordinaten w und H des höchsten Punktes C (Taf. V. Fig. 4.) erhält man, wenn man $p=0$, $x=w$ und $y=H$ setzt,

$$w = \frac{1}{2b}l(1+\frac{bV^2\sin 2\alpha}{g}),$$

$$H = \frac{g}{4b^2V^2\cos^2\alpha} + w(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2bV^2\cos^2\alpha}) - \frac{1}{2b}(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2bV^2\cos^2\alpha}).$$

Da $\frac{1}{2b}=k$ und $lz = \frac{1}{M}\log z$, so findet sich:

$$w = \frac{k}{M}\log(1+\frac{V^2\sin 2\alpha}{2kg}),$$

$$H = (w-k)\operatorname{tg}\alpha + \frac{kgw}{V^2\cos^2\alpha}.$$

Zur Berechnung der Wurfweite $AD=W$ bestimmen wir zunächst wieder $QD=w_1$, und denken uns, der geworfene Körper beginne seine Bewegung in C nach horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit $V_1 = \sqrt{\frac{g}{bL}} = \sqrt{\frac{2kg}{L}}$. Wir setzen daher in der Gleichung der Curve $\alpha=0$ und geben y das negative Zeichen, damit in dem niedersteigenden Ast die positive Richtung der Ordinaten nach abwärts geht. Dadurch wird:

$$-y = \frac{g}{4b^2V_1^2} + \frac{gx}{2bV_1^2} - \frac{ge^{2bx}}{4b^2V_1^2}.$$

Macht man $x=w_1$, $y=H$, $\frac{1}{2b}=k$, so erhält man:

$$e^{\frac{w_1}{k}} - \frac{w_1}{k} = 1 + \frac{V_1^2H}{k^2g}.$$

Um hieraus w_1 abzuleiten, entwickelt man die Potenzialgrösse in eine Reihe, wodurch sich findet:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{k}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{w_1}{k}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{w_1}{k}\right)^4 + \frac{1}{120}\left(\frac{w_1}{k}\right)^5 \ldots = \frac{V_1^2H}{k^2g}.$$

Digitized by Google

Durch Umkehren dieser Reihe wird:

$$w_1 = V_1\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{V_1^2 H}{3kg} + \frac{V_1^3 H}{18k^2 g}\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{4}{15k}\left(\frac{V_1^2 H}{3kg}\right)^2.$$

Versteht man unter T die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens ACD (Taf. V. Fig. 4.), so hat man nun folgende Gleichungen zur Berechnung der verschiedenen Grössen:

$$\log w = 0{,}36222 + \log k + \log\left[\log\left(1 + \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2kg}\right)\right],$$

$$H = (w - k)\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{kgw}{V^2 \cos^2\alpha},$$

$$w_1 = 2\left(\frac{kH}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2H}{3L} + \frac{2}{9k^2}\left(\frac{kH}{L}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15k}\left(\frac{2H}{3L}\right)^2 \ldots,$$

$$W = w + w_1,$$

$$T = \frac{2k}{V\cos\alpha}\left(e^{\frac{W}{2k}} - 1\right).$$

Beispiel.

$$\alpha = 15^0, \quad V = 300^m, \quad k = 4976{,}40,$$

$$\log\frac{V^2\sin 2\alpha}{2kg} = 9.66359, \quad \log\left(1 + \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2kg}\right) = 0.16462,$$

$$\log w = 3.27562, \quad w = 1886.34,$$

$$H = -827.98 + 1096.70 = 268.72,$$

$$w_1 = 1771.20 - 105.06 + 6.23 - 0.59 = 1671.78,$$

$$W = 1886.34 + 1671.78 = 3558.12,$$

$$\log e^{\frac{W}{2k}} = 0.15526, \quad \log e^{\frac{W}{2k}} - 1) = 9.63320,$$

$$\log T = 1.16909, \quad T = 14.760.$$

Früher (§. 13. und §. 14.) fanden wir die genaueren Werthe:

$$w = 1880.53, \quad H = 268.00, \quad w_1 = 1669.45,$$
$$W = 3549.98, \quad T = 14.757.$$

§. 30.

Vermittelst der in §. 29. entwickelten Gleichung der Wurflinie lässt sich nun folgende Aufgabe lösen:

Welche Elevation (α) muss man einem Geschütz geben, um

Digitized by Google

bei einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit (V) des Geschosses einen bestimmten Punkt M zu treffen?

Sind m, n die Coordinaten des Punktes M (Taf. V. Fig. 4.), so haben wir zur Bestimmung von α die Gleichung:

$$n = \frac{g}{4b^2V^2\cos^2\alpha} + (\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2bV^2\cos^2\alpha})m - \frac{ge^{2bm}}{4b^2V^2\cos^2\alpha},$$

$$n = \frac{g}{4b^2V^2} \cdot \frac{1+2bm-e^{2bm}}{\cos^2\alpha} + m\operatorname{tg}\alpha,$$

$$n = m\operatorname{tg}\alpha - \frac{k^2g}{V^2}(e^{\frac{m}{k}} - 1 - \frac{m}{k})(1+\operatorname{tg}^2\alpha).$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$q = \frac{k^2g}{V^2}(e^{\frac{m}{k}} - 1 - \frac{m}{k}),$$

$$q\operatorname{tg}^2\alpha - m\operatorname{tg}\alpha + n + q = 0.$$

Diese quadratische Gleichung wird am leichtesten aufgelöst, wenn man die beiden Hülfswinkel $\varkappa$ und θ berechnet:

$$\operatorname{tg}\varkappa = \frac{n}{m}, \quad \sin\theta = \frac{2q+n}{m}\cos\varkappa.$$

Dann ist:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\varkappa + \theta).$$

Man findet noch einen Werth für α aus der Gleichung, nämlich:

$$\alpha_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\theta - \varkappa).$$

Nun gibt es wohl eine Wurflinie mit grösserem Elevationswinkel, die durch den gegebenen Punkt M führt; allein α_1 wird sehr von dem richtigen Werthe dieses Winkels abweichen, da die Gleichung, aus welcher er abgeleitet wurde, nur bei kleinen Elevationswinkeln näherungsweise richtig ist.

Beispiel.

$$V = 300^m, \quad \log k = 3.69692,$$

$$m = 3239.73, \quad n = 94.24.$$

Die in der Formel für q vorkommende Potentialgrösse $e^{\frac{m}{k}}$ berechnet man am Bequemsten nach der Formel:

$$\log e^{\frac{m}{k}} = \operatorname{num}\log(9.63778 + \log\frac{m}{k}),$$

$$\log\frac{m}{k} = 9.81359, \quad \log e^{\frac{m}{k}} = 0.28273,$$

$$e^{\frac{m}{k}} - 1 - \frac{m}{k} = 0.26648, \quad \log\frac{k^2 g}{V^2} = 3.43127,$$

$$\log q = 2.85693, \quad q = 719.33, \quad 2q + n = 1532.90,$$

$$\log \operatorname{tg} \varkappa = 8.46373, \quad \log \sin\theta = 9.67482,$$

$$\varkappa = 1^0 39' 58'', \quad \theta = 28^0 13' 36'',$$

$$\alpha = \frac{29^0 53' 34''}{2} = 14^0 56' 47''.$$

Man hätte hier $\alpha = 15^0$ finden müssen, da die hier angegebenen Werthe von m und n die Coordinaten eines Punktes der Curve mit dem Elevationswinkel von 15^0 (§. 16.) sind. Eine genauere Uebereinstimmung durfte freilich nicht erwartet werden, da die hier gebrauchte Gleichung der Curve nicht streng richtig ist. Doch sieht man immerhin, dass für kleine Elevationen die hier gegebene Methode sehr wohl gebraucht werden kann.

§. 31.

Soll der Elevationswinkel, unter welchem das Geschütz aufzurichten ist, um einen bestimmten Punkt zu treffen, genauer bestimmt werden, so kann man in folgender Weise verfahren.

Zunächst berechnet man mit Zugrundelegung des nach §. 30. erhaltenen Näherungswerthes von α, der durch α^0 bezeichnet werden mag, nach den Formeln von §. 10. oder §. 11. die Coordinaten $AB = w$ und $BE = H$ (Taf. V. Fig. 5.) des höchsten Punktes E, bestimmt sodann einen Näherungswerth des Tangentenwinkels η in dem Punkte M, dessen Abscisse $AN = m$, nach der Formel (§. 8. Gleich. 57)):

$$\operatorname{tg}\eta = L\frac{m-w}{2k}\left(1 + \frac{m-w}{2k} + \frac{2}{3}\left(\frac{m-w}{2k}\right)^2\right).$$

Mit diesem Werth von η bestimmt man die Dimensionen Ef und Mf (§. 10. oder §. 11.), berechnet ferner die Grössen ω, ζ und n^0 nach den Formeln:

$$\omega = m - (w + Mf),$$

$$\zeta = \omega \operatorname{tg}\eta + \frac{L + \varDelta(\operatorname{tg}\eta)}{4k}\omega^2,$$

$$n^0 = H - (\zeta + Ef);$$

Digitized by Google

n^0 ist die Ordinate des Punktes M. Wegen des fehlerhaften Werthes α^0, mit dem die Rechnung geführt wurde, kann natürlich n^0 mit n nicht übereinstimmen. Wiederholt man jetzt die ganze Rechnung mit einem etwas veränderten Werthe α' (wo z. B. $\alpha'-\alpha^0$ gleich 5 oder 10 Minuten), so erhält man auch andere Werthe w', H', η', $M'f$, $E'f'$, ω', ζ' und n'; der richtige Werth von α findet sich dann wie folgt:

$$\alpha = \alpha^0 + \frac{n-n^0}{n'-n^0}(\alpha'-\alpha^0).$$

Zur Anwendung auf das Beispiel des §. 30. nehmen wir $\alpha^0 = 14^0 57'$ und erhalten:

$$L = 1.7025, \quad w = 1875.74, \quad H = 266.356, \quad \eta = 15^0 0' 20'',$$
$$Mf = 1362.13, \quad Ef = 174.248, \quad \omega = 1.86, \quad \zeta = 0.499,$$
$$n^0 = 91.609.$$

Da $n^0 < n$, so ist $\alpha' > \alpha^0$ zu nehmen. Wir setzen:

$$\alpha' = 15^0 7', \quad L' = 1.7108, \quad w' = 1891.34, \quad H' = 271.850,$$
$$\eta' = 14^0 53' 47'', \quad M'f' = 1346.50, \quad E'f' = 170.930, \quad \omega' = 1.89,$$
$$\zeta' = 0.498, \quad n' = 100.422,$$
$$\alpha = \alpha^0 + \frac{2.631}{8.831} \cdot 10' = 14^0 59' 59''.$$

Digitized by Google

XXVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

In **Paul Halcken's „Mathematischem Sinnen-Confect"** kommen Aufgaben vor wie die folgenden:

1. Man hat zwo quadratische *aequationes* algestaltet:

$$ax^2 + bx = 4a + b + c,$$
$$ax^2 = cx + \tfrac{1}{4}a + 4b + 2c.$$

Wann man die beyden wahren *Radices* mit einander multipliciret, kommt 20. So nun sind $2a + 5 = 4\tfrac{1}{2}b$, und c ist 5 mehr als b. Wird gefragt, was es für *aequationes* seyn?

$$\text{Fac.}\quad 1\tfrac{1}{4}x^2 + 1\tfrac{2}{3}x = 13\tfrac{1}{3},$$
$$1\tfrac{1}{4}x^2 = 6\tfrac{2}{3}x + 20\tfrac{5}{16}.$$

2. Zwo *aequationes*: $\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ y^2 + cy + d = 0 \end{cases}$. Die Summa von a, b, c, d thut 38, und stehen diese vier Zahlen in einer auffsteigenden arithmetischen Progression; Die Summa aber beider *Radicum* $x + y$ thut 10. Welche sind die *aequationes*?

$$\text{Facit.}\quad x^2 + 8x + 9 = 0,$$
$$y^2 + 10y + 11 = 0.$$

3. Abermal sind 2 *aequationes*: $\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ y^2 + cy + d = 0 \end{cases}$. Die Summa von a, b, c, d thut 70. Die Summa von $a + c$ ist eben so viel als die Differenz von $b - a$, und die Summa von $b + c$ ist so viel als die Differenz von $d - c$, und die Summa beyder *Radicum* $x + y$ thut so viel als das Quadrat von c. Welche sind die *aequationes*?

$$\text{Facit.}\quad x^2 + 10x + 24 = 0,$$
$$y^2 + 4y + 32 = 0.$$

Wie sind diese Aufgaben zu lösen?

XXVIII.

Miscellen.

Schreiben des Lehrers Herrn M. Curtze am Gymnasium in Thorn an den Herausgeber.

Von den im Archiv. Thl. XLVII. Hft. 1. S. 117. mitgetheilten Sätzen finde ich den letzten in etwas verallgemeinerter Gestalt aus einer Abhandlung Maclaurin's *) entlehnt in Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven S. 68., Lehrsatz XIII. folgendermassen ausgesprochen:

> **Lehrsatz:** Ist ein vollständiges Vierseit einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben, so schneiden sich die Tangenten der Curve durch zwei gegenüberliegende Scheitel in einem Punkte der Curve.

Der Satz wird in Lehrsatz XIV von Cremona dahin erweitert, dass die so entstehenden drei Tangenten-Durchschnittspunkte (Tangentialpunkte) in einer Geraden liegen. Lässt man die Curve dritten Grades aus einem Kegelschnitt und der Geraden zusammengesetzt sein, welche die beiden letzten Ecken des vollständigen Vierseits verbindet, so ist diese Gerade die Tangente in jedem dieser beiden Gegeneckpunkte, und es müssen also die beiden andern Tangenten-Durchschnittspunkte auf jener Verbindungsgeraden liegen.

Will man den Satz in der Fassung beweisen, wie Sie ihn gestellt haben, so würde das leicht durch Zurückgehen auf das

*) Maclaurin, Ueber die Curven der dritten Ordnung, übersetzt von Jonquières: Mélanger de Géométrie pure p. 237.

Digitized by Google

Paskal'sche Theorem geschehen können. Es sei zunächst ein Sechseck 123456 gegeben, eingeschrieben in einen Kegelschnitt. Dann schneiden sich die Geradenpaare 12, 45; 23, 56; 34, 61 in drei Punkten in gerader Linie. Dieselben seien bezüglich 7, 8, 9. Lässt man nun die Punkte 3, 4 und 6, 1 auf dem Kegelschnitte sich bis zum Zusammenfallen nähern, so gehen die Sehnen 34 und 61 in die Tangenten in den Punkten 1 und 3 über, der Punkt 9 aber bleibt stets, also auch für den Grenzfall, mit 7 und 8 in gerader Linie. Da man ein Viereck auf doppelte Weise durch Zusammenziehen zweier Gegenseiten eines Sechsecks zu je zwei Punkten entstanden denken kann, so erhalten wir auch zwei Punkte 9, die mit 7 und 8 in gerader Linie liegen.

Der erste Satz, der eine hübsche Erweiterung eines bekannten Theorems enthält, lässt sich ebenso wie dieses beweisen.

Fällt man nämlich in der Figur *) noch $CE \perp AB$, so hat man in dem spitzwinkligen Dreiecke ACD:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AD}.\overline{DE}, \quad \ldots\ldots (1)$$

und in dem stumpfwinkligen Dreieck CDB:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{BD}.\overline{DE}. \quad \ldots\ldots (2)$$

Multiplicirt man (1) mit m, (2) mit n und addirt, so erhält man, weil wegen $m.\overline{AD} = n.\overline{BD}$ die doppelten Producte sich heben:

$$m.\overline{AC}^2 + n.\overline{BC}^2 = (m+n).\overline{CD}^2 + m.\overline{AD}^2 + n.\overline{BD}^2.$$

Schreibt man hier noch für $m.\overline{AD}$ und $n.\overline{BD}$ bezüglich $n.\overline{BD}$ und $m.\overline{AD}$, so erhält man augenblicklich:

$$m.\overline{AC}^2 + n.\overline{BC}^2 = (m+n)(\overline{CD}^2 + \overline{AD}.\overline{BD}). \quad \ldots (3)$$

Liegt der Punkt D auf der Verlängerung von AB, dann sind beide Dreiecke ACD und BCD bei D entweder spitzwinklig oder beide stumpfwinklig und die Formel (3) geht dann über in:

$$m.\overline{AC}^2 - n.\overline{BC}^2 = (m-n)(\overline{CD}^2 - AD.BD). \quad \ldots (4)$$

Der Satz lässt sich also ganz allgemein so aussprechen:

Nimmt man auf der einen Seite eines Dreiecks AB einen Punkt D so an, dass $AD:BD = n:m$, so ist:

---

*) Die Figur wird sich Jeder leicht selbst ergänzen. Auf Taf. III. Fig. 2. ist nur Dreieck ACD spitzwinklig anzunehmen, und von C auf AB das Perpendikel CE zu fällen.

Digitized by Google

$$m.\overline{AC}^2 \pm n.\overline{BC}^2 = (m \pm n)(\overline{CD}^2 \pm AD.BD),$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem D zwischen A und B oder auf den Verlängerungen von A, B liegt.

Um endlich den zweiten Satz zu beweisen, fälle man in der Figur noch die Senkrechten AR, BS, CT, so hat man nur nachzuweisen, dass

$$FA:FB:FC = AR:BS:CT.$$

Nun verhält sich $AR:BS = MA:MB$, und weil AFB durch FD halbirt ist, wenn man D an den Durchschnitt mit AB setzt, $AF:BF = AD:BD$. Weil MFD aber ein rechter Winkel ist, so sind die Strahlen FB, FD, FA, FM harmonische, und folglich ist $AD:BD = MA:MB$, woraus endlich folgt:

$$AF:BF = AR:BS.$$

Ebenso zeigt man mit Hilfe der Dreiecke NCT und FBC, dass

$$BF:FC = BS:CT$$

ist, und man hat also $FA:FB:FC = AR:BS:CT$, also ist MN die Directrix des Kegelschnittes durch A, B, C, dessen Brennpunkt F ist.

Bemerkungen über eine merkwürdige Blitzröhre und über Fluorescenz.

Von Herrn Professor T. Hoh am Lyceum in Bamberg.

1) Ein mannigfachen Schaden stiftender Blitzschlag, welcher am 24. Juni d. J. ein Haus bei Forchheim in Bayern traf, gab unter höchst eigentümlichen Verhältnissen zur Bildung einer Blitzröhre Veranlassung. Dieselbe, ungefähr zwei Fuss lang, zwischen 2 und 6 Linien (Par.) im Lichten wechselnd, und von der Wanddicke eines starken Papieres, abgeplattet cylindrisch mit unregelmässigen seitlichen Ausbuchtungen, stellenweise gekrümmt oder gebogen, innen glänzend glatt durch Schmelzung verglast, aussen durch die fest verklebten Sandkörner rauh, ward nach mir gewordener genauer und sicherer Berichterstattung auf dem Zimmerboden gefunden zwischen der Stelle, welche der Blitz von der Wand abspringend getroffen zu haben schien, bis zu einem Loch in der vorderen Hausmauer, durch welches er das

Gebäude verliess. Das Material des Gebildes, von welchem ein zolllanges Bruchstück in meinem Besitz ist und bereits von mehreren Gelehrten als ächtes elektrisches Erzeugniss durch Augenschein anerkannt ward, ist der aus Feldspatverwitterung entstandene, Kaolin und Quarzhaltige weisse Sand, wie er in dortiger Gegend zum Bestreuen der Bodenbretter benutzt wird.

2) Die für die Physik im Allgemeinen so unerspriesslichen Untersuchungen Goethe's über „Farbenlehre" enthalten eine wohl wenig bekannte Beobachtung über das erst 1852 durch Stokes in die Wissenschaft eingeführte, allerdings schon von Brewster als „innere Dispersion" und von Herschel als „epipolisirtes Licht" *) in Erfahrung gebrachte Phänomen der Fluorescenz, welche freilich nur rein äusserlich, aber zutreffend folgendermassen geschildert wird: „Man nehme einen Streifen frischer Rinde von der Rosskastanie, man stecke denselben in ein Glas Wasser und in der kürzesten Zeit werden wir das vollkommenste Himmelblau entstehen sehen, da, wo das von vorn erleuchtete Glas auf dunklen Grund gestellt ist, hingegen das schönste Gelb, wenn wir es gegen das Licht halten." — Zu Vorlesungsversuchen über Fluorescenz finde ich, nebenbemerkt, das gewöhnliche Petroleum höchst passend.

Summirung einer Reihe.

Von dem Herausgeber.

Entwickelt man, unter der Voraussetzung, dass n eine positive ganze Zahl ist, die Potenz $(1-x)^n$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so erhält man, die Binomial-Coefficienten auf gewöhnliche Weise bezeichnend, sogleich:

$$\int x(1-x)^n \partial x = \frac{x^2}{2} - n_1 \cdot \frac{x^3}{3} + n_2 \cdot \frac{x^4}{4} - n_3 \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots,$$

also auch:

$$\int_0^x x(1-x)^n \partial x = \frac{x^2}{2} - n_1 \cdot \frac{x^3}{3} - n_2 \cdot \frac{x^4}{4} - n_3 \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Nach der bekannten allgemeinsten Reductions-Formel der Integralrechnung ist aber:

$$\int x(1-x)^n \partial x = x\int(1-x)^n \partial x - \int \partial x \int (1-x)^n \partial x$$

$$= -\frac{x(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int(1-x)^{n+1}\partial x = -\frac{x(1-x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

Digitized by Google

und folglich:

$$\int_0^x x(1-x)^n \partial x = -\frac{x(1-x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= -\frac{x(1-x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)},$$

oder auch:

$$\int_0^x x(1-x)^n \partial x = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{(1-x)^{n+1}\{(n+1)x+1\}}{(n+1)(n+2)}.$$

Durch Vergleichung der beiden vorher gefundenen Ausdrücke des bestimmten Integrals

$$\int_0^x x(1-x)^n \partial x$$

erhält man die folgende Summation:

$$\frac{x^2}{2} - n_1 \cdot \frac{x^3}{3} + n_2 \cdot \frac{x^4}{4} - n_3 \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{(1-x)^{n+1}\{(n+1)x+1\}}{(n+1)(n+2)}.$$

Für $x=2$ erhält man hieraus, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\frac{2^2}{2} - n_1 \cdot \frac{2^3}{3} + n_2 \cdot \frac{2^4}{4} - n_3 \cdot \frac{2^5}{5} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1},$$

also

$$1 - n_1 \cdot \frac{2^2}{3} + n_2 \cdot \frac{2^3}{4} - n_3 \cdot \frac{2^4}{5} + \ldots. = \frac{1}{n+1},$$

und folglich:

$$n_1 \cdot \frac{2^2}{3} - n_2 \cdot \frac{2^3}{4} + n_3 \cdot \frac{2^4}{5} - n_4 \cdot \frac{2^5}{6} + \ldots. = \frac{n}{n+1}.$$

Wenn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so ist:

$$\frac{2^2}{2} - n_1 \cdot \frac{2^3}{3} + n_2 \cdot \frac{2^4}{4} - n_3 \cdot \frac{2^5}{5} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{n+2},$$

also:

Digitized by Google

$$1-n_1\cdot\frac{2^2}{3}+n_2\cdot\frac{2^3}{4}-n_3\cdot\frac{2^4}{5}+\ldots.=-\frac{1}{n+2},$$

und folglich:

$$n_1\cdot\frac{2^2}{3}-n_2\cdot\frac{2^3}{4}+n_3\cdot\frac{2^4}{5}-n_4\cdot\frac{2^5}{6}+\ldots.=\frac{n+3}{n+2}.$$

Wenn n eine ungerade, also $n-1$ eine gerade Zahl ist, ist nach dem Obigen:

$$(n-1)_1\cdot\frac{2^2}{3}-(n-1)_2\cdot\frac{2^3}{4}+(n-1)_3\cdot\frac{2^4}{5}-(n-1)_4\cdot\frac{2^5}{6}+\ldots.=\frac{n-1}{n}.$$

Wenn n eine gerade, also $n-1$ eine ungerade Zahl ist, ist nach dem Obigen:

$$(n-1)_1\cdot\frac{2^2}{3}-(n-1)_2\cdot\frac{2^3}{4}+(n-1)_3\cdot\frac{2^4}{5}-(n-1)_4\cdot\frac{2^5}{6}+\ldots.=\frac{n+2}{n+1}.$$

Diese letzte Gleichung hat der Rev. Herr J. Blissard in Hampstead Norris, Berks, in dem Journal „The Educational Times. August. 1867. p. 112." ohne Beweis gegeben; aus dem Vorhergehenden sieht man, dass dieselbe ein besonderer Fall einer allgemeineren Gleichung ist.

Summirung einer Reihe von Kreisbogen.

Von dem Herausgeber.

Die Tangente der Bogendifferenz:

$$\operatorname{Arctang}\frac{1}{m-1}-\operatorname{Arctang}\frac{1}{m+1}$$

ist bekanntlich:

$$\frac{\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}}{1+\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{m+1}}=\frac{2}{m^2};$$

ist also $m-1$ positiv, und man nimmt die Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so ist offenbar:

$$\operatorname{Arctang}\frac{1}{m-1}-\operatorname{Arctang}\frac{1}{m+1}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{m^2}.$$

Für $m=2, 3, 4, 5, \ldots, m$ erhält man hieraus, die Bogen immer zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ nehmend, die folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{1}-\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{3}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{2^2},$$

$$\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{2}-\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{4}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{3^2},$$

$$\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{3}-\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{5}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{4^2},$$

$$\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{4}-\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{6}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{5^2},$$

u. s. w.

$$\operatorname{Arctang}\frac{1}{m-3}-\operatorname{Arctang}\frac{1}{m-1}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{(m-2)^2},$$

$$\operatorname{Arctang}\frac{1}{m-2}-\operatorname{Arctang}\frac{1}{m}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{(m-1)^2},$$

$$\operatorname{Arctang}\frac{1}{m-1}-\operatorname{Arctang}\frac{1}{m+1}=\operatorname{Arctang}\frac{2}{m^2}.$$

Addirt man diese Gleichungen und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man:

$$\operatorname{Arctang}\frac{2}{2^2}+\operatorname{Arctang}\frac{2}{3^2}+\operatorname{Arctang}\frac{2}{4^2}+\ldots+\operatorname{Arctang}\frac{2}{m^2}$$

$$=\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{1}+\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{2}-\operatorname{Arctang}\frac{1}{m}-\operatorname{Arctang}\frac{1}{m+1};$$

und lässt man nun m in's Unendliche wachsen, so ist:

$$\operatorname{Lim}\operatorname{Arctang}\frac{1}{m}=0,\quad \operatorname{Lim}\operatorname{Arctang}\frac{1}{m+1}=0;$$

also:

$$\operatorname{Lim}\left(\operatorname{Arctang}\frac{2}{2^2}+\operatorname{Arctang}\frac{2}{3^2}+\operatorname{Arctang}\frac{2}{4^2}+\ldots+\operatorname{Arctang}\frac{2}{m^2}\right)$$

$$=\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{1}+\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{2},$$

folglich:

$$\operatorname{Lim}\left(\operatorname{Arctang}\frac{2}{1^2}+\operatorname{Arctang}\frac{2}{2^2}+\operatorname{Arctang}\frac{2}{3^2}+\ldots+\operatorname{Arctang}\frac{2}{m^2}\right)$$

$$=\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{1}+\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{2}+\operatorname{Arctang}\tfrac{2}{1}$$

$$=\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{1}+\operatorname{Arctang}\tfrac{1}{2}+\operatorname{Arccot}\tfrac{1}{2}$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\pi=\tfrac{3}{4}\pi,$$

was man kürzer auf folgende Art schreiben kann:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\operatorname{Arctang}\frac{2}{m^2}=\tfrac{3}{4}\pi.$$

Diese Gleichung ist von Herrn **E. Beltrami** im **Giornale di Matematiche.** 1867. p. 189. gegeben, und im Wesentlichen auf die obige Weise von Herrn **Antonio Roiti** in **Pisa** in demselben Journal. 1867. p. 254. bewiesen.

Druckfehler in Schrön's siebenstell. Logarithmentaf.

No. 21. Taf. II. S. 313. Diff. zwischen log sin 18° 18′ 20″ und 30″ statt 837 lies 637.

XXIX.

Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten biquadratischen Gleichung.

(Zweite Abtheilung der Abhandlung Thl. XLV. Nr. II.)

Von

Herrn *Ferdinand Kerz,*

Major und Commandeur des Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt.

271.

Haben wir die gegebene Gleichung:

1) $$0 = a + by + cy^2 + dy^3 + y^4$$

zu construiren, so betrachten wir nach [131.] die Unbekannte y als veränderlich, indem wir für 1) schreiben:

2) $$z = bx + cx^2 + dx^3 + x^4,$$

und nennen die so erzeugte Curve **biquadratische Linie.** Dieselbe hat:

3) da das Glied der höchsten Potenz stets positiv bleibt, welchen Werth man auch für x setzen mag, zwei, nach der positiven Seite der Abscissen-Axe, also zwei aufsteigende, in's Unendliche sich erstreckende Aeste und kann eine oder drei Biegungen haben, von welchen im letzteren Falle zwei auswärts nach unten, und eine einwärts nach oben gerichtet sind.

Bei Construirung der biquadratischen Linie lassen wir zweckmässig das von der Unbekannten unabhängige Glied ausser Acht [133. 1)], und findet überhaupt das, in [133.] von der cubischen

Digitized by Google

Linie, Gesagte analoge Anwendung. Analoge Anwendung finden auch [134.—136.], und es lässt sich die cubische Linie schliesslich als Abscissen-Linie der biquadratischen betrachten.

Hat diese Abscissen-Linie keine Scheitel, so hat die biquadratische Linie eine Biegung, ist aber diese Abscissen-Linie mit Scheiteln versehen, so hat die biquadratische Linie drei Biegungen.

272.

Betrachtet man Gleichung [271. 2)] als Gleichung des natürlichen Anfangspunktes, indem man einen Werth von x gleich Null setzt, wodurch sich der zugehörige Werth von z ebenfalls gleich Null ergiebt, so erhält man zur Ermittelung der übrigen Durchschnittspunkte der Abscissen-Axe und biquadratischen Linie, die cubische Gleichung:

1) $$0 = b + cx + dx^2 + x^3.$$

Dieselbe hat mindestens eine reelle (negative) Wurzel, d. h. es findet mindestens noch ein Durchschnitt der natürlichen Abscissen-Axe mit der biquadratischen Linie statt, und die reelle Wurzel selbst bezeichnet die Entfernung beider Durchschnittspunkte.

Entsprechen aber

2) dieser cubischen Gleichung drei reelle (negative) Wurzeln, so schneiden sich natürliche Abscissen-Axe und biquadratische Linie im Ganzen viermal.

Bezeichnet

3) die scharf gezeichnete Curve (Taf. IX. Fig. 1.) eine biquadratische Linie, ist die mit accentuirten A beschriebene gerade Linie die Ordinaten-Axe und A^0 der natürliche Anfangspunkt, ist also

$$x = 0 = A^0$$

eine Wurzel der Gleichung, so bezeichnet, da hier offenbar die natürliche Abscissen-Axe die biquadratische Linie nur in zwei Punkten schneidet, $-A^0C^0$ die einzige reelle (negative) Wurzel der Gleichung 1).

4) Ist der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten [271. 1)] oder Veränderlichen [271. 2)], nämlich $b=0$; so ist die natürliche Abscissen-Axe selbst Tangente an eine der Biegungen der biquadratischen Linie.

Digitized by Google

273.

Legt man an die Biegung einer biquadratischen Linie eine, mit der natürlichen Abscissen-Axe parallellaufende, Tangente, so nennen wir den Berührungspunkt (wahren) Scheitelpunkt und den berührenden Theil der Curve (wahren) Scheitel.

Hat eine biquadratische Linie nur eine Biegung, so hat sie auch nur einen (wahren) Scheitelpunkt und einen (wahren) Scheitel.

Hat eine biquadratische Linie drei Biegungen, und ist man im Stande an jede der Biegungen eine, mit der natürlichen Abscissen-Axe parallellaufende, Tangente zu legen, so hat sie drei (wahre) Scheitelpunkte und drei (wahre) Scheitel, wie die scharf gezeichnete Curve (Taf. IX. Fig. 1.) nämlich einen einspringenden bei U', und zwei ausspringende bei V'' und W'''. Von den letzteren heisse derjenige, dessen Scheitel-Tangente $A''X''$ über der Scheitel-Tangente $A'''X'''$ des andern Scheitels liegt, der obere, dieser andere der untere ausspringende Scheitel.

Hat eine biquadratische Linie zwar drei Biegungen, kann man aber nur an eine derselben eine mit der natürlichen Abscissen-Axe parallele Tangente legen, so hat sie auch nur einen (wahren) Scheitel und einen (wahren) Scheitelpunkt.

Die durch die Scheitelpunkte U', V'', W''' auf die natürliche Abscissen-Axe gefällten Senkrechten U^0U', V^0V'', W^0W''' heissen in ihrer unbegrenzten Verlängerung Scheitelpunkts-Axen.

Die an die beiden ausspringenden Biegungen gemeinschaftlich gelegte Tangente C_XC^X (Taf. IX Fig. 2.) heisse schiefe Scheitel-Tangente der biquadratischen Linie, ihre bezüglichen Berührungspunkte C_X und C^X heissen falsche Scheitelpunkte. Die durch die falschen Scheitelpunkte auf die natürliche Abscissen-Axe gefällten Senkrechten heissen in ihrer unbegrenzten Verlängerung falsche Scheitelpunkts-Axen.

274.

1) Hat eine biquadratische Linie drei Scheitel, so wird sie von der wirklichen Abscissen-Axe entweder in vier Punkten, oder in zwei Punkten, oder auch gar nicht geschnitten, d. h. die gegebene Gleichung hat entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln oder sie hat vier imaginäre Wurzeln. Hat also die biquadratische Linie drei Scheitel, so liegt die Mög-

Digitized by Google

lichkeit vor, dass ihre Gleichung vier reelle Wurzeln habe. Umgekehrt, liegt die Möglichkeit vor, dass eine gegebene Gleichung vier reelle Wurzeln habe, so hat auch ihre construirte Curve drei Scheitel.

2) Hat aber eine biquadratische Linie nur einen Scheitel, so wird sie von der wirklichen Abscissen-Axe entweder in zwei Punkten, oder gar nicht geschnitten, d. h. die gegebene Gleichung hat entweder zwei reelle und zwei imaginäre, oder sie hat vier imaginäre Wurzeln. Hat also die biquadratische Linie nur einen Scheitel, so liegt auch nur die Möglichkeit vor, dass ihre Gleichung zwei reelle Wurzeln habe.

Umgekehrt, liegt nur die Möglichkeit vor, dass eine gegebene Gleichung zwei reelle Wurzeln habe, so hat auch ihre construirte Linie nur einen wahren Scheitel.

In [212.] sind die Bedingungen festgestellt, welche für die Möglichkeit, dass eine vorgelegte biquadratische Gleichung vier, oder nur zwei, reelle Wurzeln habe, bestehen, und welche daher auch für die Bestimmung gültig sind, ob die zu construirende Curve einer biquadratischen Gleichung drei oder nur einen (wahren) Scheitel habe.

Wir wollen bei den weiteren Untersuchungen vorerst eine mit drei Biegungen versehene biquadratische Linie in Betracht ziehen.

275.

Die Entfernungen: $-A'U'$, $-A''V''$, $-A'''W'''$ der bezüglichen (wahren) Scheitelpunkte U', V'', W''' von der Ordinaten-Axe A^0A''', (Taf. IX. Fig. 1.), ergeben sich für die gegebene Gleichung:

1) $$0=+by+cy^2+dy^3+y^4,$$

nach [211. 1)] aus der Gleichung:

2) $$0=+\tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{2}c.y+\tfrac{3}{4}d.y^2+y^3.$$

Indem wir in Zahlenfällen die drei Wurzel-Werthe dieser cubischen Gleichung bestimmen und sie nach und nach für y in Gleichung 1) substituiren, erhalten wir als Werth für die Entfernung der Scheitelpunkte U', V'', W''' von der natürlichen Abscissen-Axe A^0X^0, nämlich:

3) $$U^0U'=-\overset{1}{a};\quad V^0V''=-\overset{2}{a};\quad W^0W'''=-\overset{3}{a}.\quad [213.]$$

Hieraus bestimmt sich dann weiter (Taf. IX. Fig. 2.) die Entfernung

Digitized by Google

der Tangente des $\left\{\begin{array}{l}\text{einspringenden}\\ \text{einspringenden}\\ \text{oberen ausspringenden}\end{array}\right\}$ Scheitels von der Tangente des $\left\{\begin{array}{l}\text{oberen ausspringenden}\\ \text{unteren ausspringenden}\\ \text{unteren ausspringenden}\end{array}\right\}$ Scheitels, nämlich:

$$U'U'' = V'V'' = W'W'' = \overset{2}{a} - \overset{1}{a};$$
$$U'U''' = V'V''' = W'W''' = \overset{3}{a} - \overset{1}{a};$$
$$U''U''' = V''V''' = W''W''' = \overset{3}{a} - \overset{2}{a}.$$

276.

Bekanntlich ändert sich die Gestalt einer Curve nicht, wenn man jede der Wurzeln ihrer Gleichung um gleichviel vermehrt oder vermindert, sondern es erhält hierdurch nur die Ordinaten-Axe eine andere Lage. Mithin ändert sich auch die Gestalt der construirten Curve:

1) $$z = bx + cx^2 + dx^3 + x^4$$

nicht, wenn wir

2) $$-\tfrac{1}{4}d + x \text{ anstatt } x$$

schreiben.

In diesem Falle verlegt sich die Ordinaten-Axe (Taf. IX. Fig. 1.) von A^0A nach $\mathfrak{M}^0\mathfrak{M}$, also der Anfangspunkt der Coordinaten von A^0 nach $\mathfrak{M}^0$, und es ist:

3) $$\mathfrak{M}^0A^0 = +\tfrac{1}{4}d,$$

4) $$\mathfrak{M}^0\mathfrak{M} = -\frac{1}{4}bd + \frac{1}{16}cd^2 - \frac{3}{256}d^4. \qquad [220.\ 2)]$$

Setzen wir:

5) $$d = 0,$$

so wird auch die Ordinate $\mathfrak{M}^0\mathfrak{M}$ gleich Null, d. h. der Punkt $\mathfrak{M}$ der Curve wird natürlicher Anfangspunkt und die natürliche Abscissen-Axe verlegt sich von $A^0\mathfrak{M}^0$ nach $A\mathfrak{M}$.

In diesem Falle erhält die Gleichung der zu construirenden biquadratischen Linie die Form:

6) $$z = \pm bx - cx^2 + x^4, \qquad [220.\ 2)]$$

Digitized by Google

es bleibt nämlich die Bedeutung des Coefficienten der ersten Potenz der Veränderlichen zweifelhaft, und die Bedeutung des Coefficienten der zweiten Potenz ist [wegen der Voraussetzung am Schlusse von 274. und wegen 216.] negativ.

Wir wollen den natürlichen Anfangspunkt der Gleichung 6) den künstlichen Anfangspunkt nennen, die durch ihn gelegten Coordinaten-Axen heissen die künstlichen Coordinaten-Axen.

Für die Gleichung:

7) $$0 = \pm by - cy^2 + y^4$$

bezeichnet daher der künstliche Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ (Taf. IX. Fig. 2.), selbst eine Wurzel gleich Null, und die drei andern Wurzeln

$$\mp \mathfrak{M}E,\ \pm \mathfrak{M}C,\ \pm \mathfrak{M}D$$

bestimmen sich aus der cubischen Gleichung:

8) $$0 = \pm b - cy + y^3,$$ [128.]

für welche sich daher, da ihr quadratisches Glied fehlt,

9) $$\mathfrak{M}C + \mathfrak{M}D = \mathfrak{M}E$$

ergiebt.

277.

Bezeichnet man den Winkel $L\mathfrak{M}C$ (Taf. IX. Fig. 2.), welchen die an den künstlichen Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ gelegte Tangente $\mathfrak{M}L$ mit der (künstlichen) Abscissen-Axe bildet, durch φ, so ergiebt sich als Parameter dieser Geraden $\mathfrak{M}L$, aus der gegebenen Gleichung [276. 6) oder 7)] selbst:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm b,$$

daher ist diese Tangente $\mathfrak{M}L$ leicht zu construiren. Ist daher die Bedeutung des Coefficienten b der ersten Potenz der Unbekannten oder Veränderlichen $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so liegt der obere Scheitelpunkt U' auf der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite der (künstlichen) Ordinaten-Axe $\mathfrak{M}^0\mathfrak{M}$. Wir wollen bei den weiteren Untersuchungen vorläufig einen positiven Werth von b unterstellen.

278.

Schreibt man in der Gleichung:

Digitized by Google

1) $$0 = +by - cy^2 + y^4,$$

2) $$u + y \text{ anstatt } y,$$

so ergiebt sich das Schema:

3) $$0 = \left.\begin{array}{l} +bu \\ -cu^2 \\ +u^4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} +b \\ -2cu \\ +4u^3 \end{array}\right\} .y \quad \left.\begin{array}{l} -c \\ +6u^2 \end{array}\right\} .y^2 \quad +4u.y^3 + y^4.$$

Verstehen wir nun (Taf. IX. Fig. 1. und 2.) unter u die Entfernung $\mathfrak{M}U$ ($\mathfrak{M}V$, $\mathfrak{M}W$) des künstlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$ von der Scheitelpunkts-Axe U^0U' (V^0V'', W^0W'''), so verlegt sich der Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Durchschnittspunkt U (V, W) dieser Scheitelpunkts-Axe mit der künstlichen Abscissen-Axe.

Lassen wir aber zugleich in dem Schema das von der Unbekannten unabhängige Glied, die Ordinate des Anfangspunktes U (V, W), nämlich UU' (VV'' WW'''), ausser Acht, so verlegt sich der Anfangspunkt der Coordinaten nach diesem Scheitelpunkte U' (V'', W''') selbst.

In diesem Falle ist die Tangente des Anfangspunktes U' (V'', W''') zugleich Abscissen-Axe, daher muss der Parameter dieser Tangente, oder, was dasselbe ist, der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten in Schema 3) gleich Null sein, nämlich:

4) $$0 = b - 2cu + 4u^3,$$

wofür wir schreiben:

5) $$0 = \tfrac{1}{4}b - \tfrac{1}{2}c.u + u^3.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind demnach (Taf. IX. Fig. 2.)

6) $$+\mathfrak{M}U = +\overset{1}{u}, \quad +\mathfrak{M}V = +\overset{2}{u}, \quad -\mathfrak{M}W = -\overset{3}{u},$$

und es folgt, da in 5) das quadratische Glied fehlt,

7) $$\mathfrak{M}U + \mathfrak{M}V = \mathfrak{M}W, \text{ oder } \overset{1}{u} + \overset{2}{u} = \overset{3}{u}.$$

Als Gleichung der biquadratischen Linie für den Scheitelpunkt U' (V'', W''') ergiebt sich daher:

8) $$z = (-c + 6u^2).x^2 + 4u.x^3 + x^4,$$

in welchem Ausdrucke also

9) u eine der drei reellen Wurzeln: $+\overset{1}{u}$, $+\overset{2}{u}$, $-\overset{3}{u}$ der Gleichung 5) bezeichnet.

Digitized by Google

Hat man daher in Zahlenfällen den Werth von u aus 5) bestimmt, so lässt sich hiernach der Anfangspunkt der Coordinaten nach einem der Scheitelpunkte verlegen.

279.

Es sei:

1) $$z = bx + dx^3 + x^4$$

eine zu construirende Gleichung. Setzen wir in derselben für die Veränderliche x eine so kleine Grösse e, dass der Werth von e^4 in Bezug auf den Werth von de^3 vernachlässigt werden kann, so schreiben wir für 1)

2) $$z = be + de^3;$$

daher ist auch:

3) $$-z = -be - de^3.$$

Hieraus folgt:

4) Für sehr kleine, gleiche entgegengesetzte Abscissen, liefert Gleichung 1) gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten, d. h. der natürliche Anfangspunkt von Gleichung 1) ist ein Beugungspunkt der Curve. Um daher

5) den natürlichen Anfangspunkt der gegebenen Gleichung [278. 1)] nach dem Beugungspunkte der Curve zu verlegen, haben wir nur nöthig, das quadratische Glied in Schema [278. 3)] verschwindend zu machen.

Setzen wir zu dem Ende daselbst den Coefficienten des Quadrates der Unbekannten gleich Null, nämlich:

6) $$0 = -c + 6u^2,$$

so ergiebt sich:

7) $$u = \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6c},$$

in welchem Ausdrucke also u die Abscisse $\left.\begin{matrix} +\mathfrak{M}N \\ -\mathfrak{M}M \end{matrix}\right\}$ des Beugungspunktes $\left.\begin{matrix} B' \\ B_1 \end{matrix}\right\}$ (Taf. IX. Fig. 2.) bezeichnet.

Es folgt leicht weiter:

8) Die mit drei Biegungen versehene biquadratische Linie hat stets zwei Beugungspunkte.

Digitized by Google

9) Die durch die Beugungspunkte mit der Ordinaten-Axe gelegten Parallelen haben gleiche Abstände von dem künstlichen Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ und der künstlichen Ordinaten-Axe; oder es ist, die Grössen $\mathfrak{M}N$ und $\mathfrak{M}M$ in absoluter Bedeutung genommen:

$$\mathfrak{M}N = \mathfrak{M}M.$$

10) Es ist die absolute Grösse von

$$MN = \tfrac{1}{6}\sqrt{6c}.$$

280.

Ist also:

$$1)\qquad z = bx - cx^2 + x^4$$

die gegebene Gleichung, so erhält man, substituirt man in dieselbe für x den Werth von u [279. 7)]:

$$2)\qquad z = \pm\tfrac{1}{6}b\sqrt{6c} - \frac{5}{36}c^2 = \left\{\begin{matrix} NB' \\ MB_1 \end{matrix}\right\} \text{ (Taf. IX. Fig. 2.)}$$

als Ordinaten der beiden Beugungspunkte B' und B_1. Verbindet man die beiden Beugungspunkte durch eine gerade Linie $B'B_1$, so ist die Entfernung ihres Durchschnittspunktes $\mathfrak{m}$ mit der (künstlichen) Ordinaten-Axe von dem künstlichen Anfangspunkte $\mathfrak{M}$, nämlich:

$$3)\qquad \mathfrak{M}\mathfrak{m} = NB' + \tfrac{1}{2}(MB_1 - NB'),$$

oder hierfür die Werthe aus 2) substituirt:

$$4)\qquad \mathfrak{M}\mathfrak{m} = -\tfrac{5}{36}c^2,$$

daher ist die Entfernung des Durchschnittspunktes $\mathfrak{m}$ von dem Durchschnittspunkt $\mathfrak{M}^{IV}$ der Ordinaten-Axe und der, durch den unteren Beugungspunkt B_1 mit der Abscissen-Axe parallel gelegten, Geraden $A^{IV}B_1$, nämlich:

$$5)\qquad \mathfrak{m}\mathfrak{M}^{IV} = -\tfrac{1}{6}b\sqrt{6c}.$$

Aus:

$$6)\ \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{M}^{IV}}{\mathfrak{M}^{IV}B_1} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{M}^{IV}}{\mathfrak{M}M} = \frac{-\frac{1}{6}b\sqrt{6c}}{-\frac{1}{6}\sqrt{6c}} = b = \operatorname{tg}\varphi, \left\{\begin{matrix} 277.\ 1) \\ 279.\ 7) \end{matrix}\right\}$$

folgt:

$$7)\qquad \text{Winkel } \mathfrak{m}B_1\mathfrak{M}^{IV} = \text{Winkel } L\mathfrak{M}C,$$

Digitized by Google

nämlich:

$$8) \qquad \mathfrak{M}L \# B'B_1$$

d. h. die an den künstlichen Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ gelegte Tangente $\mathfrak{M}L$ ist parallel der geraden Verbindungslinie $B'B_1$ der Beugungspunkte.

9) Da die absolute Grösse der Abscissen $\mathfrak{M}N$ und $\mathfrak{M}M$ der Beugungspunkte B' und B_1 einander gleich ist [279. 9)], so folgt daraus leicht, dass die künstliche Ordinaten-Axe die gerade Verbindungslinie $B'B_1$ der Beugungspunkte halbirt, daher ist:

$$10) \qquad \mathfrak{m}B' = \mathfrak{m}B_1 = [(\mathfrak{M}M)^2 + (\mathfrak{m}\mathfrak{M}^{IV})^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \pm[\tfrac{1}{6}c + \tfrac{1}{6}c.b^2]^{\frac{1}{2}}, \quad [279.7) \text{ u. } 280.5)]$$
$$= \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{6c(1+b^2)},$$

und folglich ist die Entfernung der beiden Beugungspunkte von einander, nämlich die **Beugungslinie**:

$$B'B_1 = \tfrac{1}{3}\sqrt{6c(1+b^2)}.$$

281.

Wählt man die Tangente des künstlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$ zur Abscissen-Axe, indem man in Gleichung [280. 1)]

$$1) \qquad u.\cos\varphi \text{ anstatt } x$$

und

$$2) \qquad u.\sin\varphi + z \text{ anstatt } z$$

schreibt, so ergiebt sich:

$$3) \qquad u.\sin\varphi + z = b.\cos\varphi.u - c.\cos^2\varphi.u^2 + \cos^4\varphi.u^4,$$

oder:

$$4) \qquad z = (b.\cos\varphi - \sin\varphi).u - c.\cos^2\varphi.u^2 + \cos^4\varphi.u^4.$$

Hieraus ergiebt sich, wegen [277.]:

$$5) \qquad b = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \text{ oder } b.\cos\varphi = \sin\varphi,$$

$$6) \qquad z = -c.\cos^2\varphi.u^2 + \cos^4\varphi.u^4,$$

wofür wir, wegen

Digitized by Google

7) $$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+b^2},$$

schreiben können:

8) $$z = -\frac{c}{1+b^2}\cdot u^2 + \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot u^4.$$

Aus dieser Gleichung findet sich:

9) $$u = \{\pm\}\tfrac{1}{2}\sqrt{2(1+b^2)(c\pm\sqrt{c^2+4z})}.$$

Die Gleichungen 6) und 8) geben an, dass gleich grossen positiven und negativen Abscissen, gemessen von dem künstlichen Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ auf der an ihn gelegten Tangente, gleiche, diese Abscissenlinie unter dem Winkel φ [$\mathrm{tg}\,\varphi = b$], schneidende, Ordinaten entsprechen.

Es folgt leicht weiter:

10) Jede mit der Beugungslinie $B'B_1$, oder mit der an den künstlichen Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ gelegten Tangente $D'\mathfrak{M}D_1$, parallele Sehne $E'\mathfrak{M}^{VIII}E_1$ der biquadratischen Linie wird durch die künstliche Ordinaten-Axe $\mathfrak{M}^0\mathfrak{M}_0$ (in dem Punkte $\mathfrak{M}^{VIII}$) halbirt; es ist also:

11) der künstliche Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ stets ein Punkt der einspringenden Biegung und die künstliche Ordinaten-Axe selbst ein Durchmesser der biquadratischen Linie.

12) Die Beugungslinie $B'B_1$ selbst wird durch die künstliche Ordinaten-Axe (in dem Punkte $\mathfrak{M}$) halbirt.

13) Die schiefe Scheitel-Tangente C^XC_X läuft mit der Beugungslinie und mit der an den künstlichen Anfangspunkt gelegten Tangente parallel und wird durch die künstliche Ordinaten-Axe (in dem Punkte $\mathfrak{M}_0$) halbirt.

14) Schneidet eine mit der Tangente des künstlichen Anfangspunktes parallellaufende Sehne die biquadratische Linie in vier Punkten, so sind die Sehnen der ausspringenden Biegungen einander gleich und die Sehne der einspringenden Biegung wird durch die künstliche Ordinaten-Axe halbirt.

15) Schneidet eine mit der Tangente des künstlichen Anfangspunktes parallellaufende Sehne die biquadratische Linie in vier Punkten, so sind die Flächeninhalte der abgeschnittenen Theile der ausspringenden Biegungen einander gleich und der Flächeninhalt der nicht abgeschnittenen einspringenden Biegung wird durch die künstliche Ordinaten-Axe halbirt.

Digitized by Google

16) Schneidet eine mit der Tangente des künstlichen Anfangspunktes parallellaufende Sehne die biquadratische Linie in zwei Punkten, so wird der abgeschnittene Flächeninhalt durch die künstliche Ordinaten-Axe halbirt.

Schreibt man 0 für z in 9), so folgt:

$$17)\quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{M}D' \\ \mathfrak{M}D_1\end{matrix}\right\} = u = \pm\sqrt{c(1+b^2)},\ \text{und}\ u = \pm 0 = \mathfrak{M}.$$

282.

Schreibt man in [278. 3)]:

$$1)\qquad \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{6c}\ \text{anstatt}\ u, \qquad [279.\ 7)]$$

so geht die Gleichung [278. 1)] über in:

$$2)\quad 0 = (\pm\tfrac{1}{6}b\sqrt{6c} - \tfrac{5}{36}c^2) + (b \mp \tfrac{2}{9}c\sqrt{6c}).y \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{6c}.y^3 + y^4$$

und es verlegt sich durch diese Transformation der Anfangspunkt der Coordinaten auf der (künstlichen) Abscissen-Axe AX nach ihrem Durchschnittspunke $\left\{\begin{matrix}N \\ M\end{matrix}\right\}$ mit der Ordinate $\left\{\begin{matrix}NB' \\ MB_1\end{matrix}\right\}$ des $\left\{\begin{matrix}\text{oberen} \\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Beugungspunktes $\left\{\begin{matrix}B' \\ B_1\end{matrix}\right\}$. (Taf. IX. Fig. 2.)

Schreiben wir für 2):

$$3)\qquad z = (b \mp \tfrac{2}{9}c\sqrt{6c}).x \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{6c}.x^3 + x^4,$$

so wird der $\left\{\begin{matrix}\text{obere} \\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Beugungspunkt $\left\{\begin{matrix}B' \\ B_1\end{matrix}\right\}$ selbst natürlicher Anfangspunkt.

Bezeichnen wir nun den Winkel $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{B}B'\mathfrak{M}^{V} \\ BB_1\mathfrak{M}^{IV}\end{matrix}\right\}$, welchen die in dem $\left\{\begin{matrix}\text{oberen} \\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Beugungspunkte $\left\{\begin{matrix}B' \\ B_1\end{matrix}\right\}$ gezogene Tangente $\left\{\begin{matrix}B'\mathfrak{B} \\ B_1B\end{matrix}\right\}$ an die Curve mit der Abscissen-Axe bildet, mit $\left\{\begin{matrix}\omega' \\ \omega_1\end{matrix}\right\}$, so ist

$$4)\qquad \left.\begin{matrix}\operatorname{tg}\omega' \\ \operatorname{tg}\omega_1\end{matrix}\right\} = b \mp \tfrac{2}{9}c\sqrt{6c}.$$

Es ist aber, bezeichnet $\mathfrak{B}$ den Durchschnittspunkt der Tangente des oberen Beugungspunktes B', und B den Durchschnitts-

Digitized by Google

punkt der Tangente des unteren Beugungspunktes B_1 mit der (künstlichen) Ordinaten-Axe:

5) $$\mathfrak{B}\mathfrak{N}^{V} = +\mathfrak{N}N \,.\, \operatorname{tg}\omega' = +\tfrac{1}{6}\sqrt{6c}\,(b - \tfrac{2}{9}c\sqrt{6c}),$$

6) $$B\mathfrak{N}^{IV} = -\mathfrak{N}M \,.\, \operatorname{tg}\omega_1 = -\tfrac{1}{6}\sqrt{6c}\,(b + \tfrac{2}{9}c\sqrt{6c}),$$

oder:

7) $$\mathfrak{B}\mathfrak{N}^{V} = +\tfrac{1}{6}b\sqrt{6c} - \tfrac{2}{9}c^2 = +\mathfrak{M}\mathfrak{N}^{V} - \tfrac{2}{9}c^2,$$

8) $$B\mathfrak{N}^{IV} = -\tfrac{1}{6}b\sqrt{6c} - \tfrac{2}{9}c^2 = -\mathfrak{M}\mathfrak{N}^{IV} - \tfrac{2}{9}c^2.$$

Nun ist:

9) $$\mathfrak{B}\mathfrak{N}^{V} = +\mathfrak{M}\mathfrak{N}^{V} - \mathfrak{B}\mathfrak{M},$$

10) $$B\mathfrak{N}^{IV} = -\mathfrak{M}\mathfrak{N}^{IV} - B\mathfrak{M}.$$

Hieraus folgt:

11) $$\mathfrak{B}\mathfrak{M} = B\mathfrak{M} = \tfrac{2}{9}c^2,$$

d. h. die Tangenten der Beugungspunkte schneiden sich in einem gemeinschaftlichen Punkte, der zugleich ein Punkt der künstlichen Ordinaten-Axe ist.

Aus 11) und [280. 4)] folgt:

12) $$\mathfrak{N}\mathfrak{M} : B\mathfrak{M} = 5 : 8, \qquad [283.\ 9)]$$

daher sind die Tangenten der Beugungspunkte leicht zu construiren.

283.

Schreibt man in [281. 8)]:

1) $$v + u \text{ anstatt } u,$$

so ergiebt sich das Schema:

2)

$$\begin{array}{llll}
z = -\dfrac{1}{1+b^2}\cdot v^2 \\ \quad + \dfrac{1}{(1+b^2)^2}\cdot v^4 \end{array}\!\!\left.\right\} \begin{array}{l} -\dfrac{2c}{1+b^2}\cdot v \\ + \dfrac{4}{(1+b^2)^2}\cdot v^3 \end{array}\!\!\left.\right\}\cdot u \begin{array}{l} -\dfrac{c}{1+b^2} \\ + \dfrac{6}{(1+b^2)^2}\cdot v^2 \end{array}\!\!\left.\right\}\cdot u^2 \begin{array}{l} \\ + \dfrac{4}{(1+b^2)^2}v.u^3 \\ + \dfrac{1}{(1+b^2)^2}\cdot u^4. \end{array}$$

Verstehen wir nun (Taf. IX. Fig. 2) unter v die Entfernung $\mathfrak{M}G'$ ($\mathfrak{M}G_1$) des künstlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$ von der Ordinate des Endpunktes $C^X (C_X)$ der schiefen Scheitel-Tangente $C^X C_X$, so verlegt sich der Anfangspunkt der Coordinaten durch diese Transformation nach dem Punkte $G' (G_1)$.

Lassen wir aber in dem Schema das von der Veränderlichen u unabhängige Glied ausser Acht, so verlegt sich der Anfangspunkt der Coordinaten nach dem erwähnten Endpunkte $C^X (C_X)$ der schiefen Scheitel-Tangente selbst, und da für diesen Punkt der Coefficient der ersten Potenz der Veränderlichen gleich Null, nämlich:

$$3)\qquad 0 = -\frac{2c}{1+b^2}\cdot v + \frac{4}{(1+b^2)^2}\cdot v^3$$

sein muss, so ergiebt sich hieraus:

$$4)\qquad v = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2c(1+b^2)} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{M}G'\\ \mathfrak{M}G_1\end{matrix}\right\}.$$

Substituiren wir diesen Werth von v in Schema 2) so erhalten wir:

$$5)\qquad z = -\tfrac{1}{4}c^2 + \frac{2c}{1+b^2}\cdot u^2 \pm \frac{c}{1+b^2}\cdot\sqrt{2c(1+b^2)}\,.\,u^3 + \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot u^4$$

als Gleichung der biquadratischen Linie für den Punkt $\left\{\begin{matrix}G'\\ G_1\end{matrix}\right\}$.

Hieraus findet sich, für $u = 0$:

$$6)\qquad z = -\tfrac{1}{4}c^2 = \left\{\begin{matrix}G'C^X\\ G_1 C_X\end{matrix}\right\} = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_0,$$

und es ergiebt sich weiter, aus 5), lässt man daselbst das von der Veränderlichen u unabhängige Glied ausser Acht:

$$7)\qquad z = \frac{2c}{1+b^2}\cdot u^2 \pm \frac{c}{1+b^2}\cdot\sqrt{2c(1+b^2)}\,.\,u^3 + \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot u^4,$$

als Gleichung für den $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ falschen Scheitelpunkt $\left\{\begin{matrix}C^X\\ C_X\end{matrix}\right\}$.

Es folgt noch aus 4) und aus [281. 17)]:

$$8)\qquad \left\{\begin{matrix}\mathfrak{M}D'\\ \mathfrak{M}D_1\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\mathfrak{M}G'\\ \mathfrak{M}G_1\end{matrix}\right\} = \sqrt{2} : 1;$$

ferner aus 6) und [280. 4)]:

Digitized by Google

9) $B\mathfrak{M}_0 : \mathfrak{M}\mathfrak{M}_0 : B\mathfrak{m} : \mathfrak{M}\mathfrak{m} : \mathfrak{m}\mathfrak{M}_0 : B\mathfrak{M} = 12:9:8:5:4:3.$

Aus 6) und [281. 8)] ergiebt sich weiter als Gleichung für den Punkt $\mathfrak{M}_0$:

10) $$z = + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c}{1+b^2} \cdot u^2 + \frac{1}{(1+b^2)^2} \cdot u^4.$$

284.

Substituiren wir den Werth von $\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ aus [280. 4)] für z in [281. 8)], nämlich:

1) $$-\frac{5}{36}c^2 = -\frac{c}{1+b^2} \cdot u^2 + \frac{1}{(1+b^2)^2} \cdot u^4,$$

so ergiebt sich:

2) $$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{m}H' \\ \mathfrak{m}H_1 \end{matrix} \right\} = u = \pm \sqrt{\tfrac{5}{6}c\,(1+b^2)},$$

und

3) $$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{m}B' \\ \mathfrak{m}B_1 \end{matrix} \right\} = u = \pm \sqrt{\tfrac{1}{6}c\,(1+b^2)}.$$

Daher verhält sich:

4) $$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{m}H' \\ \mathfrak{m}H_1 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{m}B' \\ \mathfrak{m}B_1 \end{matrix} \right\} = \sqrt{5} : 1,$$

und es ist:

5) $$\left\{ \begin{matrix} B'H' = \mathfrak{m}H' - \mathfrak{m}B' \\ B_1H_1 = \mathfrak{m}H_1 - \mathfrak{m}B_1 \end{matrix} \right\} = \pm(\sqrt{5}-1)\sqrt{\tfrac{1}{6}c(1+b^2)}.$$

Aus der Vergleichung von 2) mit [281. 17)] folgt:

6) $$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{m}H' \\ \mathfrak{m}H_1 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{M}D' \\ \mathfrak{M}D_1 \end{matrix} \right\} = \sqrt{5} : \sqrt{6}.$$

Aus der Vergleichung von 5) mit [281. 17)] folgt:

7) $$\left\{ \begin{matrix} B'H' \\ B_1H_1 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{M}D' \\ \mathfrak{M}D_1 \end{matrix} \right\} = 4 : (1+\sqrt{5})\sqrt{6}.$$

u. s. w.

285.

Verstehen wir wieder in Schema [278. 3)] unter u die Ent-

Digitized by Google

fernung $\mathfrak{M}U$, $\mathfrak{M}V$, $\mathfrak{M}W$ des künstlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$ von der Scheitelpunkts-Axe U^0U', V^0V'', W^0W''' (Taf. IX. Fig. 2), so bezeichnet uns das von der Unbekannten unabhängige Glied:

1) $$z = +bu - cu^2 + u^4,$$

die Ordinate des bezüglichen Anfangspunktes, nämlich, je nach dem Werthe von u ($= \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}U$, $\mathfrak{M}V$, $\mathfrak{M}W$) die Ordinate $\mathfrak{M}$ ($=0$), UU', VV'', WW'''.

Nun folgt, für $z=0$, auch $u=0$, also auch:

2) $$0 = +b - cu + u^3.$$

Hat daher u einen solchen Werth, dass dieser cubischen Gleichung zwei gleiche Werthe entsprechen, nämlich dass

3) $$UU' = VV''$$

ist, so ergiebt sich, nach [33. 4)] als Bedingung für die Coefficienten b und c die Gleichung:

4) $$27b = 6c\sqrt{3c} \text{ oder } b^2 = \tfrac{4}{27}c^3,$$

und es folgt, dass für diese Relation der Coefficienten die künstliche Abscissen-Axe den oberen ausspringenden Scheitel tangire, nämlich, dass die künstliche Abscissen-Axe AX (Taf. X. Fig. 3) und die Tangente $A''X''$ des oberen ausspringenden Scheitels zusammen fallen. Es folgt weiter: Ist

5) $$27b < 6c\sqrt{3c} \text{ oder } b^2 < \tfrac{4}{27}c^3,$$

so schneidet die künstliche Abscissen-Axe den oberen ausspringenden Scheitel, oder die Tangente an letzteren liegt unterhalb der künstlichen Abscissen-Axe. (Taf. IX. Fig. 2).

Ist aber

6) $$27b > 6c\sqrt{3c} \text{ oder } b^2 > \tfrac{4}{27}c^3,$$

so liegt der Scheitelpunkt V'', (Taf. X. Fig. 4), des oberen ausspringenden Scheitels oberhalb der künstlichen Abscissen-Axe AX, oder die künstliche Abscissen-Axe AX schneidet den oberen ausspringenden Scheitel nicht.

286.

Entsprechen der Gleichung: [278. 6)]

1) $$0 = \tfrac{1}{4}b - \tfrac{1}{2}c \cdot u + u^3$$

Digitized by Google

zwei gleiche Wurzeln, ist nämlich:

2) $$\mathfrak{M}U = \mathfrak{M}V,$$

so findet für die Coefficienten b und c, nach [33. 4)] die Bedingung statt:

3) $$27b = 6c\sqrt{6c} \text{ oder } b^2 = \tfrac{8}{27}c^3. \qquad [216.\ 7)]$$

In diesem Falle vereinigen sich der Scheitelpunkt U' des einspringenden Scheitels und der Scheitelpunkt V'' des oberen ausspringenden Scheitels (Taf. X. Fig. 5); d. h. die Tangente des einspringenden Scheitels und die Tangente des oberen ausspringenden Scheitels fallen zusammen und liegen oberhalb der künstlichen Abscissen-Axe.

Ist aber:

4) $$27b < 6c\sqrt{6c} \text{ oder } b^2 < \tfrac{8}{27}c^3, \qquad [216.\ 6)]$$

so liegt die Tangente des einspringenden Scheitels über der Tangente des oberen ausspringenden Scheitels, beide liegen aber nur dann über der künstlichen Abscissen-Axe (Taf. X. Fig. 4), wenn zugleich die Bedingung [285. 6)] stattfindet.

Ist endlich:

5) $$27b > 6c\sqrt{6c} \text{ oder } b^2 > \tfrac{8}{27}c^3 \qquad [216.\ 8)]$$

so folgt, dass der Gleichung 1) nur eine einzige reelle Wurzel ($\mathfrak{M}W$) entspreche, und dass die beiden andern Wurzeln unmöglich seien; d. h. die Tangenten an den einspringenden und den oberen ausspringenden Scheitel sind unmöglich, oder diese Scheitel selbst sind unmöglich, nämlich die biquadratische Linie (Taf. X. Fig. 6)

6) $$z = bx - cx^2 + x^4$$

hat unter dieser Voraussetzung nur einen einzigen (wahren) Scheitel.

287.

Schneidet (Taf. IX. Fig. 2) eine beliebige Abscissen-Axe $A^V X^V$ die biquadratische Linie in vier Punkten:

$$C^V,\ {}^V C,\ {}_V C,\ C_V$$

ist also:

1) $$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^V = a$$

und

2) $$0 = a + by - cy^2 + y^4$$ [242.]

die Gleichung für den Anfangspunkt $\mathfrak{M}^V$, so sind ihre vier Wurzeln:

3) $$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{M}^V C_V &= -\alpha - \alpha \\ -\mathfrak{M}^V {}_V C &= -\alpha + \alpha \\ +\mathfrak{M}^{VV} C &= +\alpha - \beta \\ +\mathfrak{M}^V C^V &= +\alpha + \beta \end{aligned}\right\}$$ [242. für III.] ,

Halbirt man nun die Entfernungen $C_V {}_V C$ und ${}^V C C^V$, in welchen die wirkliche Abscissen-Axe die Scheitel schneidet, in den bezüglichen Punkten ${}_V\mathfrak{C}$ und ${}^V\mathfrak{C}$, so ist:

4) $${}_V\mathfrak{C} C_V = {}_V\mathfrak{C}{}_V C \text{ und } {}^V\mathfrak{C}{}^V C = {}^V\mathfrak{C} C^V$$

und

5)
$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{M}^V C_V &= -\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C} - {}_V\mathfrak{C} C_V \\ -\mathfrak{M}^V {}_V C &= -\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C} + {}_V\mathfrak{C}{}_V C \end{aligned}\right\} = -\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C} \mp {}_V\mathfrak{C} C_V = -\alpha \mp \alpha,$$
$$\left.\begin{aligned} +\mathfrak{M}^{VV} C &= +\mathfrak{M}^{VV}\mathfrak{C} - {}^V\mathfrak{C}{}^V C \\ +\mathfrak{M}^V C^V &= +\mathfrak{M}^{VV}\mathfrak{C} + {}^V\mathfrak{C} C^V \end{aligned}\right\} = +\mathfrak{M}^{VV}\mathfrak{C} \mp {}^V\mathfrak{C}{}^V C = +\alpha \mp \beta.$$

Es drücken also die Grössen $\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}^{VV}\mathfrak{C}$ die ersten und ${}_V\mathfrak{C} C_V$, ${}^V\mathfrak{C}{}^V C$ die zweiten Theile je zweier Wurzeln aus, und es folgt:

6) $$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{M}^V C_V - \mathfrak{M}^V {}_V C &= -2.\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C} = -2\alpha = -\mathfrak{B} \\ +\mathfrak{M}^{VV} C + \mathfrak{M}^V C^V &= +2.\mathfrak{M}^{VV}\mathfrak{C} = +2\alpha = +\mathfrak{B} \end{aligned}\right\},$$

nämlich gleich der Summe zweier Wurzeln.

Tragen wir demnach auf der Abscissen-Axe von dem Anfangspunkt $\mathfrak{M}^V$ aus, links (rechts) zweimal die Grösse $\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{M}^{VV}\mathfrak{C}$) ab, machen wir nämlich:

7) $$\begin{aligned} -\mathfrak{M}^V {}_V K &= -2.\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C} \\ +\mathfrak{M}^{VV} K &= +2.\mathfrak{M}^{VV}\mathfrak{C}, \end{aligned}$$

so bezeichnet uns die Entfernung:

$$\mathfrak{M}^V {}_V K \ (\mathfrak{M}^{VV} K)$$

die Summe zweier Wurzeln der Gleichung 2).

Es lassen sich

8) ausser den beiden Punkten ${}_V K$ und ${}^V K$, noch vier weitere Punkte, im Ganzen also sechs Punkte, bestimmen, deren Entfernung von dem Anfangspunkt $\mathfrak{M}^V$ die Summe zweier

Digitized by Google

Wurzeln ausdrückt. Denn bezeichnen $-\overset{1}{w}$, $-\overset{2}{w}$ die beiden negativen und $+\overset{3}{w}$, $+\overset{4}{w}$ die beiden positiven Wurzeln der Gleichung 2), so ergeben sich für die Summe je zweier Wurzeln:

9)

$$-\overset{1}{w}-\overset{2}{w};\ -\overset{1}{w}+\overset{3}{w};\ -\overset{1}{w}+\overset{4}{w};\ -\overset{2}{w}+\overset{3}{w};\ -\overset{2}{w}+\overset{4}{w};\ +\overset{3}{w}+\overset{4}{w};$$

im Ganzen also sechs verschiedene Fälle.

Halbirt man nun:

10)

$C_V{}^VC$ in dem Punkte $\mathfrak{C}_V$, so ergiebt sich der Punkt K_V
C_VC^V „ „ „ $\underset{V}{\mathfrak{C}}$, „ „ „ „ „ $\underset{V}{K}$
${}_VC^VC$ „ „ „ $\overset{V}{\mathfrak{C}}$, „ „ „ „ „ $\overset{V}{K}$
${}_VCC^V$ „ „ „ $\mathfrak{C}^V$, „ „ „ „ „ K^V

deren Entfernungen von dem Anfangspunkte $\mathfrak{M}^V$ die vier weiteren Summen zweier Wurzeln darstellen.

288.

Die Gleichung für diese sechs Punkte:

$${}_VK,\ K_V,\ \underset{V}{K},\ \overset{V}{K},\ K^V,\ {}^VK,$$

also für die Summe je zweier Wurzeln, ist, nach [243.]

1) $$0=-b^2+(c^2-4a)(\mathfrak{B}^2)-2c.(\mathfrak{B}^2)^2+(\mathfrak{B}^2)^3.$$

Wir können für dieselbe auch schreiben:

2) $$4a=-\frac{b^2}{(\mathfrak{B}^2)}+c^2-2c.(\mathfrak{B}^2)+(\mathfrak{B}^2)^2.$$

Betrachten wir nun b und c als constant, $(\mathfrak{B}^2)$ aber als veränderlich, so wird auch a eine veränderliche Grösse bedeuten.

Ein positiver Werth von a setzt in Gleichung 2) voraus, dass die wirkliche Abscissen-Axe oberhalb der natürlichen liege. Liegt aber die wirkliche Abscissen-Axe unterhalb der natürlichen, so geht Gleichung 2) über in:

3) $$-4a=+\frac{b^2}{(\mathfrak{B}^2)}-c^2+2c.(\mathfrak{B}^2)-(\mathfrak{B}^2)^2.$$

Schreiben wir nun $\pm x$ anstatt $\mathfrak{B}$, und $+z$ anstatt $-a$, weil nunmehr die Ordinaten nach entgegengesetzter Richtung aufzutragen sind, so ergiebt sich:

4) $$z = \tfrac{1}{4}\left[\frac{b^2}{x^2} - c^2 + 2c.x^2 - x^4\right],$$

als Coordinaten-Gleichung für die Summe zweier Wurzeln der Gleichung:

5) $$z = bx - cx^2 + x^4,$$

welche Gleichung der Summe der Wurzeln in Taf. IX. Fig. 2. als die mit accentuirten K bezeichnete Curve dargestellt ist.

Da $\mathfrak{B} = 2a$ ist, so erhalten wir, schreiben wir in 4) $2x$ anstatt x:

6) $$z = \tfrac{1}{4}\left[\frac{b^2}{(2x)^2} - c^2 + 2c.(2x)^2 - (2x)^4\right]$$

als Gleichung für die in Taf. IX. Fig. 2. mit accentuirten $\mathfrak{C}$ bezeichnete Curve, welche wir, analog [186.], die **Halbirungs-Curve der Scheitel** nennen wollen.

289.

Da es

1) für die Coordinaten-Gleichungen [288. 4) und 6)] einerlei ist, ob man einen positiven oder einen negativen Werth für die Veränderliche x substituirt, so müssen sowohl die Curve der Summe zweier Wurzeln, wie auch die Halbirungslinie der Scheitel rechts und links der künstlichen Ordinaten-Axe, also in entgegengesetzter Lage, dieselbe Gestalt haben. Setzt man in den Coordinaten-Gleichungen [288. 4) und 6)]

2) $$x = 0,$$

so folgt:

3) $$z = \infty,$$

d. h. die künstliche Ordinaten-Axe ist Asymptote sowohl an die Curve der Summe der Wurzeln, wie auch an die Halbirungslinie der Scheitel. Die zusammengehörigen Aeste beider Curven nähern sich daher oberhalb der Abscissen-Axe stets der künstlichen Ordinaten-Axe, ohne weder diese noch sich selbst zu schneiden, und es erstreckt sich jeder Ast, zwei Biegungen bildend, nach beiden Seiten in's Unendliche.

Digitized by Google

Betrachtet man

4) in Gleichung [288. 4) und 6)] die Grösse b als veränderlich, c und x aber als constant, so nimmt z zu, wenn b abnimmt, und umgekehrt. Wir können daher sagen: für einen kleineren Werth von b liegen die aufsteigenden Aeste der Curve der Summe zweier Wurzeln und der Halbirungs-Curve der Scheitel näher an der künstlichen Ordinaten-Axe als für einen grösseren und die aufsteigenden Aeste beider Curven fallen mit der künstlichen Ordinaten-Axe zusammen, sobald b gleich Null wird.

Es erhellet aus der Construction beider Linien, dass

5) die Tangente des einspringenden und des oberen ausspringenden Scheitels zugleich Tangenten an ihre Biegungen seien, und dass die Halbirungs-Curve der Scheitel die biquadratische Linie in den drei (wahren) Scheitelpunkten schneide.

Auch ist einleuchtend, dass

6) (Taf. IX. Fig. 2) die Curve der Summe zweier Wurzeln die construirte Linie der Gleichung [201. 11)] und die Halbirungs-Curve der Scheitel die construirte Linie der Gleichung [211. 4)], den Punkt A als Anfangspunkt der Coordinaten betrachtet, ausdrücken.

290.

Denken wir uns nun (Taf. IX. Fig. 2) die Zweige der biquadratischen Linie, analog [190.], über ihre Scheitelpunkte hinaus, senkrecht über und unter der Halbirungs-Curve der Scheitel, imaginär fortgesetzt, und, zur Versinnlichung dieser imaginären Aeste, deren Erhebung und Senkung über und unter die Constructions-Ebene wieder in diese um den betreffenden Durchschnittspunkt, parallel mit der Abscissen-Axe, umgelegt.

Wählen wir zu dem Ende den Scheitelpunkt $\left\{\begin{matrix} U' \\ V'' \\ W''' \end{matrix}\right\}$ des $\left\{\begin{matrix} \text{einspringenden} \\ \text{oberen ausspringenden} \\ \text{unteren ausspringenden} \end{matrix}\right\}$ Scheitels als Anfangspunkt der Coordinaten, also die Tangente des $\left\{\begin{matrix} \text{einspringenden} \\ \text{oberen ausspringenden} \\ \text{unteren ausspringenden} \end{matrix}\right\}$ Scheitels als Abscissen-Axe, und setzen ein beliebiges Stück derselben

1)
$$\left.\begin{array}{r} U'\mathfrak{N}' \\ V''\mathfrak{N}'' \\ W'''\mathfrak{N}''' \end{array}\right\} = x,$$

fällen durch den Endpunkt $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$) desselben eine Senkrechte ($\mathfrak{N}''\mathfrak{C}^{VI}$, $\mathfrak{N}''\mathfrak{C}^{VII}$, $\mathfrak{N}'''\mathfrak{C}_{VII}$) auf die Abscissen-Axe $A'X'$ ($A''X''$, $A'''X'''$), welche Senkrechte die Halbirungs-Curve der Scheitel in dem Punkte $\mathfrak{C}^{VI}$ ($\mathfrak{C}^{VII}$, $\mathfrak{C}_{VII}$) schneidet, und ziehen durch diesen Schneidungspunkt eine Parallele $A^{VI}X^{VI}$ ($A^{VII}X^{VII}$) zur Abscissen-Axe; so ist das Stück dieser Parallelen, welches zwischen der Halbirungs-Curve der Scheitel und der Scheitelpunkts-Axe U^0U' (V^0V'', W^0W''') liegt, nämlich:

2)
$$\left.\begin{array}{r} U^{VI}\mathfrak{C}^{VI} = U'\mathfrak{N}' \\ V^{VII}\mathfrak{C}^{VII} = V''\mathfrak{N}'' \\ W^{VII}\mathfrak{C}_{VII} = W'''\mathfrak{N}''' \end{array}\right\} = x.$$

Nun ist:

3)
$$\begin{array}{l} +\mathfrak{M}^{VI}\mathfrak{C}^{VI} = +\mathfrak{M}U - U^{VI}\mathfrak{C}^{VI}, \\ +\mathfrak{M}^{VII}\mathfrak{C}^{VII} = +\mathfrak{M}V + V^{VII}\mathfrak{C}^{VII}, \\ -\mathfrak{M}^{VII}\mathfrak{C}_{VII} = -\mathfrak{M}W - W^{VII}\mathfrak{C}_{VII}; \end{array}$$

d. h. es ist [278. 7)]:

4) $+a = +\overset{1}{u} - x$ für eine über der

$+a = +\overset{2}{u} + x$ „ „ unter „

$+a = +\overset{3}{u} + x$ „ „ unter „

Tangente des $\left\{\begin{array}{l}\text{einspringenden}\\ \text{oberen ausspringenden}\\ \text{unteren ausspringenden}\end{array}\right\}$ Scheitels liegende wirkliche Abscissen-Axe $A^{VI}X^{VI}$ ($A^{VII}X^{VII}$).

Substituiren wir diese Werthe für a in die Gleichung [255. 4) 246. 4) 248. 5)], so erhalten wir:

5)
$$\left\{\begin{array}{l} \pm\alpha\sqrt{-1} = \pm\left[\dfrac{b}{4(\overset{1}{n}-x)} - \dfrac{c}{2} + (\overset{1}{n}-x)^2\right]\cdot\sqrt{-1} \\[2ex] \pm\alpha\sqrt{-1} = \pm\left[\dfrac{b}{4(\overset{2}{n}+x)} - \dfrac{c}{2} + (\overset{2}{n}+x)^2\right]\cdot\sqrt{-1} \\[2ex] \pm\beta\sqrt{-1} = \pm\left[-\dfrac{b}{4(\overset{3}{n}+x)} - \dfrac{c}{2} + (\overset{3}{n}+x)^2\right]\cdot\sqrt{-1} \end{array}\right.$$

Digitized by Google

für den $\left\{\begin{matrix}\text{einspringenden}\\ \text{oberen ausspringenden}\\ \text{unteren ausspringenden}\end{matrix}\right\}$ Scheitel, d. h. die Höhe und Tiefe der bezüglichen imaginären Aeste über und unter der Halbirungs-Curve der Scheitel für den betreffenden Punkt $\mathfrak{C}^{VI}$ ($\mathfrak{C}^{VII}$, $\mathfrak{C}_{VII}$) der Halbirungs-Curve, nämlich:

$$6)\quad \begin{cases} \alpha = \mathfrak{C}^{VI}J^{VI} = \mathfrak{C}^{VI}\mathfrak{J}^{VI} & \text{für den Punkt } \mathfrak{C}^{VI}, \\ \alpha = \mathfrak{C}^{VII}J^{VII} = \mathfrak{C}^{VII}\mathfrak{J}^{VII} & \text{,, ,, ,, } \mathfrak{C}^{VII}, \\ \beta = \mathfrak{C}^{VII}J_{VII} = \mathfrak{C}^{VII}\mathfrak{J}_{VII} & \text{,, ,, ,, } \mathfrak{C}_{VII}. \end{cases}$$

Durch die Bestimmung mehrerer Punkte J und $\mathfrak{J}$, beziehungsweise ihre Verbindung durch eine stetige krumme Linie, werden dann die imaginären Aeste selbst construirt.

291.

Die Bestimmung der imaginären Aeste kann auch ohne die Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten nach den Scheitelpunkten geschehen. Hat man nämlich nach Formel [288. 6)] für irgend eine Abscisse x ($= +\mathfrak{M}N'$, $+\mathfrak{M}N''$, $-\mathfrak{M}N'''$, $= a$) den zugehörigen Werth von z ($= +N'\mathfrak{C}^{VI}$, $-N''\mathfrak{C}^{VII}$, $-N'''\mathfrak{C}_{VII}$) bestimmt, so fälle man durch den Endpunkt ($\mathfrak{C}^{VI}$, $\mathfrak{C}^{VII}$, $\mathfrak{C}_{VII}$) dieser Ordinate eine Parallele zur Abscissen-Axe, und trage von diesem Endpunkte auf die Parallele die Grösse

$$\alpha = \frac{b}{4x} - \frac{c}{2} + x^2 \quad \text{für den Punkt} \begin{Bmatrix} \mathfrak{C}^{VI} \\ \mathfrak{C}^{VII} \end{Bmatrix} \begin{matrix} [255.\ 4)], \\ [246.\ 4)], \end{matrix}$$

$$\beta = -\frac{b}{4x} - \frac{c}{2} + x^2 \quad \text{für den Punkt } \mathfrak{C}_{VII} \quad [248.\ 5)],$$

rechts und links auf, so bestimmen sich hierdurch zwei Punkte $\left\{\begin{matrix} J^{VI}, \mathfrak{J}^{VI} \\ J^{VII}, \mathfrak{J}^{VII} \\ J_{VII}, \mathfrak{J}_{VII} \end{matrix}\right\}$ der eine für den oberen, der andere für den unteren imaginären Ast.

u. s. w.

292.

Da die Scheitelpunkte der biquadratischen Linie zugleich die Scheitelpunkte der imaginären Aeste sind, so folgt:

1) Hat eine biquadratische Linie drei Scheitelpunkte, so hat sie auch drei imaginäre, für sich bestehende, Scheitel-Curven. (Taf. IX. Fig. 2. Taf. X. 3. 4.).

2) Fallen für eine biquadratische Linie der Scheitelpunkt des einspringenden und der Scheitelpunkt des oberen ausspringenden Scheitels zusammen (Taf. X. Fig. 5.), so haben auch die imaginären Curven dieser Scheitel einen Punkt, den Scheitelpunkt, mit einander gemein.

3) Hat eine biquadratische Linie nur **einen** Scheitel, so besteht nur die imaginäre Curve des Scheitels für sich, und die zwei Paar anderen imaginären Aeste haben keine Scheitelpunkte und vereinigen sich in **ein** Paar.

293.

Da [288. 1)] die Gleichung der Summe zweier Wurzeln der Gleichung [287. 2)] ausdrückt, so ist für die Annahme [287.]:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} +\mathfrak{M}^{V\,V}K=+\overset{1}{\mathfrak{B}};\ +\mathfrak{M}^{V}K^{V}=+\overset{2}{\mathfrak{B}};\ +\mathfrak{M}^{V}\overset{V}{K}=+\overset{3}{\mathfrak{B}}; \\ -\mathfrak{M}^{V}{}_{V}K=-\overset{1}{\mathfrak{B}};\ -\mathfrak{M}^{V}K_{V}=-\overset{2}{\mathfrak{B}};\ -\mathfrak{M}^{V}\underset{V}{K}=-\overset{3}{\mathfrak{B}}; \end{array}\right.$$

und da ferner, nach [222. III.]

$$2)\qquad \pm 2\alpha=\pm\overset{1}{\mathfrak{B}};\ \pm(\alpha+\beta)=\pm\overset{2}{\mathfrak{B}};\ \pm(\alpha-\beta)=\pm\overset{3}{\mathfrak{B}}$$

ist, so folgt:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} +\mathfrak{M}^{V\,V}K \\ -\mathfrak{M}^{V}{}_{V}K \end{array}\right\}=\pm\overset{1}{\mathfrak{B}},\ \text{also:}\ \left\{\begin{array}{l} +\mathfrak{M}^{V\,V}\mathfrak{C} \\ -\mathfrak{M}^{V}{}_{V}\mathfrak{C} \end{array}\right\}=\pm\frac{\overset{1}{\mathfrak{B}}}{2},$$

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} +{}_{V}\mathfrak{C}_{V}C+{}^{V}\mathfrak{C}C^{V} \\ -{}_{V}\mathfrak{C}C_{V}-{}^{V}\mathfrak{C}^{V}C \end{array}\right\}=\pm\overset{2}{\mathfrak{B}},$$

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} +{}_{V}\mathfrak{C}_{V}C-{}^{V}\mathfrak{C}^{V}C \\ -{}_{V}\mathfrak{C}C_{V}-{}^{V}\mathfrak{C}C^{V} \end{array}\right\}=\pm\overset{3}{\mathfrak{B}},$$

(4) und 5): Die Werthe von [287. 5)] von α und β in 2) substituirt.)

Hieraus ergiebt sich:

$$6)\qquad \frac{-\overset{2}{\mathfrak{B}}-\overset{3}{\mathfrak{B}}}{2}=-{}_{V}\mathfrak{C}_{V}C=-{}_{V}\mathfrak{C}C_{V};$$

$$\frac{+\overset{2}{\mathfrak{B}}+\overset{3}{\mathfrak{B}}}{2}=+{}_{V}\mathfrak{C}_{V}C;$$

$$\frac{-\overset{2}{\mathfrak{B}}+\overset{3}{\mathfrak{B}}}{2}=-{}^{V}\mathfrak{C}C^{V};$$

$$\frac{+\overset{2}{\mathfrak{B}}-\overset{3}{\mathfrak{B}}}{2}=+{}^{V}\mathfrak{C}C^{V}=+{}^{V}\mathfrak{C}^{V}C.$$

Digitized by Google

Daher ergeben sich die vier Wurzeln der Gleichung [287. 2)], nämlich:

7)

$$\left.\begin{array}{l}
-\mathfrak{M}^V C_V = -\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C} - {}_V\mathfrak{C} C_V = \dfrac{-\overset{1}{\mathfrak{B}} - \overset{2}{\mathfrak{B}} - \overset{3}{\mathfrak{B}}}{2}, \\
-\mathfrak{M}^V {}_V C = -\mathfrak{M}^V {}_V\mathfrak{C} + {}_V\mathfrak{C} {}_V C = \dfrac{-\overset{1}{\mathfrak{B}} + \overset{2}{\mathfrak{B}} + \overset{3}{\mathfrak{B}}}{2}, \\
+\mathfrak{M}^V C^V = +\mathfrak{M}^V {}^V\mathfrak{C} + {}^V\mathfrak{C} C^V = \dfrac{+\overset{1}{\mathfrak{B}} - \overset{2}{\mathfrak{B}} + \overset{3}{\mathfrak{B}}}{2}, \\
+\mathfrak{M}^V {}^V C = +\mathfrak{M}^V {}^V\mathfrak{C} - {}^V\mathfrak{C} {}^V C = \dfrac{+\overset{1}{\mathfrak{B}} + \overset{2}{\mathfrak{B}} - \overset{3}{\mathfrak{B}}}{2},
\end{array}\right\} \text{[232. 3)]}$$

oder:

8)
$$\begin{array}{lccc}
-\mathfrak{M}^V C_V = - & \mathfrak{M}^V {}^V\mathfrak{C} - & \mathfrak{M}^V \mathfrak{C}^V - & \mathfrak{M}^V \overset{V}{\mathfrak{C}} \\
-\mathfrak{M}^V {}_V C = - & & + & + \\
+\mathfrak{M}^V C^V = + & & - & + \\
+\mathfrak{M}^V {}^V C = + & & + & -
\end{array}$$

In gleicher Weise lassen sich

9) Die Darstellungen [222. I. und II.] geometrisch nachweisen.

Zu bemerken ist noch,

10) dass, wenn b negativ ist, also Taf. IX. Fig. 2. bezüglich ihrer festen Ordinaten-Axe eine verkehrte Lage hat, sich die Wurzeln nach [232. 4)] bestimmen.

294.

Wir sind nun in den Stand gesetzt, jede gegebene biquadratische Gleichung, für welche, vermöge der Coefficienten b und c der ersten und zweiten Potenz der Unbekannten (das cubische Glied fehlend vorausgesetzt) die Möglichkeit vorliegt, dass sie vier reelle Wurzeln habe, geometrisch zu beurtheilen.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0 = -a + by - cy^2 + y^4,$$

so lassen sich für dieselben folgende Betrachtungen anstellen:

1) Da das von der Unbekannten y unabhängige Glied a negativ ist, so liegt die wirkliche Abscissen-Axe $A^{VI} X^{VI}$ (Taf. IX.

Fig. 2.) oberhalb der künstlichen und schneidet daher die biquadratische Linie mindestens in zwei Punkten, d. h. die gegebene Gleichung hat mindestens zwei reelle Wurzeln, eine positive $+\mathfrak{M}^{VI}C^{VI}$ und eine negative $-\mathfrak{M}^{VI}C_{VI}$, und zwar ist der absolute Werth der negativen Wurzel grösser wie der absolute Werth der positiven.

2) Denken wir uns a als veränderlich, so werden sich auch die Wurzeln mit dem Werthe von a ändern, sie werden in absoluter Bedeutung $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$, wenn der absolute Werth von a $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ wird, d. h. wenn sich die wirkliche Abscissen-Axe $\left\{\begin{matrix}\text{von der}\\ \text{der}\end{matrix}\right\}$ künstlichen $\left\{\begin{matrix}\text{entfernt}\\ \text{nähert}\end{matrix}\right\}$. Von den beiden imaginären Wurzeln wird in diesem Falle der reelle Theil $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{matrix}\right\}$, der imaginäre $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$.

3) Nähert sich die wirkliche Abscissen-Axe der künstlichen so weit, dass sie mit der Tangente $A'X'$ des einspringenden Scheitels zusammenfällt [256.], so gehen die beiden imaginären Wurzeln in zwei gleiche reelle über, der Gleichung entsprechen dann drei positive Wurzeln, unter welchen zwei einander gleich sind, und eine negative.

4) Nähert sich die wirkliche Abscissen-Axe der künstlichen noch weiter, d. h. nimmt der absolute Werth von a noch weiter ab, so wird die biquadratische Linie von ihr auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe in drei Punkten, auf der negativen in einem Punkte geschnitten, die Gleichung hat also in diesem Falle drei positive und eine negative Wurzel [257], und zwar ist der absolute Werth der negativen Wurzel grösser wie jede der positiven Wurzeln.

5) Fällt die wirkliche Abscissen-Axe mit der künstlichen zusammen, d. h. wird $a=0$, so wird eine Wurzel gleich Null, und von den drei andern sind zwei positiv und eine negativ.

6) Entfernt sich nunmehr die wirkliche Abscissen-Axe von der künstlichen unterhalb derselben (liegt sie jedoch noch oberhalb der Tangente des oberen ausspringenden Scheitels), so ist die gegebene Gleichung:

$$0=+a+by-cy^2+y^4,$$

und es wird die biquadratische Linie von der wirklichen Abscis-

Digitized by Google

sen-Axe auf der positiven und negativen Seite der Ordinaten-Axe in je zwei Punkten geschnitten; es entsprechen daher der Gleichung in diesem Falle zwei positive und zwei negative reelle Wurzeln [244.], und zwar liegen die absoluten Grössenwerthe der beiden positiven Wurzeln zwischen den absoluten Grössenwerthen der beiden negativen.

7) Wird a grösser, und fällt die wirkliche Abscissen-Axe mit der Tangente des oberen ausspringenden Scheitels zusammen, so entsprechen der Gleichung zwei gleiche positive und zwei ungleiche negative Wurzeln [245.].

8) Wächst a weiter, d. h. entfernt sich die wirkliche Abscissen-Axe weiter von der künstlichen (liegt sie jedoch noch oberhalb der Tangente des unteren ausspringenden Scheitels), so wird die biquadratische Linie von ihr auf der negativen Seite der Ordinaten-Axe in zwei Punkten, auf der positiven Seite aber nur die Halbirungs-Curve der Scheitel geschnitten, der Gleichung entsprechen daher in diesem Falle zwei negative reelle und zwei imaginäre Wurzeln [246.].

9) Fällt die wirkliche Abscissen-Axe mit der Tangente des unteren ausspringenden Scheitels zusammen, so entsprechen der Gleichung zwei gleiche reelle negative und zwei imaginäre Wurzeln [249.].

10) Liegt aber die wirkliche Abscissen-Axe unterhalb der Tangente des unteren ausspringenden Scheitels, so schneidet sie die biquadratische Linie nicht, wohl aber stets die Halbirungs-Curve der Scheitel in zwei Punkten, und die Gleichung hat vier imaginäre Wurzeln.

295.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes der schiefen Scheitel denken wir uns die Ordinaten der Scheitel zur Abscissen-Axe $D'\mathfrak{M}D_1$ (Taf. IX. Fig. 2), positiv, indem wir, anstatt [281. 8)] schreiben:

1) $$z = +\frac{c}{1+b^2}\cdot u^2 - \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot u^4.$$

Denken wir uns nun weiter die Abscissen-Axe von dem Anfangspunkte $\mathfrak{M}$ aus in n gleiche Theile, jeder Theil gleich e, eingetheilt, durch die Theilungspunkte Parallel-Linien mit der Ordinaten-Axe gezogen, und von dem Durchschnittspunkt einer jeden

Parallelen mit der biquadratischen Linie eine mit der Abscissen-Axe parallele Linie bis zur vorhergehenden Ordinaten-Parallele gezogen, so wird dadurch die Ebene der ausspringenden Scheitel in n Parallelogramme abgetheilt, deren gesammter Flächeninhalt F sich folgendermassen darstellt, nämlich:

$$5)\quad F = \left[\frac{c}{1+b^2}\cdot e^2 - \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot e^4\right].e(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\left[\frac{c}{1+b^2}\cdot(2e)^2 - \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot(2e)^4\right].e(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\left[\frac{c}{1+b^2}\cdot(3e)^2 - \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot(3c)^4\right].e(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\ldots.$$
$$+\left[\frac{c}{1+b^2}\cdot(ne)^2 - \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot(ne)^4\right].e(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}.e\left[\frac{c}{1+b^2}(1+4+9+\ldots.+n^2)e^2 - \frac{1}{(1+b^2)^2}(1+16+81+\ldots.+n^4)e^4\right]$$
$$=(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}.e\left[\frac{c}{1+b^2}\cdot\tfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)e^2 - \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot\tfrac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)e^4\right],$$

also für $n = \infty$:

$$3)\qquad F = \tfrac{1}{3}c(1+b^2)^{-\frac{3}{2}}(ne)^3 - \tfrac{1}{5}(1+b^2)^{-\frac{5}{2}}(ne)^5.$$

Setzen wir:

$$ne = \mathfrak{M}G_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2c(1+b^2)}, \qquad [283.\ 4)]$$

so folgt der Flächeninhalt $\mathfrak{M}G_1C_XB_1\mathfrak{M}$ des von der Abscissen-Axe $\mathfrak{M}G_1$ und einem Theile der Axe des falschen Scheitelpunktes C_X begrenzten inneren Scheiteltheiles, nämlich:

$$4)\qquad F' = \frac{7}{120}c^2\sqrt{2c}.$$

Setzen wir aber

$$ne = \mathfrak{M}D_1 = \sqrt{c(1+b^2)}, \qquad [281.\ 17)]$$

so ergiebt sich der Flächeninhalt des schief abgeschnittenen Scheitels $\mathfrak{M}B_1C_XD_1\mathfrak{M}$, nämlich:

$$5)\qquad F'' = \tfrac{2}{15}c^2\sqrt{c}.$$

Digitized by Google

Setzen wir

$$ne = \mathfrak{M}F_1 = \mathfrak{m}B_1 = \sqrt{\tfrac{1}{6}c(1+b^2)}, \qquad [284.\ 3)]$$

so ergiebt sich der Flächeninhalt $\mathfrak{M}B_1F_1\mathfrak{M}$ des von der Abscissen-Axe $\mathfrak{M}F_1$ und von der Ordinate des Beugungspunktes begrenzten Scheiteltheiles, nämlich:

6) $$F''' = \tfrac{1}{20}c^2\sqrt{\tfrac{1}{6}c}$$

u. s. w.

und da sich der Flächeninhalt des Parallelogramms $\mathfrak{M}D_1L_1\mathfrak{M}_0$, nämlich:

7) $$\mathfrak{F} = \tfrac{1}{4}c^2\sqrt{c}$$

ergiebt, so lässt sich das Verhältniss der einzelnen Scheitelstücke zu diesem Flächeninhalte, sowie auch der Flächeninhalte dieser Scheitelstücke unter sich leicht weiter bestimmen.

296.

Es wird leicht fallen, das bisher Abgehandelte auf diejenige Klasse von biquadratischen Gleichungen anzuwenden, welche stets mindestens zwei imaginäre Wurzeln, deren construirte Linien also nur einen Scheitel haben, und die daher entweder von der Form sind:

1) $$0 = \pm a + by + cy^2 + y^4,$$

oder von der Form:

2) $$0 = \pm a + by - cy^2 + y^4,$$

für welche aber noch die Bedingung statt findet:

3) $$b^2 > \tfrac{8}{27}c^3. \qquad [286.5)]\ (\text{Taf. X. Fig. 6.})$$

Ist 1) die gegebene Gleichung, die scharf gezeichnete Curve, (Taf. X. Eig. 8.) ihre construirte Linie, $\mathfrak{M}$ der künstliche Anfangspunkt, also AX die künstliche Abscissen- und $\mathfrak{M}^0\mathfrak{M}_0$ die künstliche Ordinaten-Axe; $L\mathfrak{M}$ die Tangente des künstlichen Anfangspunktes; Winkel $L\mathfrak{M}\mathfrak{N} = \varphi$ der Winkel, welchen diese Tangente mit der Abscissen-Axe bildet, also $b = \operatorname{tg}\varphi$; so ist für ein schiefwinkeliges Coordinaten-System, nämlich die Ordinaten parallel mit der künstlichen Ordinaten-Axe gedacht, und die Abscissen, von dem künstlichen Anfangspunkt $\mathfrak{M}$ aus, auf seiner Tangente gezählt, nach [281. 8)]:

4) $$z = +\frac{c}{1+b^2}\cdot u^2 + \frac{1}{(1+b^2)^2}\cdot u^4,$$

5) $$u = \{\pm\}\tfrac{1}{2}\sqrt{2(1+b^2)(-c\pm\sqrt{c^2+4z})}.$$

Aus 4) folgt:

6) Gleichen positiven und negativen Abscissen entsprechen gleiche positive Ordinaten.

7) Jede die biquadratische Linie schneidende Sehne $C'C_1$, die mit der Tangente $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ des künstlichen Anfangspunktes parallel läuft, wird von der künstlichen Ordinaten-Axe $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}_0$ halbirt.

8) Die künstliche Ordinaten-Axe ist daher ein Durchmesser der biquadratischen Linie.

9) Die von zwei, mit der Tangente des künstlichen Anfangspunktes parallellaufenden, Sehnen eingeschlossenen Flächeninhalte der Curve werden von der künstlichen Ordinaten-Axe halbirt.

u. s. w.

Aus [279. 7)] folgt:

10) $$u = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{-6c},$$

d. h. die Abscisse der Beugungspunkte ist unmöglich, oder die Curve der Gleichung 1) hat keine Beugungspunkte. Die Curve hat daher auch keine einspringende Biegung, daher nur einen Scheitel, und man kann sagen, zwei ihrer Scheitel seien imaginär.

Die Gleichungen der Summe zweier Wurzeln, und der Halbirungs-Curve der Scheitel ergeben sich nach [288. 4) und 6)], nämlich:

11) $$z = \tfrac{1}{4}\left[\frac{b^2}{x^2} - c^2 - 2cx^2 - x^4\right],$$

12) $$z = \tfrac{1}{4}\left[\frac{b^2}{(2x)^2} - c^2 - 2c(2x)^2 - (2x)^4\right].$$

13) Die imaginäre Scheitel-Curve, sowie die imaginären Curven der imaginären Scheitel bestimmen sich, analog [291.], nach [235. 4) und 5)] und letztere bilden zwei zusammenhängende Aeste [292. 3)].

14) Die geometrische Beurtheilung der Wurzeln, je nach der Lage der wirklichen Abscissen-Axe, ergiebt leicht (Taf. X. Fig. 8.).

297.

Ist $c = 0$, also die gegebene Gleichung:

1) $$0 = \pm a + by + y^4,$$

so schreiben wir, um dieselbe zu construiren:

2) $$z = + bx + x^4,$$

und erhalten, nach [288. 6)] als Gleichung der Halbirungs-Curve der Scheitel:

3) $$z = \tfrac{1}{4}\left[\frac{b^2}{(2x)^2} - (2x)^4\right].$$

Verstehen wir unter u die Abscisse $\mathfrak{M}W$ des Scheitelpunktes W''' (Taf. X. Fig. 7.), so ergiebt sich aus [278. 5)]:

4) $$-\mathfrak{M}W = -u = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2b},$$

daher, nach [278. 8)], die Gleichung des Scheitelpunktes:

5) $$z = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4b^2}.x^2 - 2\sqrt[3]{2b}.x^3 + x^4.$$

Für schiefwinkelige Coordinaten, die Abscissen vom künstlichen Anfangspunkt aus auf seiner Tangente gezählt, die Ordinaten parallel mit der künstlichen Ordinaten-Axe, ergiebt sich, aus [296. 4)] die Gleichung:

6) $$z = \frac{1}{(1 + b^2)^2} \cdot u^4.$$

u. s. w.

298.

Denken wir uns in der Gleichung:

1) $$z = bx - cx^2 + x^4$$

der construirten Curve (Taf. IX. Fig. 2.) den Coefficienten b der ersten Potenz der Veränderlichen x ebenfalls als veränderlich, so nimmt mit dem Werthe von $b = \operatorname{tg}\varphi$ die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die schiefe Scheitel-Tangente (oder die Tangente des künstlichen Anfangspunktes) mit der Abscissen-Axe AX bildet, und folglich auch der Winkel φ selbst, zu oder ab; die Entfernung des künstlichen Anfangspunktes von der schiefen Scheitel-Tangente, gemessen auf der künstlichen Ordinaten-Axe, nämlich:

2) $$\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0 = -\tfrac{1}{4}c^2,$$ [283. 6)]

erleidet aber hierdurch keine Aenderung.

Hieraus geht hervor, dass

3) Die Entfernung der Scheitel-Tangenten des oberen und unteren ausspringenden Scheitels allein von dem Coefficienten b der ersten Potenz der Unbekannten abhänge, sowie dass

4) die Grösse der Einbiegung der Curve allein abhängig sei von dem Coefficienten c der zweiten Potenz.

Wird daher $b = 0$, also die Gleichung der Curve:

5) $$z = -cx^2 + x^4,$$

so fallen (Taf. X. Fig. 9.) der künstliche Anfangspunkt mit dem Scheitelpunkt des einspringenden Scheitels, also die Tangente des künstlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$ mit der künstlichen Abscissen-Axe AX zusammen, und ebenso vereinigen sich die Tangenten der ausspringenden Scheitel und die schiefe Scheitel-Tangente, sowie die wahren und falschen Scheitelpunkte der ausspringenden Scheitel, und es entsprechen gleichen entgegengesetzten Werthen von x gleiche Werthe von z. Die Gleichungen der Curve der Summe zweier Wurzeln und der Halbirungs-Curve der Scheitel [288. 4) und 6)] aber gehen über in:

6) $$z = \tfrac{1}{4}[-c^2 + 2cx^2 - x^4],$$

7) $$z = \tfrac{1}{4}[-c^2 + 2c(2x)^2 - (2x)^4].$$

Für $x = 0$ folgt aus denselben:

8) $$z = -\tfrac{1}{4}c^2, \text{ d. h. } z = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_0.$$

Wir können daher sagen:

9) Wird in Gleichung 1) der Coefficient b der ersten Potenz der Veränderlichen x gleich Null, so vereinigen sich die absteigenden Aeste der Curve der Summe zweier Wurzeln und der Halbirungs-Curve der Scheitel in dem Halbirungspunkte $\mathfrak{M}_0$ der gemeinschaftlichen Scheitel-Tangente, und letztere ist selbst in ihrem Halbirungspunkte Tangente an beide Curven. Die aufsteigenden Aeste aber fallen weg, oder vielmehr, sie fallen nach der Vorstellung [289. 4)] mit der künstlichen Ordinaten-Axe selbst zusammen.

Es ergiebt sich weiter, es ist:

10) die Entfernung des künstlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$ von dem Durchschnittspunkt D' (D_1) der künstlichen Abscissen-Axe mit der Curve, nämlich:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{M}D' \\ \mathfrak{M}D_1\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{c}; \qquad [281.\ 17)]$$

11) die Entfernung des künstlichen Anfangspunktes von den Scheitelpunktsaxen, nämlich:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{M}G' \\ \mathfrak{M}G_1\end{matrix}\right\} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2c}; \qquad [283.\ 4)]$$

12) die absolute Entfernung der Scheitelpunkte der ausspringenden Scheitel von einander, nämlich:

$$V''W''' = \sqrt{2c};$$

13) die Entfernung des künstlichen Anfangspunktes von der Beugungslinie, nämlich:.

$$\mathfrak{M}\mathfrak{m} = -\tfrac{5}{36}c^2; \qquad [280.\ 4)]$$

14) die Entfernung der Beugungspunkte von der künstlichen Ordinaten-Axe, nämlich:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{m}B' \\ \mathfrak{m}B_1\end{matrix}\right\} = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{6c}, \qquad [280.\ 10)]$$

also:

15) die absolute Länge der Beugungsaxe:

$$B'B_1 = \tfrac{1}{3}\sqrt{6c};$$

16) die Entfernung der Beugungslinie von dem Durchschnittspunkte B der Tangenten der Beugungspunkte, nämlich:

$$B\mathfrak{m} = \tfrac{2}{9}c^2;$$

u. s. w.

299.

1) Da die aufsteigenden Aeste der Curve der Summe zweier Wurzeln und der Halbirungs-Curve der Scheitel, oberhalb des künstlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$, mit der künstlichen Ordinaten-Axe zusammenfallen, und sich also für eine mit der künstlichen Abscissen-Axe und oberhalb derselben gezogenen Parallelen $A'X'$, ausser dem Durchschnittspunkt $\mathfrak{C}'$ mit der Ordinaten-Axe, keine weiteren Durchschnittspunkte mit den beiden Curven ergeben, demnach oberhalb der künstlichen Abscissen-Axe der Abstand der Halbirungs-Curve der Scheitel von der Ordinaten-Axe selbst gleich Null ist; so haben auch die bezüglichen imaginären Wurzeln keinen reellen Theil. [231. 6)].

2) Zur Versinnlichung der imaginären Aeste des einspringenden Scheitels kann man sich vorstellen, es sei in dem künstlichen

Anfangspunkte $\mathfrak{M}$ auf die Constructions-Ebene eine Senkrechte errichtet, welche wir als imaginäre Abscissen-Axe betrachten, und durch sie und die künstliche Ordinaten-Axe sei eine, also auf der Constructions-Ebene der biquadratischen Linie senkrecht stehende Ebene errichtet, zur Construirung der imaginären Aeste.

Substituiren wir nun in Gleichung [298. 5)]

$$x\sqrt{-1} \text{ anstatt } x,$$

so geht dieselbe über in:

$$z = + cx^2 + x^4,$$

welche construirte Curve wir uns dann wieder, wie in Taf. X. Fig. 9., in die Constructions-Ebene umgelegt denken.

3) Die Bestimmung der imaginären Aeste $J''V''\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}_{\prime\prime}W'''J_{\prime\prime}$ der ausspringenden Scheitel geschieht analog [290. und 291.].

4) Die geometrische Beurtheilung der Wurzeln für verschiedene Lagen der wirklichen Abscissen-Axe ergiebt sich leicht aus Taf. X. Fig. 9.

Ist a negativ, so schneidet die wirkliche Abscissen-Axe $A'X'$ die biquadratische Linie stets in zwei Punkten C' und $C_{\prime}$, und die vorgelegte Gleichung hat in diesem Falle zwei gleiche entgegengesetzte reelle Wurzeln $\mathfrak{C}'C'$ und $\mathfrak{C}'C_1$ und zwei gleiche entgegengesetzte imaginäre Wurzeln $\mathfrak{C}'J'$ und $\mathfrak{C}'\mathfrak{J}'$.

Ist a positiv und sein absoluter Werth kleiner als $\frac{1}{4}c^2$, d. h. ist die Ordinate des Anfangspunktes, in absoluter Bedeutung genommen, kleiner als $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0$, so schneidet die wirkliche Abscissen-Axe die biquadratische Linie in vier Punkten, und die vorgelegte Gleichung hat zwei Paar gleiche, aber entgegengesetzte, reelle Wurzeln.

Ist aber a negativ und sein absoluter Werth grösser als $\frac{1}{4}c^2$, d. h. ist die Ordinate des Anfangspunktes, in absoluter Bedeutung genommen, grösser als $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0$, so schneidet die wirkliche Abscissen-Axe die biquadratische Linie nicht, aber die Halbirungs-Curve der Scheitel in zwei Punkten, und die vorgelegte Gleichung hat zwei Paar gleiche, aber entgegengesetzte, imaginäre Wurzeln.

300.

Ist:

1) $$z = + cx^2 + x^4$$

Digitized by Google

die zu construirende Gleichung, so können wir unsere Betrachtungen über dieselbe an [295.] anschliessen, indem wir daselbst b gleich Null setzen, wir können aber auch hierbei [296. und 297.] zu Grunde legen, indem wir daselbst $+c$ für $-c$ schreiben.

Die Gleichung für die Curve der Summe zweier Wurzeln und für die Halbirungs-Curve der Scheitel ergiebt sich hiernach:

2) $$z = \tfrac{1}{4}[-c^2 - 2cx^2 - x^4],$$

3) $$z = \tfrac{1}{4}[-c^2 - 2c(2x)^2 - (2x)^4],$$

und es folgt, dass jedem Werthe von x ein negativer Werth von z entspreche, und dass für $x = 0$

4) $$z = -\tfrac{1}{4}c^2$$

sei.

Die absteigenden Aeste der Curve der Summe zweier Wurzeln und der Halbirungs-Curve der Scheitel vereinigen sich hiernach, wie [298. 9)], in einer Entfernung

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0 = -\tfrac{1}{4}c^2, \qquad \text{(Taf. X. Fig. 10.)}$$

unterhalb des natürlichen Anfangspunktes $\mathfrak{M}$, in dem Punkte $\mathfrak{M}_0$, und die aufsteigenden Aeste fallen weg oder mit der künstlichen Ordinaten-Axe zusammen.

Die Versinnlichung der imaginären Scheitel-Aeste kann analog [299. 2)] geschehen und Gleichung 1) geht dann über in:

5) $$z = -cx^2 + x^4.$$

Es geht hieraus hervor, dass die Curve der Gleichung [298. 5)] die imaginäre Scheitel-Curve der Gleichung 1) sei, sowie umgekehrt die Curve der Gleichung 1) die imaginäre Scheitel-Curve des einspringenden Scheitels der Curve der Gleichung [298. 5)] ist. Es folgt weiter:

6) Die imaginäre Scheitel-Curve der Gleichung 1) hat einen einspringenden und zwei congruente ausspringende Scheitel, deren Höhe $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0 = \frac{1}{4}c^2$ ist, und die gemeinschaftliche Tangente dieser Scheitel ist zugleich Tangente der Curve der Summe zweier Wurzeln und der Halbirungs-Curve der Scheitel.

7) Die Bestimmung der beiden andern imaginären Curven $J''V$, $W\mathfrak{J}''$ und $J_{\prime\prime}W$, $V\mathfrak{J}_{\prime\prime}$ geschieht analog [299. 3)]. Zur Erklärung der Taf. X. Fig. 10. mag hier erwähnt werden, dass die Punkte V und W, als Scheitelpunkte der imaginären Curve

$\mathfrak{Z}'W\mathfrak{M}VJ'$, mit dieser, in der durch die natürliche Ordinaten-Axe auf die Constructions-Ebene senkrecht gelegten Ebene liegend gedacht werden müssen, dass aber die zusammengehörigen imaginären Aeste $J''V$ und $WJ_{''}$, sowie $\mathfrak{Z}''W$ und $V\mathfrak{Z}_{''}$ aus dieser senkrechten Ebene herausgetreten und in einer gekrümmten Fläche liegend zu denken sind, welche senkrecht auf die Constructions-Ebene durch die Halbirungs-Curve der Scheitel $\mathfrak{M}_0\mathfrak{C}''$ und $\mathfrak{M}_0\mathfrak{C}_{''}$ gelegt ist.

8) Die geometrische Beurtheilung der Wurzeln für verschiedene Lagen der wirklichen Abscissen-Axe ergiebt sich leicht, aus Taf. X. Fig. 10.:

Ist a negativ, so schneidet die wirkliche Abscissen-Axe $A'X'$ die biquadratische Linie stets in zwei Punkten C' und C_1, und die vorgelegte Gleichung hat in diesem Falle zwei gleiche entgegengesetzte reelle Wurzeln $\mathfrak{C}'C'$ und $\mathfrak{C}'C_1$ und zwei gleiche entgegengesetzte imaginäre Wurzeln, welche, wie [299. 1)], keinen reellen Theil haben.

Ist a positiv und sein absoluter Werth kleiner als $\frac{1}{4}c^2$, d. h. ist die Ordinate des Anfangspunktes, in absoluter Bedeutung genommen, kleiner als $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0$; so schneidet die auf der wirklichen Abscissen-Axe $A^{IV}X^{IV}$ senkrecht errichtete Ebene, beziehungsweise die imaginäre Absissen-Axe $A^{IV}X^{IV}$ die imaginären Scheitel in vier Punkten J^{IV}, $\mathfrak{Z}^{IV}$, $\mathfrak{Z}_{IV}$, J_{IV}, und die vorgelegte Gleichung hat zwei Paar gleiche, aber entgegengesetzte imaginäre Wurzeln:

$$\mathfrak{M}^{IV}J^{IV},\quad \mathfrak{M}^{IV}J_{IV},\quad \mathfrak{M}^{IV}\mathfrak{Z}^{IV},\quad \mathfrak{M}^{IV}\mathfrak{Z}_{IV},$$

welche keinen reellen Theil haben [229. 6)].

Ist aber a negativ und sein absoluter Werth grösser als $\frac{1}{4}c^2$, d. h. ist die Ordinate des Anfangspunktes, in absoluter Bedeutung genommen, grösser als $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0$; so schneidet die wirkliche Abscissen-Axe $A''X''$ die Halbirungs-Curve der Scheitel in zwei Punkten $\mathfrak{C}''$ und $\mathfrak{C}_{''}$, und die imaginären Aeste werden von der auf der wirklichen Abscissen-Axe senkrecht stehenden Ebene in vier Punkten: J'', $\mathfrak{Z}''$, $\mathfrak{Z}_{''}$, J'' geschnitten. Die vorgelegte Gleichung hat in diesem Falle zwei Paar gleiche, aber entgegengesetzte imaginäre Wurzeln mit reellen Theilen.

XXX.

Note sur les formules d'addition des fonctions elliptiques.

Par

Monsieur Dr. *E. G. Björling*

à Westerås en Suède.

(Extrait de l'Aperçu des Transactions de l'Académ. des sciences de Stockholm, séance du 18e avril 1866.)

Jacobi a présenté dans son mémoire „Sur la rotation d'un corps", inséré dans le Journal de Crelle [T. 39 (1850) pag. 324 et seqq.], un tableau de 16 formules d'addition pour les fonctions elliptiques, dont voici une, celle-ci bien connue depuis longtemps,

$$\cos\mathrm{am}(\alpha+\beta) = \cos\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\alpha\sin\mathrm{am}\,\beta.\Delta\mathrm{am}(\alpha+\beta),$$

en indiquant tout à la fois, comment se fait d'une d'elles, quelle que ce soit, la déduction de toutes les autres. Mais la manière dont il s'est servi pour cette déduction, n'est point des plus simples, et l'on ne peut que s'étonner de ce que ni le célèbre auteur lui-même, ni d'autres après lui, n'ont porté assez d'attention à ce sujet *).

Voiçi une question qui me paraît bien à propos. En effet, ne serait-il pas suffisant içi, de même que pour les fonctions circulaires, d'employer tout simplement les relations qui existent entre les fonctions elliptiques des arguments complémentaires? Quant à la réponse, qui évidemment doit être affirmative, je vais montrer qu'elle est aussi facile que la question elle-même est simple.

En mettant de côté les notations originaires, devenues à peu près classiques, qui ont été employées dans la formule citée

---

*) Cependant, l'on voit par la Note de M. O.-J.-Broch „Sur les formules d'addition des fonctions elliptiques de M. C.-G.-J.-Jacobi", insérée dans le Compte rendu du 12 Déc. 1864, que cette matière a attiré au moins quelque peu d'attention des géomètres; à ne pas parler spécialement du Traité de M. Schellbach „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen" (Berlin 1861).

Digitized by Google

ci-dessus, pour représenter les trois fonctions elliptiques simples, je me servirai des notations suivantes plus courtes:

$$\mathfrak{S}(a),\quad \mathfrak{C}(a),\quad \mathfrak{D}(a)\ ^{*)},$$

et je ferai voir comment de la formule fondamentale

$$(1)\ .\ .\ .\ .\ \mathfrak{C}(a+b) = \mathfrak{C}(a)\,\mathfrak{C}(b) - \mathfrak{S}(a)\,\mathfrak{S}(b).\mathfrak{D}(a+b)$$

toutes les autres formules d'addition nommées ci-dessus peuvent être directement déduites sans autre intermédiaire que — comme je viens de dire — celle des relations bien connues entre les fonctions elliptiques des arguments **complémentaires**:

$$(\mathrm{A})\ .\ .\ .\ .\ \begin{cases} \mathfrak{S}(K-a)^{**)} = \dfrac{\mathfrak{C}(a)}{\mathfrak{D}(a)} = \mathfrak{S}(K+a), \\ \mathfrak{C}(K-a) = \dfrac{k'\mathfrak{S}(a)}{\mathfrak{D}(a)} = -\mathfrak{C}(K+a), \\ \mathfrak{D}(K-a) = \dfrac{k'}{\mathfrak{D}(a)} = \mathfrak{D}(K+a). \end{cases}$$

En effet, de ces formules mêmes (A) et (1) on obtient presque immédiatement, ou bien en qualité de corollaires, non seulement cette formule

$$(2)\ .\ .\ .\ \mathfrak{C}(a) = \mathfrak{C}(b)\,\mathfrak{C}(a+b) + \mathfrak{S}(b)\,\mathfrak{S}(a+b).\mathfrak{D}(a),$$

où se reduit évidemment la formule même (1), si, après avoir mis d'abord a au lieu de $a+b$ (et, par suite, $a-b$ au lieu de a), puis l'on remplace $-b$ par b, mais aussi les groupes suivants des formules, comme je ferai voir maintement:

I. En remplaçant

$$a \text{ par } a+K,$$

---

*) Ici ce n'est pas l'endroit d'une explication plus exacte sur ce sujet. Ce que je voudrais faire observer au lecteur, c'est que **ce n'est point dans le seul but d'être bref** que j'emploie — et cela **non seulement** dans cette note-ci — ces notations nouvelles au lieu des susdites „originaires", du moins toutes les fois qu'il ne s'agit pas seulement d'argument **reel** et de module <1 (positif ou zéro). Une autre fois j'espère avoir l'occasion de m'expliquer davantage sur ce sujet.

) Bien qu'à nos jours on en soit venu presqu'à ne pas savoir, sans qu'il ne soit expressément dit, ce que doit être entendu par K dans un mémoire qui traite des fonctions elliptiques, du moins s'il ne s'agit pas uniquement d'arguments réels et de module <1 (positif ou zéro); cependant, comme nous avons indiqué içi que $K-a$ sera l'argument **complémentaire de a, toute autre explication sur ce sujet en est devenue superflue en ce qui concerne cette Note.

Digitized by Google

on aura immédiatement de (1), en vertu des formules (A), cette relation nouvelle:

$$(3) \ldots \mathfrak{S}(a+b)\mathfrak{D}(a) = \mathfrak{C}(a)\mathfrak{S}(b) + \mathfrak{C}(b)\mathfrak{S}(a)\mathfrak{D}(a+b);$$

puis de cette formule, en remplaçant $a+b$ par b (par suite, b par $b-a$) et ensuite a per $-a$:

$$(4) \ldots \mathfrak{S}(a+b)\mathfrak{C}(a) = \mathfrak{D}(a)\mathfrak{S}(b) + \mathfrak{D}(b)\mathfrak{S}(a)\mathfrak{C}(a+b),$$

et enfin d'une, quelle que ce soit, de ces deux formules, en remplaçant $a+b$ par a (par suite, a par $a-b$) et ensuite b par $-b$:

$$(5) \ldots \mathfrak{D}(a+b)\mathfrak{S}(a) + \mathfrak{C}(a+b)\mathfrak{S}(b) = \mathfrak{C}(b)\mathfrak{D}(a)\mathfrak{S}(a+b).$$

II. De même, en remplaçant simultanément

$$\left\{\begin{array}{l} a \text{ par } a+K \\ \text{et} \\ b \text{ par } b-K, \end{array}\right.$$

on aura de (1), en vertu des mêmes formules (A), celle-ci:

$$(6) \ldots \mathfrak{D}(a+b)\mathfrak{C}(a)\mathfrak{C}(b) - \mathfrak{C}(a+b)\mathfrak{D}(a)\mathfrak{D}(b) = k'^2\mathfrak{S}(a)\mathfrak{S}(b);$$

dont, par le même remplacement que ci-dessus à la transition de la 1ère à la 2e formule dans I.:

$$(7) \ldots k'^2\mathfrak{S}(a+b)\mathfrak{S}(a) = \mathfrak{D}(a+b)\mathfrak{D}(a)\mathfrak{C}(b) - \mathfrak{C}(a+b)\mathfrak{C}(a)\mathfrak{D}(b).$$

III. En éliminant, au moyen de la formule (6), $\mathfrak{S}(a)\mathfrak{S}(b)$ de la formule fondamentale (1), on aura:

$$k'^2\mathfrak{C}(a+b) = \mathfrak{C}(a)\mathfrak{C}(b).[k'^2 - \mathfrak{D}^2(a+b)] + \mathfrak{D}(a)\mathfrak{D}(b)\mathfrak{D}(a+b).\mathfrak{C}(a+b),$$

et par suite, en vertu de la relation connue entre $\mathfrak{C}^2$ et $\mathfrak{D}^2$, l'on obtient cette formule remarquable:

$$(8) \ldots \mathfrak{D}(a)\mathfrak{D}(b)\mathfrak{D}(a+b) = k^2\mathfrak{C}(a)\mathfrak{C}(b)\mathfrak{C}(a+b) + k'^2.$$

IV. Et enfin de cette dernière formule on aura, par remplacement de

$$\left\{\begin{array}{l} a \text{ par } a+K \\ \text{et} \\ b \text{ par } b-K, \end{array}\right.$$

la relation

$$(9) \ldots \mathfrak{D}(a+b) = \mathfrak{D}(a)\mathfrak{D}(b) - k^2\mathfrak{S}(a)\mathfrak{S}(b).\mathfrak{C}(a+b),$$

tout à fait analogue à la formule fondamentale (1); dont, par la même opération qui de (1) a donné (2), celle-ci:

$$(10) \ldots \mathfrak{D}(a) = \mathfrak{D}(b)\mathfrak{D}(a+b) + k^2\mathfrak{S}(b)\mathfrak{S}(a+b).\mathfrak{C}(a).$$

Maintenant, en comparant ces 10 formules (1), (2), ... (10) aux (16) formules de Jacobi, on voit aisément que celles-ci y sont toutes comprises. Si Jacobi en a un plus grand nombre, cela provient évidemment de ce qu'il a eu soin de joindre respectivement à chaque formule pour les fonctions avec les arguments $a+b$, a et b, la formule pour les mêmes fonctions avec les arguments $a+b$, b et a.

Nous avons pris pour formule fondamentale la relation (1), et — à la vérité — laquelle de toutes ces formules d'addition pourrait à meilleur droit prétendre une telle préférence! Cependant, il est évident de ce qui précède qu'on peut arriver aussi bien au but proposé, au moyen des seules formules (A), quelle que soit la formule d'addition qu'on prend pour formule fondamentale de la déduction.

Ajoutons enfin aussi quelques mots à l'égard du rapport intime qui existe entre les formules précédentes et ces formules bien connues:

$$(11)\ldots\left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}(a+b) &= \frac{\mathfrak{C}(a)\mathfrak{C}(b)-\mathfrak{S}(a)\mathfrak{S}(b).\mathfrak{D}(a)\mathfrak{D}(b)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(a)\mathfrak{S}^2(b)}, \\ \mathfrak{D}(a+b) &= \frac{\mathfrak{D}(a)\mathfrak{D}(b)-k^2\mathfrak{S}(a)\mathfrak{S}(b).\mathfrak{C}(a)\mathfrak{C}(b)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(a)\mathfrak{S}^2(b)}, \\ \mathfrak{S}(a+b) &= \frac{\mathfrak{S}(a)\mathfrak{C}(b)\mathfrak{D}(b)+\mathfrak{S}(b)\mathfrak{C}(a)\mathfrak{D}(a)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(a)\mathfrak{S}^2(b)}. \end{aligned}\right.$$

En effet, la 1ère et la 2e de ces formules constituent précisément, comme on verra au premier coup d'oeil, le résultat immédiat de l'élimination des termes $\mathfrak{D}(a+b)$ et $\mathfrak{C}(a+b)$, respectivement, entre la formule fondamentale (1) et l'analogue (9). Quant à la 3e, on l'obtient ensuite, tout aussi immédiatement, ou de (3) ou de (4) ou de (5), en éliminant respectivement $\mathfrak{D}(a+b)$ ou $\mathfrak{C}(a+b)$ ou toutes les deux au moyen des deux premières (11). Voilà donc une déduction de celles-ci (11), qui en simplicité est bien préférable à toutes celles dont on s'est servi jusqu'à présent.

Il paraît que, surtout en publiant un Cours préliminaire des fonctions elliptiques, où l'argument serait supposé réel et le module positif (<1) ou zéro, on ferait bien de profiter de ce qui a été dit ci-dessus relativement aux formules d'addition de ces fonctions; et, à la vérité, le besoin d'un tel Cours n'a pas été encore aujourd'hui satisfait entièrement.

Digitized by Google

XXXI.

Ueber das von drei Berührenden einer Parabel gebildete Dreieck.

Von
dem Herausgeber.

§. 1.

Die Gleichung der Berührenden einer durch die Gleichung:

$$1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^2 = px$$

charakterisirten Parabel in dem Punkte $(x_0 y_0)$ dieser Parabel ist bekanntlich:

$$2) \ldots\ldots\ldots \quad y - y_0 = \frac{p}{2y_0}(x - x_0),$$

oder:

$$3) \ldots\ldots\ldots \quad y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0),$$

oder:

$$4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2x_0 y - y_0 x = x_0 y_0.$$

Ist nun r_0 der von dem Brennpunkte der Parabel nach dem Punkte $(x_0 y_0)$ gezogene Vector der Parabel, und α_0 der von diesem Vector mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° zählt, wobei man zu beachten hat, dass die positiven x von dem Scheitel der Parabel nach dem Brennpunkte hin genommen sind; so ist bekanntlich *):

*) M. s. meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. II. S. 179.

$$5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad r_0 = \frac{p}{4\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2}.$$

Für den Brennpunkt als Anfang sind die Coordinaten des Punktes $(x_0 y_0)$:

$$r_0 \cos\alpha_0, \quad r_0 \sin\alpha_0;$$

also ist, weil $\frac{1}{4}p$, 0 die Coordinaten des Brennpunkts sind, nach den bekannten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x_0 = \tfrac{1}{4}p + r_0\cos\alpha_0, \quad y_0 = r_0\sin\alpha_0;$$

folglich, wenn man in diese Formeln aus 5) den Werth von r_0 einführt, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$6) \ldots\ldots \quad x_0 = \tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2, \quad y_0 = \tfrac{1}{2}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0;$$

welche Ausdrücke man noch in die Gleichung 4) der Berührenden in dem Punkte $(x_0 y_0)$ einführen könnte.

§. 2.

Wenn $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$ zwei Punkte der Parabel sind, so sind nach 4):

$$2x_0 y - y_0 x = x_0 y_0,$$
$$2x_1 y - y_1 x = x_1 y_1$$

die Gleichungen der Berührenden in diesen Punkten, und, wenn nun x_{01}, y_{01} die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser beiden Berührenden bezeichnen, so hat man also zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$2x_0 y_{01} - y_0 x_{01} = x_0 y_0,$$
$$2x_1 y_{01} - y_1 x_{01} = x_1 y_1;$$

aus denen sich leicht die Formeln:

$$7) \ldots \quad x_{01} = \frac{x_0 x_1 (y_0 - y_1)}{x_0 y_1 - y_0 x_1}, \quad y_{01} = \frac{y_0 y_1 (x_0 - x_1)}{2(x_0 y_1 - y_0 x_1)}$$

ergeben.

Weil nun nach 6):

$$x_0 = \tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2, \quad y_0 = \tfrac{1}{2}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0;$$
$$x_1 = \tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2, \quad y_1 = \tfrac{1}{2}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1$$

ist; so ist:

Digitized by Google

$$x_0-x_1=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2)$$
$$=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)$$
$$=-\frac{p\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{4\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2},$$

$$y_0-y_1=\tfrac{1}{2}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)$$
$$=-\frac{p\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1};$$

$$x_0x_1(y_0-y_1)=-\frac{p^3\cos\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\cos\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{32\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^3\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^3},$$

$$y_0y_1(x_0-x_1)=-\frac{p^3\cos\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{16\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^3\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^3};$$

$$\frac{x_0x_1(y_0-y_1)}{x_0y_1-y_0x_1}=\tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1,$$

$$\frac{y_0y_1(x_0-x_1)}{2(x_0y_1-y_0x_1)}=\tfrac{1}{4}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1);$$

also hat man nach 7) die bemerkenswerthen Formeln:

$$8)\ \ldots\ \begin{cases} x_{01}=\tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1, \\ y_{01}=\tfrac{1}{4}p.\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1). \end{cases}$$

§. 3.

Seien nun

$$(x_0y_0),\quad (x_1y_1),\quad (x_2y_2)$$

drei Punkte einer Parabel, durch welche Berührende an dieselbe gelegt sind. Die Durchschnittspunkte der

1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 1sten

Berührenden seien respective:

$$(x_{01}y_{01}),\quad (x_{12}y_{12}),\quad (x_{20}y_{20})$$

oder der Kürze wegen:

$$A_2,\quad A_0,\quad A_1;$$

so ist, wenn wir uns überall ähnlicher Bezeichnungen bedienen, wie im vorhergehenden Paragraphen, nach 8):

9)

$$x_{01}=\tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1,\quad y_{01}=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)=\tfrac{1}{4}p\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1},$$

$$x_{12}=\tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2,\quad y_{12}=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2)=\tfrac{1}{4}p\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$x_{20}=\tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0,\quad y_{20}=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0)=\tfrac{1}{4}p\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0}.$$

Bezeichnen wir die Seiten

$$A_1A_2,\quad A_2A_0,\quad A_0A_1$$

des von den drei Berührenden der Parabel gebildeten Dreiecks $A_0A_1A_2$ respective durch

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2;$$

so ist:

$$\begin{aligned}
a_0^2 &= (x_{20}-x_{01})^2+(y_{20}-y_{01})^2\\
&= \tfrac{1}{16}p^2(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)^2\\
&\quad+\tfrac{1}{16}p^2(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)^2\\
&= \tfrac{1}{16}p^2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0^2(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)^2\\
&\quad+\tfrac{1}{16}p^2(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)^2\\
&= \tfrac{1}{16}p^2(1+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0^2)(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2-\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)^2\\
&= \frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2}{16\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2},
\end{aligned}$$

und wir haben also für die Quadrate der drei Seiten a_0, a_1, a_2 des Dreiecks $A_0A_1A_2$ die folgenden Ausdrücke:

$$10)\ \ldots\quad\left\{\begin{aligned}
a_0^2 &= \frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2}{16\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2},\\
a_1^2 &= \frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)^2}{16\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2},\\
a_2^2 &= \frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2}{16\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2};
\end{aligned}\right.$$

aus denen sich die folgenden Gleichungen ergeben:

$$11)\ \ldots\ldots\quad\frac{a_0^2}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2}=\frac{a_1^2}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)^2}=\frac{a_2^2}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2}$$

$$=\frac{p^2}{16\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2}.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen der Punkte

Digitized by Google

$(x_{01}y_{01})$, $(x_{12}y_{12})$, $x_{20}y_{20})$ oder A_2, A_0, A_1

von dem Brennpunkte der Parabel respective durch

$$r_{01}, \quad r_{12}, \quad r_{20};$$

so ist:

$$\begin{aligned}
r_{01}^2 &= (x_{01} - \tfrac{1}{4}p)^2 + y_{01}^2 \\
&= \tfrac{1}{16}p^2(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cot\tfrac{1}{2}\alpha_1 - 1)^2 + \tfrac{1}{16}p^2(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0 + \cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)^2 \\
&= \frac{p^2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)^2}{16\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2} + \frac{p^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)^2}{16\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2} \\
&= \frac{p^2}{16\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2},
\end{aligned}$$

und weil nun die Winkel α_0, α_1, α_2 sämmtlich zwischen 0 und 360°, folglich die Winkel $\frac{1}{2}\alpha_0$, $\frac{1}{2}\alpha_1$, $\frac{1}{2}\alpha_2$ sämmtlich zwischen 0 und 180° liegen, also die Sinus der letzteren Winkel sämmtlich positiv sind; so haben wir die folgenden Formeln:

$$12) \ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
r_{01} &= \frac{p}{4\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1}, \\
r_{12} &= \frac{p}{4\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2}, \\
r_{20} &= \frac{p}{4\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0};
\end{aligned}\right.$$

aus denen sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
13) \ldots\ldots\ldots\ p &= 4r_{01}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \\
&= 4r_{12}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2 \\
&= 4r_{20}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0
\end{aligned}$$

und

$$14) \ldots\ r_{01}r_{12}r_{20} = \frac{p^3}{64\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2{}^2}$$

ergeben.

§. 4.

Bezeichnet F den Brennpunkt der Parabel, so sind die Gleichungen der Linien

$$FA_0, \quad FA_1, \quad FA_2,$$

wie leicht aus 9) erhellet:

$$15) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} y=\tan \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2).(x-\frac{1}{4}p), \\ y=\tan \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0).(x-\frac{1}{4}p), \\ y=\tan \frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1).(x-\frac{1}{4}p). \end{array}\right.$$

Die Coordinaten der Mittelpunkte der Linien

$$FA_0, \quad FA_1, \quad FA_2$$

sind, wie gleichfalls aus 9) sich leicht ergiebt:

$$\frac{1}{8}p.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}, \quad \frac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

$$\frac{1}{8}p.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0}, \quad \frac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0};$$

$$\frac{1}{8}p.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}, \quad \frac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}.$$

Also sind die Gleichungen der in den Mittelpunkten von

$$FA_0, \quad FA_1, \quad FA_2$$

auf diese Linien errichteten Perpendikel:

16)

$$y-\frac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}=-\cot\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2).\left\{x-\frac{1}{8}p.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}\right\},$$

$$y-\frac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0}=-\cot\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0).\left\{x-\frac{1}{8}p.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0}\right\},$$

$$y-\frac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}=-\cot\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1).\left\{x-\frac{1}{8}p.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}\right\}.$$

Die erste dieser drei Gleichungen bringt man leicht auf die folgende Form:

$$x\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+y\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=\frac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)^2+\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}$$

$$=\frac{1}{8}p.\frac{1-\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}$$

$$=\frac{1}{8}p.\frac{1+2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

und die Gleichungen der drei in Rede stehenden Perpendikel sind also überhaupt:

17)

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$=\tfrac{1}{8}p.\frac{1+2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)+y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)$$
$$=\tfrac{1}{8}p.\frac{1+2\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0},$$

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)+y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)$$
$$=\tfrac{1}{8}p.\frac{1+2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Mittelpunkts des um das Dreieck FA_0A_1 beschriebenen Kreises durch X, Y; so haben wir nach den vorstehenden Gleichungen zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$X\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+Y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$=\tfrac{1}{8}p.\frac{1+2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$X\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)+Y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)$$
$$=\tfrac{1}{8}p.\frac{1+2\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen Y auf gewöhnliche Weise, so steht auf der linken Seite der dadurch hervorgehenden Gleichung die Grösse:

$$X\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\}$$
$$=X\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1),$$

und auf der rechten Seite dieser Gleichung steht ein Product, dessen einer Factor $\frac{1}{8}p$, und dessen anderer Factor ein Bruch ist mit dem Nenner:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2$$

und mit dem Zähler:

$$\begin{aligned}
&2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)-2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\\
&+4\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\\
&-4\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\\
=\;&\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+2\alpha_0)-\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2+\cos\tfrac{1}{2}(2\alpha_1+\alpha_2)\\
&+4\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\\
=\;&2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\};
\end{aligned}$$

Digitized by Google

daher ist also:

$$X\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)$$
$$=\tfrac{1}{2}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Eliminirt man ferner aus den beiden obigen Gleichungen auf gewöhnliche Weise X, so steht auf der linken Seite der dadurch hervorgehenden Gleichung die Grösse:

$$Y\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\}$$
$$=Y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1),$$

und auf der rechten Seite dieser Gleichung steht ein Product, dessen einer Factor $\frac{1}{2}p$ und dessen anderer Factor ein Bruch ist mit dem Nenner:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2$$

und dem Zähler:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(2\alpha_1+\alpha_2)-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+2\alpha_0)+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2$$
$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2);$$

daher ist also:

$$Y\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)=-\tfrac{1}{2}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Leicht lässt sich nun zeigen, dass keine der Grössen

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)$$

verschwindet; denn wäre etwa

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)=0,$$

so wäre, wenn $\varkappa$ eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)=\varkappa\pi,$$

also:

$$\alpha_0-\alpha_1=2\varkappa\pi;$$

weil der absolute Werth von $\alpha_0-\alpha_1$ nicht grösser als 2π ist, so kann $\varkappa$ nur -1, oder 0, oder $+1$, also nur:

$$\alpha_0-\alpha_1=-2\pi,\quad \alpha_0-\alpha_1=0,\quad \alpha_0-\alpha_1=+2\pi;$$

folglich:

$$\alpha_1=\alpha_0+2\pi,\quad \alpha_0=\alpha_1,\quad \alpha_0=\alpha_1+2\pi$$

sein, was nicht möglich ist, wenn nicht zwei der drei Punkte der Parabel, durch welche an dieselbe Berührende gelegt worden sind, mit einander zusammenfallen sollen, welcher Fall natürlich ausgeschlossen werden muss; ganz eben so zeigt man, dass auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2) \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)$$

nicht verschwinden können.

Da also $\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)$ nicht verschwindet, so ergeben sich aus dem Obigen für die Coordinaten X, Y des Mittelpunkts des um das Dreieck FA_0A_1 beschriebenen Kreises die folgenden merkwürdigen Ausdrücke:

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{8}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},\\ Y &= -\tfrac{1}{8}p.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.\end{aligned}\right.$$

Bezeichnet R den Halbmesser des um das Dreieck FA_0A_1 beschriebenen Kreises, so ist:

$$R^2=(X-\tfrac{1}{4}p)^2+Y^2,$$

also nach den vorstehenden Gleichungen:

$$R^2=\frac{1}{64}p^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2}+\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2}\right\}$$
$$=\frac{p^2}{64\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2},$$

und folglich, weil die Grössen

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0,\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1,\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha_2$$

sämmtlich positiv sind:

$$19)\ \ldots\ldots\ R=\frac{p}{8\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

ein gleichfalls sehr bemerkenswerther Ausdruck.

Weil die Ausdrücke 18) und 19) der Coordinaten X, Y des Mittelpunkts des um das Dreieck FA_0A_1 beschriebenen Kreises und des Halbmessers R dieses Kreises in Bezug auf α_0, α_1, α_2 ganz symmetrisch gebildet sind, so ist klar, dass man, wenn man die Coordinaten des Mittelpunkts und den Halbmesser des um das Dreieck FA_1A_2 und des um das Dreieck FA_2A_0 beschriebenen Kreises bestimmt, ganz zu denselben Ausdrücken wie vorher geführt werden muss, woraus sich ergiebt, dass die um die Dreiecke

$$FA_0A_1,\quad FA_1A_2,\quad FA_2A_0$$

beschriebenen drei Kreise in einen Kreis zusammenfallen, und dass also die vier Punkte A_0, A_1, A_2, F in einem Kreise liegen, oder das Viereck $A_0A_1A_2F$ ein sogenanntes centrisches Viereck oder ein Kreisviereck ist, welches unmittelbar zu dem folgenden, sehr merkwürdigen, übrigens bereits schon bekannten*) Satze führt:

Der um das von drei an eine Parabel gelegten beliebigen Berührenden gebildete Dreieck $A_0A_1A_2$ beschriebene Kreis geht immer auch durch den Brennpunkt F der Parabel; die Coordinaten X, Y des Mittelpunkts dieses Kreises sind:

$$X = \tfrac{1}{8}p\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y = -\tfrac{1}{8}p\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

und sein Halbmesser R ist:

$$R = \frac{p}{8\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

§. 5.

Weil

$$(\alpha_0-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_0)=0$$

ist, so haben die Differenzen

$$\alpha_0-\alpha_1,\quad \alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_2-\alpha_0$$

nicht sämmtlich gleiche Vorzeichen; zwei dieser Differenzen haben also immer gleiche Vorzeichen, und mit denselben hat die dritte Differenz ungleiches Vorzeichen. Mit

$$\alpha_0-\alpha_1,\quad \alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_2-\alpha_0$$

haben natürlich

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1),\quad \tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2),\quad \tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)$$

gleiche Vorzeichen, und weil die absoluten Werthe dieser letzteren Grössen 180° nicht übersteigen, so werden mit

---

*) M. s. z. B. Educational Times. August 1867. p. 111., wo der Satz von Herrn Hirst erwähnt und zu dem Beweise eines anderen Satzes verwandt wird.

$$\alpha_0-\alpha_1,\quad \alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_2-\alpha_0$$

offenbar immer auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)$$

gleiche Vorzeichen haben. Nehmen wir nun grösserer Bestimmtheit wegen an, dass $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_0$ gleiche Vorzeichen haben und dass $\alpha_0-\alpha_1$ damit ungleiches Vorzeichen hat, so haben auch $\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)$ gleiche Vorzeichen, und $\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)$ hat damit ungleiches Vorzeichen. Weil nun die Sinus

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0,\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1,\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha_2$$

immer positiv sind, so ist nach 10) unter der gemachten Voraussetzung:

$$20)\;\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} a_0&=\pm\frac{p\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{4\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},\\ a_1&=\pm\frac{p\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{4\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},\\ a_2&=\mp\frac{p\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{4\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2};\end{aligned}\right.$$

wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen und die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem $\alpha_0-\alpha_1$, $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_0$ beziehungsweise

negativ, positiv, positiv

oder

positiv, negativ, negativ

sind.

Nach einem bekannten Satze ist:

$$\Delta A_0A_1A_2=\frac{a_0a_1a_2}{4R},$$

$$\Delta A_0A_1F=\frac{a_2r_{12}r_{20}}{4R},$$

$$\Delta A_1A_2F=\frac{a_0r_{20}r_{01}}{4R},$$

$$\Delta A_2A_0F=\frac{a_1r_{01}r_{12}}{4R};$$

also nach 20), 12), 19):

21)

$$\Delta A_0A_1A_2 = \mp \frac{p^2 \sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{2^5.\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2},$$

$$\Delta A_0A_1F = \mp \frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{2^5.\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2},$$

$$\Delta A_1A_2F = \pm \frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{2^5.\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$\Delta A_2A_0F = \pm \frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{2^5.\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Hiernach ist:

$$\Delta A_0A_1F.\Delta A_1A_2F.\Delta A_2A_0F$$

$$= \mp \frac{p^6\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{2^{15}.\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^4.\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^4.\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^4}$$

$$= \mp\frac{p^2}{2^4}.\frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{2^5.\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2}.\frac{p^2}{2^6.\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\alpha_2{}^2},$$

also:

$$22)\ldots\ \Delta A_0A_1F.\Delta A_1A_2F.\Delta A_2A_0F = \frac{p^2R^2.\Delta A_0A_1A_2}{2^4},$$

oder:

$$23)\ldots\ pR = 4\sqrt{\frac{\Delta A_0A_1F.\Delta A_1A_2F.\Delta A_2A_0F}{\Delta A_0A_1A_2}}.$$

Bezeichnen wir den Halbmesser des in das Dreieck $A_0A_1A_2$ beschriebenen Kreises durch r, so ist bekanntlich:

$$r = \frac{2\Delta A_0A_1A_2}{a_0+a_1+a_2}.$$

Nach 20) ist:

$$a_0+a_1+a_2 = \pm\tfrac{1}{4}p.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)-\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

und da nun:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)$$

$$= -2\sin\tfrac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_1-2\alpha_2)$$

$$-2\sin\tfrac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)$$

$$= -2\sin\tfrac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\{\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_1-2\alpha_2)+\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\}$$

$$= -4\sin\tfrac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)$$

ist, so ist:

$$a_0+a_1+a_2=\mp\frac{p\sin\frac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)\cos\frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

also nach dem Obigen:

$$r=\frac{p^2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{2^4.\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2}$$

$$\times\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{p\sin\frac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)\cos\frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)},$$

und folglich offenbar:

$$24)\ \ldots\ldots\ r=\frac{p\cos\frac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Leicht kann man auf ähnliche Weise auch Ausdrücke für die Halbmesser der in die Dreiecke

$$A_0A_1F,\quad A_1A_2F,\quad A_2A_0F$$

beschriebenen Kreise finden, was wir jetzt nicht weiter ausführen wollen.

Die Winkel des Dreiecks $A_0A_1A_2$ wollen wir durch A_0, A_1, A_2 bezeichnen.

Dann ist bekanntlich:

$$\cos A_0=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2-a_0{}^2}{2a_1a_2};$$

nach 20) ist:

$$a_1{}^2+a_2{}^2-a_0{}^2=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)^2+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2-\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2},$$

und da nun

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2$$

$$=\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\}\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\}$$

$$=-2\sin\tfrac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_0-2\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\times2\cos\tfrac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{4}(\alpha_0-2\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-2\alpha_1+\alpha_2)$$

ist, so ist der Zähler des vorstehenden Bruchs:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-2\alpha_1+\alpha_2)\}$$

$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)$$

folglich:

also, wenn man für R seinen bekannten Werth setzt:

$$28)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \pm \dfrac{p\cos\frac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}, \\[2ex] \mathfrak{y} = \dfrac{p\cos\frac{1}{4}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_0)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}. \end{cases}$$

Der Werth von $\mathfrak{y}$ stimmt mit dem oben in 24) gefundenen Werthe von r genau überein, wie es sein muss.

Im Dreieck A_0A_1F ist:

$$\cos\angle A_0FA_1 = \frac{r_{12}{}^2 + r_{20}{}^2 - a_2{}^2}{2r_{12}r_{20}},$$

und nach dem Obigen:

$$r_{12}{}^2 + r_{20}{}^2 - a_2{}^2 = \frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2 + \sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2 - \sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2 + \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2 - \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1(\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 + \cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\alpha_1)$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1),$$

also:

$$r_{12}{}^2 + r_{20}{}^2 - a_2{}^2 = \frac{p^2}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2r_{12}r_{20} = \tfrac{1}{8}p^2\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

also:

$$\cos\angle A_0FA_1 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1).$$

Im Dreieck A_1A_2F ist:

$$\cos\angle A_1FA_2 = \frac{r_{20}{}^2 + r_{01}{}^2 - a_0{}^2}{2r_{20}r_{01}},$$

und nach dem Obigen:

$$r_{20}{}^2 + r_{01}{}^2 - a_0{}^2 = \frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2 + \sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2 - \sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2 + \sin\tfrac{1}{2}\alpha_2{}^2 - \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2(\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2 + \cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2)$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2);$$

Digitized by Google

also:

$$r_{20}^2 + r_{01}^2 - a_0^2 = \frac{p^2}{8} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2r_{20}r_{01} = \tfrac{1}{8}p^2 \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

also:

$$\cos \angle A_1FA_2 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es ist im Dreieck A_2A_0F:

$$\cos \angle A_2FA_0 = \frac{r_{01}^2 + r_{12}^2 - a_1^2}{2r_{01}r_{12}},$$

und nach dem Obigen:

$$r_{01}^2 + r_{12}^2 - a_1^2 = \frac{p^2}{16} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2 + \sin\frac{1}{2}\alpha_0^2 - \sin\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0)^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2 \sin\frac{1}{2}\alpha_1^2 \sin\frac{1}{2}\alpha_2^2};$$

aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2^2 + \sin\tfrac{1}{2}\alpha_0^2 - \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0)^2$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 (\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 + \cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_0)$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0),$$

also:

$$r_{01}^2 + r_{12}^2 - a_1^2 = \frac{p^2}{8} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1^2 \sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2r_{01}r_{12} = \tfrac{1}{8}p^2 \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1^2 \sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

also:

$$\cos \angle A_2FA_0 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0).$$

Hiernach ist also:

$$\cos \angle A_0FA_1 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1),$$
$$\cos \angle A_1FA_2 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2),$$
$$\cos \angle A_2FA_0 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0);$$

folglich nach 25):

$$\cos \angle A_0FA_1 = -\cos A_2,$$
$$\cos \angle A_1FA_2 = \cos A_0,$$
$$\cos \angle A_2FA_0 = \cos A_1.$$

Digitized by Google

Von der Richtigkeit dieser Resultate, die hier nur entwickelt worden sind, um eine Controle für die Richtigkeit der obigen Entwickelung zu haben, wird man sich leicht überzeugen, wenn man nur die rücksichtlich der Lage der Punkte der Parabel, durch welche die Berührenden gezogen worden, oben gemachte Voraussetzung gehörig im Auge behält und sich natürlich erinnert, dass $A_0A_1A_2F$ ein Kreisviereck ist, wie wir oben bereits bewiesen haben. Zur Erläuterung und Veranschaulichung kann die Figur zu dieser Abhandlung auf Taf. XII. dienen.

Im Dreieck A_2A_0F ist:

$$\cos\angle A_2A_0F=\frac{a_1^2+r_{12}^2-r_{01}^2}{2a_1r_{12}},$$

und nach dem Obigen:

$$a_1^2+r_{12}^2-r_{01}^2=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)^2+\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2-\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2};$$

aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)^2+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0^2-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2^2$$

$$=\quad 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0(\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0)$$

$$=-2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0);$$

also:

$$a_1^2+r_{12}^2-r_{01}^2=-\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2a_1r_{12}=\pm\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2};$$

also:

$$\cos\angle A_2A_0F=\mp\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2.$$

Im Dreieck A_1A_2F ist:

$$\cos\angle A_2A_1F=\frac{a_0^2+r_{20}^2-r_{01}^2}{2a_0r_{20}},$$

und nach dem Obigen:

$$a_0^2+r_{20}^2-r_{01}^2=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2+\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2-\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2^2};$$

aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1^2-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2^2$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2(\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2-\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2)$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2);$$

Digitized by Google

also:

$$a_0^2+r_{20}^2-r_{01}=\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2a_0r_{20}=\pm\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

also:

$$\cos\angle A_2A_1F=\pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2.$$

Daher ist:

$$\cos\angle A_2A_0F=-\cos\angle A_2A_1F,$$

was wiederum ganz mit der Natur der Sache übereinstimmt, wobei zur Erläuterung auch jetzt die Figur zu dieser Abhandlung auf Taf. XII. zu vergleichen ist.

Im Dreieck A_0A_1F ist:

$$\cos\angle A_1A_0F=\frac{a_2^2+r_{12}^2-r_{20}^2}{2a_2r_{12}},$$

und nach dem Obigen:

$$a_2^2+r_{12}^2-r_{20}^2=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2+\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2-\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

aber

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\,(\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1-\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1)$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1);$$

also:

$$a_2^2+r_{12}^2-r_{20}^2=\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2a_2r_{12}=\mp\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

also:

$$\cos\angle A_1A_0F=\mp\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1.$$

Im Dreieck A_1A_2F ist:

$$\cos\angle A_1A_2F=\frac{a_0^2+r_{01}^2-r_{20}^2}{2a_0r_{01}},$$

und nach dem Obigen:

$$a_0^2+r_{01}^2-r_{20}^2=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2+\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2-\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

aber:

$$\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2{}^2-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2\\ =\;&2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2(\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2)\\ =&-2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2),\end{aligned}$$

also:

$$a_0^2+r_{01}^2-r_{20}^2=-\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2a_0r_{01}=\pm\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

also:

$$\cos\angle A_1A_2F=\mp\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1.$$

Daher ist:

$$\cos\angle A_1A_0F=\cos\angle A_1A_2F,$$

wie es sein muss.

Im Dreieck A_0A_1F ist:

$$\cos\angle A_0A_1F=\frac{a_2^2+r_{20}^2-r_{12}^2}{2a_2r_{20}},$$

und nach dem Obigen:

$$a_2^2+r_{20}^2-r_{12}^2=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2+\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2-\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

aber:

$$\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0{}^2\\ =\;&2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1(\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1-\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1)\\ =&-2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1),\end{aligned}$$

also:

$$a_2^2+r_{20}^2-r_{12}^2=-\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2a_2r_{20}=\mp\frac{p^2}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0{}^2\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2{}^2};$$

also:

$$\cos\angle A_0A_1F=\pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0.$$

Im Dreieck A_2A_0F ist:

$$\cos \angle A_0A_2F = \frac{a_1^2 + r_{01}^2 - r_{12}^2}{2a_1 r_{01}},$$

und nach dem Obigen:

$$a_1^2 + r_{01}^2 - r_{12}^2 = \frac{p^2}{16} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0)^2 + \sin \frac{1}{2}\alpha_2^2 - \sin \frac{1}{2}\alpha_0^2}{\sin \frac{1}{2}\alpha_0^2 \sin \frac{1}{2}\alpha_1^2 \sin \frac{1}{2}\alpha_2^2};$$

aber:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0)^2 + \sin \tfrac{1}{2}\alpha_2^2 - \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0^2$$

$$= 2\sin \tfrac{1}{2}\alpha_2 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 (\sin \tfrac{1}{2}\alpha_2 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 - \cos \tfrac{1}{2}\alpha_2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0)$$

$$= 2\sin \tfrac{1}{2}\alpha_2 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0);$$

also:

$$a_1^2 + r_{01}^2 - r_{12}^2 = \frac{p^2}{8} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2}\alpha_0^2 \sin \frac{1}{2}\alpha_1^2 \sin \frac{1}{2}\alpha_2};$$

ferner ist nach dem Obigen:

$$2a_1 r_{01} = \pm \frac{p^2}{8} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2}\alpha_0^2 \sin \frac{1}{2}\alpha_1^2 \sin \frac{1}{2}\alpha_2};$$

also:

$$\cos \angle A_0A_2F = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0.$$

Daher ist:

$$\cos \angle A_0A_1F = \cos \angle A_0A_2F,$$

wie es sein muss.

Wir wollen die vorher gefundenen Resultate noch kurz zusammenstellen:

29)

$$\begin{aligned}
\cos A_0 &= \cos \angle A_1FA_2 = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2),\\
\cos A_1 &= \cos \angle A_2FA_0 = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_0),\\
\cos A_2 &= -\cos \angle A_0FA_1 = -\cos \tfrac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \angle A_0A_1F &= \cos \angle A_0A_2F = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0,\\
\cos \angle A_1A_2F &= \cos \angle A_1A_0F = \mp \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1,\\
\cos \angle A_2A_0F &= -\cos \angle A_2A_1F = \mp \cos \tfrac{1}{2}\alpha_2.
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass A_0, A_1, A_2 die Winkel $A_1A_0A_2$, $A_2A_1A_0$, $A_0A_2A_1$ des von den drei Berührenden der Parabel gebildeten Dreiecks sind.

§. 6.

Wir wollen nun zur Bestimmung des Schwerpunkts des durch

die drei Berührenden der Parabel gebildeten Dreiecks $A_0A_1A_2$, dessen Coordinaten X', Y' sein mögen, übergehen, und erinnern zu dem Ende zuerst an die folgenden Formeln der analytischen Geometrie:

Wenn (x_0y_0) und (x_1y_1) zwei Punkte sind, und es soll auf der durch dieselben gehenden Geraden von dem Punkte (x_0y_0) aus nach dem Punkte (x_1y_1) hin ein Stück abgeschnitten werden, welches $\frac{n}{m}$ der Entfernung der Punkte (x_0y_0) und (x_1y_1) von einander beträgt; so sind die Coordinaten x, y des Endpunkts dieses Stücks bekanntlich:

$$x=\frac{(m-n)x_0+nx_1}{m},$$

$$y=\frac{(m-n)y_0+ny_1}{m}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts von A_0A_1 sind:

$$\tfrac{1}{2}(x_{12}+x_{20}),\quad \tfrac{1}{2}(y_{12}+y_{20});$$

nach 9) ist:

$$x_{12}+x_{20}=\tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0),$$

$$y_{12}+y_{20}=\tfrac{1}{4}p\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_2\sin\frac{1}{2}\alpha_0}\right\};$$

also:

$$x_{12}+x_{20}=\frac{p\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2}{4\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$y_{12}+y_{20}=\frac{p}{8}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\sin\frac{1}{2}\alpha_0+2\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\sin\frac{1}{2}\alpha_1}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

der Zähler des letzteren Bruchs ist nach einer bekannten Zerlegung:

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0-\alpha_1)&\\ -\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)&\\ =2\{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\};&\end{aligned}$$

daher sind die Coordinaten des Mittelpunkts von A_0A_1:

$$\frac{p}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$\frac{p}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Von diesem Mittelpunkte der Linie A_0A_1 an muss man nun, um den Schwerpunkt des Dreiecks $A_0A_1A_2$ zu erhalten, auf der von dem in Rede stehenden Mittelpunkte nach dem Punkte A_2, dessen Coordinaten bekanntlich:

$$\tfrac{1}{4}p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1,\quad \tfrac{1}{4}p(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1)$$

sind, gezogenen Geraden nach A_2 hin den dritten Theil der Entfernung des Mittelpunkts von A_0A_1 und des Punktes A_2 von einander abschneiden; dadurch erhält man nach den obigen allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie, in denen man $n=1$, $m=3$, $m-n=2$ zu setzen hat, offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}3X' = \;& \frac{p}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}\\ &+\frac{p}{4}\cdot\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1,\\ 3Y' = \;& \frac{p}{4}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}\\ &+\frac{p}{4}\cdot(\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1).\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}+\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1\\ &=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2+2\cos\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2};\end{aligned}$$

der Zähler ist:

$$\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\ &+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\\ =\;&\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\ &+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\ &+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\ =\;&\tfrac{3}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\ &+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\ &+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\ &+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\ =\;&\tfrac{1}{2}\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\}\\ &+\tfrac{1}{2}\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\}\\ &+\tfrac{1}{2}\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\}\\ =\;&\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\\ &+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\\ &+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2;\end{aligned}$$

Digitized by Google

daher ist nach dem Obigen offenbar:

$$X'=\frac{p}{48}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{c}3\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

oder:

$$X'=\frac{p}{24}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\cos\frac{1}{2}\alpha_0+\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\cos\frac{1}{2}\alpha_1+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}+(\cot\frac{1}{2}\alpha_0+\cot\frac{1}{2}\alpha_1)$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\frac{1}{2}\alpha_2+2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}\alpha_2-2\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

der Zähler ist:

$$\begin{array}{rl}&\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)+\cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\&+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\&-2\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\=&\cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\&+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\&+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\&-3\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\=&\{\cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\}\\&+\{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\}\\&+\{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\}\\=&2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\sin\frac{1}{2}\alpha_0\\&+2\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\sin\frac{1}{2}\alpha_1\\&+2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}\alpha_2;\end{array}$$

also ist nach dem Obigen offenbar:

$$Y'=\frac{p}{24}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{c}\cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\-3\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

Digitized by Google

oder:

$$Y' = \frac{p}{12} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\sin\frac{1}{2}\alpha_0 + \sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 + \sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Wir haben also die folgenden merkwürdigen Formeln zur Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks $A_0A_1A_2$:

30)

$$X' = \frac{p}{48} \cdot \frac{\left\{\begin{array}{c} 3\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \\ +\sin\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \\ +\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2) \\ +\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2) \end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y' = \frac{p}{24} \cdot \frac{\left\{\begin{array}{c} \cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \\ +\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2) \\ +\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2) \\ -3\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

oder:

31)

$$X' = \frac{p}{24} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) + \cos\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0) + \cos\frac{1}{2}\alpha_2 \sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y' = \frac{p}{12} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) + \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0) + \sin\frac{1}{2}\alpha_2 \sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

§. 7.

Wir suchen endlich noch den Höhendurchschnitt des Dreiecks $A_0A_1A_2$, dessen Coordinaten X'', Y'' sein mögen, und erinnern zu dem Ende zuerst an die folgenden Formeln der analytischen Geometrie:

Wenn (x_0y_0) und (x_1y_1) zwei Punkte sind, und es soll auf der durch dieselben gehenden Geraden von dem Punkte (x_0y_0) aus auf der Verlängerung der Geraden zwischen (x_0y_0) und (x_1y_1) über (x_0y_0) hinaus ein Stück abgeschnitten werden, welches $\frac{n}{m}$ der Entfernung der Punkte (x_0y_0) und (x_1y_1) von einander be-

trägt; so sind die Coordinaten x, y des Endpunkts dieses Stücks bekanntlich:

$$x=\frac{(m+n)x_0-nx_1}{m},$$

$$y=\frac{(m+n)y_0-ny_1}{m}.$$

Bekanntlich liegen der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der Schwerpunkt und der Höhendurchschnitt in einer geraden Linie; der Schwerpunkt liegt zwischen dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und dem Höhendurchschnitte; und der Höhendurchschnitt ist von dem Schwerpunkte doppelt so weit entfernt wie der Schwerpunkt von dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises. Wollen wir also die obigen Formeln der analytischen Geometrie in Folge dieses Satzes zur Bestimmung von X'', Y'' anwenden; so müssen wir in denselben $n=2$, $m=1$, $m+n=3$ und für x_0, y_0; x_1, y_1; x, y respective X', Y'; X, Y; X'', Y'' setzen, wodurch wir also erhalten:

$$X''=3X'-2X,\quad Y''=3Y'-2Y.$$

Folglich ist nach 30) und 18):

$$X''=\frac{p}{16}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{c}3\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}$$

$$-\frac{p}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y''=\frac{p}{8}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{c}\cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\-3\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}$$

$$+\frac{p}{4}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

also:

32)

$$X''=\frac{p}{16}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\+\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\-\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\-8\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y''=\frac{p}{8}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Es ist aber:

$$\begin{array}{rl}&8\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2\\=&4\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\frac{1}{2}\alpha_2-4\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}\alpha_2\\=&2\sin\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\&+2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\&+2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\&-2\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2),\end{array}$$

also:

33)

$$X''=\frac{p}{16}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\-\sin\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\-\sin\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\-\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y''=\frac{p}{8}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\+\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\-\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Der Zähler von X'' ist:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
&\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)-\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\
&-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
=\;&2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\\
&+2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\\
&+2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\\
&-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2),
\end{aligned}$$

und der Zähler von Y'' ist:

$$\begin{aligned}
&\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
&+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
&+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
&+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
=\;&2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\\
&+2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\\
&+2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\\
&+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2);
\end{aligned}$$

also:

34)

$$X''=\frac{p}{8}\cdot\frac{\left\{\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\\&+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\\&+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\\&-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\end{aligned}\right\}}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y''=\frac{p}{4}\cdot\frac{\left\{\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\\&+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\\&+\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\\&+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\end{aligned}\right\}}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2}$$

Weil nun aber nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
&\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\
=&-4\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2
\end{aligned}$$

ist, so ergiebt sich aus der ersten der zwei Gleichungen 33) die merkwürdige Gleichung:

$$35) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad X'' = -\tfrac{1}{4}p,$$

worin der folgende Satz ausgesprochen ist:

Die Höhendurchschnitte aller durch drei Berührende einer Parabel gebildeten Dreiecke liegen in der Directrix *).

Weil:

$$\begin{aligned} & 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 \\ = \; & 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 + 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 \\ = \; & \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \\ & + \cos\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \\ & + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2) \\ & + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2), \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} & \cos\tfrac{1}{2}(-\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \\ & + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2) \\ & + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2) \\ & - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \\ = \; & 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 - 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) \end{aligned}$$

ist; so ist nach 33) auch:

$$35^*) \quad Y'' = \tfrac{1}{4}p \cdot \frac{2\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_2}.$$

Die Coordinaten X', Y' des Schwerpunkts kann man nach 30) und den vorhergehenden Entwickelungen auch auf folgende Art ausdrücken:

35**)

$$X' = \frac{p}{12} \cdot \frac{\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_2 + \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_2},$$

$$Y' = \frac{p}{6} \cdot \frac{\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin\tfrac{1}{2}\alpha_2}.$$

Aus 35*) und 35**) ergiebt sich auch die Relation:

---

*) Man vergleiche die zu dieser Abhandlung gehörende Figur auf Taf. XII.

$$4Y'' - 6Y' = p\cot\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cot\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cot\tfrac{1}{2}\alpha_2.$$

§. 8.

Durch Verbindung von 31) und 34) erhält man leicht:

$$36) \ldots \left\{\begin{aligned} X' + \tfrac{1}{3}X'' &= \frac{p}{12}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2}, \\ Y' - \tfrac{1}{3}Y'' &= -\frac{p}{12}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2}; \end{aligned}\right.$$

also:

$$37) \ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) = -\frac{X'+\frac{1}{3}X''}{Y'-\frac{1}{3}Y''} = -\frac{3X'+X''}{3Y'-Y''};$$

und andere bemerkenswerthe Relationen würden sich aus dem Obigen noch verschiedene ableiten lassen, wobei wir aber nicht länger verweilen.

Nur um eine Controle für die Richtigkeit der früheren Rechnungen zu haben, bemerken wir noch Folgendes. Schreiben wir die Gleichungen 36) auf folgende Art:

$$3X' + X'' = \frac{p}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

$$3Y' - Y'' = -\frac{p}{4}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2};$$

und verbinden damit die aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$3X' - X'' = 2X,$$
$$3Y' - Y'' = 2Y;$$

so erhalten wir:

$$X'' = \frac{p}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2} - X, \quad Y = -\frac{p}{8}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Die Richtigkeit der zweiten dieser beiden Gleichungen erhellet sofort aus 18); führt man in die erste den Werth von X ein, so erhält man:

$$X'' = \frac{p}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2} - \frac{p}{8}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)+2\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha_1\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2},$$

also:

$$X'' = -\tfrac{1}{4}p,$$

was vollständig mit 35) übereinstimmt.

XXXII.

Elementar-geometrischer Beweis des Satzes:

„Dreiseitige Pyramiden von gleichgrossen Grundflächen und gleichgrossen Höhen haben gleichgrosse Volumina"*).

Von

Herrn Professor Dr. *Hessel*
an der Universität in Marburg.

---

§. 1. Erklärungen.

1) Wird ein gegebenes Prisma über seine Enden hinaus ins Unendliche fort verlängert, so dass dabei die dagewesenen Endflächen beseitigt werden, so geht es über in ein Prisma ohne Endflächen, in ein endloses Prisma.

---

*) In den in Deutschland üblichen Compendien und Lehrbüchern der Elemente der Geometrie, so weit sie mir bekannt sind, ist der Satz, auf welchem fast alle Volumbestimmungen von Körpern beruhen, nämlich der Satz:

„dreiseitige Pyramiden von gleichgrossen Grundflächen und gleichgrossen Höhen haben gleichgrosse Volumina"

stets nur mittelst der bekannten Exhaustionsmethode bewiesen.

Diese Methode gehört aber streng genommen nicht der Elementar-Geometrie, sondern der höheren Geometrie an.

Sie ist bei den betreffenden Untersuchungen über krummlinige, oder krummflächige Raumgebilde nicht zu umgehen. Auch mag es vom pädagogischen Standpunkte aus für zulässig und für zweckmässig anerkannt werden, den Schüler nicht bloss da, wo es (wie z. B. schon bei

2) Wird ein endloses Prisma von zwei ebenen einander parallelen, die Seitenkanten schneidenden Flächen, den Endflächen, durchschnitten, so heisst der zwischen den beiden Endflächen enthaltene Theil des endlosen Prisma's ein parallelendiges Prisma.

3) Ist ein endloses Prisma von zwei ebenen, die Seitenkanten schneidenden, einander nicht parallelen Flächen, den Endflächen, so durchschnitten, dass kein Punkt der Durchschnittslinie der beiden Endflächenebenen dem Prisma selbst angehört, so heisst der zwischen den beiden Endflächen enthaltene Theil des Prisma's ein nicht parallelendiges Prisma.

4) Ist ein endloses Prisma von zwei ebenen, die Seitenkanten schneidenden, einander nicht parallelen Flächen, den Endflächen, so durchschnitten, dass mindestens ein Punkt der Durchschnittslinie der beiden Endflächenebenen in der seitlichen Begrenzung (Seitenfläche), aber keiner innerhalb*) des endlosen Prisma's liegt, so heisst der zwischen beiden Endflächen enthaltene Theil des endlosen Prismas ein Prismatoid.

5) Wir nennen jeden der möglichen (zu den Seitenkanten senkrechten, mithin einander parallelen, also einander congruenten und coincidenzmässig liegenden) Querschnitte eines endlosen Prisma's einen Zonenschnitt desselben.

---

gewissen Lehren vom Kreise) nöthig ist, sondern auch in anderen Fällen, in der Anwendung dieser Methode zu üben. Man kann aber offenbar mit Recht fordern, dass der Schüler mindestens daneben auch darauf aufmerksam gemacht werde, dass man, abgesehen von der Parallelentheorie, überall da, wo von geradlinigen ebenen Figuren, oder von ebenflächigen Körpern die Rede ist, die Lehrsätze der Elementar-Geometrie beweisen kann, ohne dabei genöthigt zu sein, Methoden der höheren Geometrie zur Anwendung zu bringen.

Da der Beweis des erwähnten Satzes, welchen diese Abhandlung darbietet, sich dadurch empfiehlt, dass er dem Gebiete der Elementar-Geometrie angehört, also insbesondere kein Exhaustionsbeweis ist, und dass er dabei, bezüglich auf Anschaulichkeit, dem üblichen Exhaustions-Beweise mindestens nicht nachsteht, so dürfte seine Bekanntmachung einer weiteren Rechtfertigung nicht bedürfen. Man vergleiche übrigens die Lehren Euklids über diesen Gegenstand.

*) Schneiden die beiden Endflächen einander innerhalb des endlosen Prisma's, so schliessen sie nicht einen, sondern mindestens zwei Theile des endlosen Prisma's ein.

6) Der Zonenschnitt eines gegebenen endlosen Prisma's heisst zugleich auch Zonenschnitt eines parallelendigen, oder nicht parallelendigen Prisma's, oder eines Prismatoides, wenn dieses Prisma, oder dieses Prismatoid ein der betreffenden Erklärung 2, 3 oder 4 entsprechender Theil des gegebenen endlosen Prisma's ist. — Man hat daher nicht nur Prismen, sondern auch Prismatoide von 3seitigem, 4seitigem, 5seitigem u. s. w. Zonenschnitt zu unterscheiden.

7) Als Prismatoide mit 3seitigem Zonenschnitt sind zu betrachten: die Pyramiden mit paralleltrapezförmigen Grundflächen, die Pyramiden mit parallelogrammatischen Grundflächen und die Pyramiden mit dreiseitigen Grundflächen *).

8) Kommt bei einem Satze oder dessen Beweis die Anzahl der Seiten des Zonenschnittes, also auch die Anzahl der Seitenkanten eines Prisma's oder Prismatoides nicht in Betracht, so werden wir hier (der Versinnlichung wegen) Prismen und Prismatoide so darstellen, wie es folgenden Angaben entspricht.

a) Ein endloses Prisma durch eine Figur wie Taf. XI. Fig. 1. Es sind dabei die Seitenkanten nicht nothwendig stets der Ebene der Figur parallel zu denken.

b) Ein parallelendiges Prisma durch eine Figur wie Taf. XI. Fig. 2., in welcher $aABb$ das darzustellende Prisma bedeutet. Wir denken uns dabei die Endflächen zur Ebene der Zeichnung senkrecht, so dass sie durch blosse gerade Linien aA und bB dargestellt werden, und die Seitenkanten nur dann als der Ebene der Figur parallel zu denken sind, wenn zugleich der zu den Seitenkanten senkrechte Zonenschnitt als zu dieser Ebene senkrecht angenommen wird.

c) Ein nicht parallelendiges Prisma durch eine Figur wie Taf. XI. Fig. 3., in welcher $aABb$ das darzustellende Prisma bedeutet. Wir

---

*) Die Pyramide mit parallelogrammatischer Grundfläche hat, als 3seitiges Prismatoid betrachtet, 2 dreiseitige Endflächen, eine 4seitige und 2 dreiseitige Seitenflächen, 6 Endkanten, aber nur 2 Seitenkanten (indem die dritte an Länge = Null ist).

Die dreiseitige Pyramide hat, als 3seitiges Prismatoid betrachtet, 2 dreiseitige Endflächen, aber nur 2 und zwar dreiseitige Seitenflächen (die dritte Seitenfläche ist zu einer blossen Kantenlinie geworden). Sie hat 6 Endkanten, aber nur eine Seitenkante. (Die Länge der beiden anderen Seitenkanten ist zu Null geworden).

Digitized by Google

denken uns dabei die beiden Endflächen, mithin auch die Durchschnittslinie der beiden Endflächenebenen, als zur Ebene der Figur senkrecht, so dass die Endflächen durch gerade Linien aA, bB dargestellt werden. Die Seitenkanten sind dann nicht nothwendig in jedem Falle der Ebene der Zeichnung parallel.

d) Ein Prismatoid durch eine Figur wie Taf. XI. Fig. 4. (in welcher $A(ab)B$ das Prismatoid vorstellt) so dass wir auch hier die Endflächen als zur Ebene der Zeichnung senkrecht annehmen, sie mithin durch gerade Linien aA, bB darstellen, bei denen die Punkte a und b zusammenfallen*). Die Seitenkanten sind dann nicht in jedem Falle der Ebene der Zeichnung parallel.

§. 2. Lehrsatz.

Jedes parallelendige Prisma α ist an Inhalt gleich einem geraden parallelendigen Prisma β, das mit ihm einerlei Zonenschnitt und einerlei Seitenkantenlänge hat.

Beweis. Da α und β einerlei Zonenschnitt haben, so giebt es ein endloses Prisma Taf. XI. Fig. 5.*), mit dem sie diesen Zonenschnitt gemein haben. Ist dann $aABb$ das gegebene Prisma α, und $a_1A_1B_1b_1$ das gerade Prisma β, sind beide in das endlose Prisma so gelegt, dass sie mit ihm den Zonenschnitt gemein haben, dass $ab = a_1b_1$ die Seitenkantenlänge ist, und dass zwischen beiden Prismen ein, von den nachbarlichen Endflächen aA und b_1B_1 begrenzter, prismatischer Theil $b_1B_1Aa = \gamma$ des endlosen Prismas vorhanden ist, so ist sowohl der Theil $(\alpha+\gamma)$, als der Theil $(\beta+\gamma)$ des endlosen Prismas ein prismatischer Theil desselben, der mit ihm den Zonenschnitt gemein hat und es ist:

$$(\alpha+\gamma) \cong (\beta+\gamma)$$

also:

$$\frac{\gamma \cong \gamma}{\alpha = \beta}.$$

---

*) Es lässt sich nämlich eine solche Erweiterung der betreffenden Begriffe denken, bei welcher das Parallelogramm als ein parallelendiges, und das Paralleltrapez als ein nicht parallelendiges Prisma und das Dreieck als ein Prismatoid betrachtet werden kann, nämlich als ein solches, dessen Körperinhalt Null ist.

**) Wir nehmen bei den in Taf. XI. Fig. 5. und 5, 1 und 5, 2 dargestellten Prismen die Endflächen beider Prismen, also auch den Zonenschnitt derselben als zur Ebene der Figur senkrecht an.

Digitized by Google

Anderer Beweis dieses Satzes.

1) Ist α selbst ein gerades Prisma, das mit dem geraden Prisma β den Zonenschnitt und die Seitenkantenlänge gemein hat, so ist $\alpha \cong \beta$, also $\alpha = \beta$.

2) Ist α kein gerades Prisma, so hat es entweder, wie $aAbB$ (Taf. XI. Fig. 5, 1.) die Eigenschaft, dass es durch einen Querschnitt in zwei nicht parallelendige Prismen getheilt werden kann, oder es hat, wie $aABb$ (Taf. XI. Fig. 5, 2.) diese Eigenschaft nicht.

Sind dann im ersten dieser beiden Fälle x und y die beiden Theile von $aABb$, und man denkt sich dieselben als beweglich, so kann man, ohne dass sie eine drehende Bewegung erleiden müssen, ihre Zusammenstellung so ändern, dass sie, nach dieser Aenderung, ein gerades Prisma bilden, das denselben Zonenschnitt, dieselbe Seitenkantenlänge und dieselbe Grösse hat, wie dasjenige, welches sie vorher bildeten. Stellt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ die ursprüngliche Zusammenstellung dar, so kann die abgeänderte dargestellt werden durch $\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$, (s. Taf. XI. Fig. 5, 1.).

Hat in dem anderen Falle das Prisma $aABb$, (Taf. XI. Fig. 5, 2.) die erwähnte Eigenschaft nicht, so kann es durch Ebenen, die den Seitenkantenlinien und den Durchschnittslinien der Endflächenebenen mit dem Querschnitte parallel sind (die daher in Taf. XI. Fig. 5, 2. durch die mit der Linie a_1b parallelen geraden Linien dargestellt sind), in solche kleinere Prismen getheilt werden, deren jedes die Eigenschaft hat, dass es, in der beim Falle von Taf. XI. Fig. 5, 1. angegebenen Weise, in ein gerades Prisma verwandelt werden kann, das mit ihm einerlei Zonenschnitt und einerlei Seitenkantenlänge hat. — Die so erhaltenen gerad-prismatischen Theile können dann so zusammengestellt werden, dass sie das gerade Prisma $a_1A_1B_1b_1 = \beta$ bilden, das bezüglich auf Seitenkantenlänge mit dem Prisma α übereinstimmt, einen Zonenschnitt hat, der dem des Prisma's α congruent ist, so dass das Prisma β die Eigenschaft hat, dass sein Volumen dem des Prisma's α an Grösse gleich ist, weil:

$$a_1c_1d_1b_1 = acdb, \quad c_1e_1f_1d_1 = cefd, \quad e_1g_1h_1f_1 = eghf,$$

u. s. w.

§. 3. Zusatz.

Parallelendige Prismen von einerlei Zonenschnitt

und von einerlei Seitenkantenlänge haben gleiche Volumina.

Ihr Inhalt ist nämlich dem eines und desselben geraden Prisma's gleich, das mit ihnen den Zonenschnitt und die Seitenkantenlänge gemein hat.

§. 4. Lehrsatz.

Haben zwei parallelendige Prismen congruente Grundflächen und einerlei Höhe, so haben sie gleiche Volumina.

Beweis. I. Sind die Grundflächen der beiden gegebenen Prismen Parallelogramme, so sind diese Prismen Parallelepipede und können als solche in dreierlei Sinn als parallelendige Prismen mit parallelogrammatischen Zonenschnitten betrachtet werden, indem, wenn a, b und d die drei Kantenlinien des Parallelepipede sind, die in einerlei Ecke zusammen laufen, entweder a, oder b, oder d als Seitenkantenlinie betrachtet werden kann, so dass, dem entsprechend, die Ebene bd, oder die Ebene da, oder die Ebene ab Grundfläche ist.

Sind nun P_1, P_2, P_3 (Taf. XI. Fig. 6.) drei parallelendige Prismen mit parallelogrammatischen (der Ebene der Figur parallel zu denkenden) Grundflächen G_1, G_2, G_3 und mit den zu diesen Grundflächen senkrechten Höhen H_1, H_2, H_3, und bezeichnet man die Seiten der Grundfläche bei G_1 mit a_1 und b_1, bei G_2 mit a_2 und b_2 und bei G_3 mit a_3 und b_3 und die zu diesen Seiten senkrechten Zonenschnitte mit $Q(a_1)$, $Q(b_1)$; $Q(a_2)$, $Q(b_2)$; $Q(a_3)$, $Q(b_3)$ und es ist dann:

$$H_3 = H_2 = H_1 \quad \text{und:} \quad G_3 \cong G_2 \cong G_1$$

und $a_3 = a_2 = a_1$, also auch $b_3 = b_2 = b_1$, so sind die Schnitte $Q(a_3)$, $Q(a_2)$, $Q(a_1)$, (als Parallelogramme von einerlei Länge ihrer, in den Grundflächen liegenden, Grundlinien und von einerlei Höhen H_1, H_2, H_3) an Grösse einander gleich, und ebenso sind dann auch die Schnitte $Q(b_3)$, $Q(b_2)$, $Q(b_1)$ gleich gross.

Sind dann die Winkel des Parallelogramms $Q(a_3)$ gleich denen von $Q(a_1)$ und dabei die Winkel von $Q(b_3)$ gleich denen von $Q(b_2)$ (was möglich ist, da diese nicht von jenen abhängen), so ist $Q(a_3) \cong Q(a_1)$ und $Q(b_3) \cong Q(b_2)$, mithin:

1) weil $Q(a_3) \cong Q(a_1)$ und $a_3 = a_1$ ist, auch $P_3 = P_1$,

und:

2) weil $Q(b_3) \cong Q(b_2)$ und $b_3 = b_2$ ist, auch $P_3 = P_2$.

Es ist daher $P_2 = P_1$, wenn $G_2 \cong G_1$ und $H_2 = H_1$ ist.

II. Sind die beiden gegebenen parallelendigen Prismen, deren Grundflächen einander congruent und deren Höhen gleich gross sind, dreiseitige Prismen, so kann man sie aus zwei, ihnen entsprechenden parallelendigen Prismen mit einander congruenten parallelogrammatischen Grundflächen und mit einerlei Höhe dadurch ableiten, dass man jedes dieser beiden vierseitigen Prismen mittelst einer Diagonalebene, in welcher zwei Seitenkantenlinien desselben liegen, so in zwei dreiseitige Prismen theilt, dass mindestens eines derselben dem betreffenden gegebenen dreiseitigen Prisma congruent ist.

Da nun aber die beiden dreiseitig prismatischen Theile des vierseitigen Prisma's an Grösse gleich sind, weil ihre Zonenschnitte einander congruent sind und ihre Seitenkanten einerlei Länge haben, so folgt, dass auch die gegebenen (zu vergleichenden) dreiseitigen Prismen, als Hälften gleichgrosser vierseitiger Prismen gleich gross sind.

III. Haben die gegebenen Prismen solche Grundflächen, welche nicht dreiseitig sind, so können sie in einander entsprechende dreiseitige Prismen zerlegt werden, so dass die einander entsprechenden Theile congruente Grundflächen und einerlei Höhe haben, also gleich gross sind.

§. 5. Zusatz.

Jedes gegebene parallelendige Prisma ist an Volumen gleich einem geraden parallelendigen Prisma, dessen Grundfläche der Seinigen congruent und dessen Höhe seiner Höhe gleich ist.

§. 6. Lehrsätze.

I. Gerade parallelendige Prismen von gleicher Seitenkantenlänge haben bei gleichgrossen (nicht nothwendig congruenten) Zonenschnitten auch gleiche Volumina.

II. Gerade parallelendige Prismen von gleichen

Höhen haben bei gleichgrossen Grundflächen auch gleichgrosse Volumina.

Beweis. Es ist nur nöthig nachzuweisen, dass jedes gerade Prisma P_1 von gegebener Grundfläche G_1 und gegebener Höhe $H_1 = H$ an Grösse gleich ist einem solchen geraden Prisma P_2 mit rectangulärer Grundfläche G_2, das mit ihm die Höhe $H_2 = H$ gemein hat und dabei der weiteren Bedingung genügt, dass seine Grundfläche zwei parallele Seiten hat, deren jede an Länge einer gegebenen Linie L gleich ist.

Denn ist diess der Fall, so folgt, dass je zwei gegebene gerade Prismen von einerlei Höhe, bei einerlei Grösse der Grundflächen, an Volumen einem und demselben geraden Prisma mit rectangulärer Grundfläche gleich sind, welches mit ihnen die Grösse der Grundfläche und die Höhe gemein hat, dass sie daher an Volumen einander gleich sind. — Es genügt, den Beweis, dass $P_1 = P_2$ ist, nur für den Fall zu führen, in welchem die Grundfläche G_1 des Prisma's P_1 ein Parallelogramm ist, weil er dann auch gilt, wenn die Grundfläche G_1 ein Dreieck oder ein sonstiges gegebenes Polygon ist.

Es sei daher die Grundfläche von P_1 ein Parallelogramm G_1, welches von den Seiten A_1 und B_1 begrenzt ist, während ihre zu A_1 senkrechte Höhe $= \alpha_1$ ist, so dass der zur Seite A_1 senkrechte Zonenschnitt $Q(A_1)$ des Prisma's P_1 *) das von den Seiten α_1 und H_1 begrenzte Rectangel ist.

Ist dann die rectanguläre Grundfläche G_2 des Prisma's P_2 von den Seiten L und M begrenzt, und es soll an Grösse $G_2 = G_1$ sein, so muss $L.M = A_1.\alpha_1$ sein, so dass M bestimmt ist, wenn L und A_1 und α_1 gegeben sind. — Es sind dann auch die zu den Seiten der Grundfläche G_2 senkrechten rectangulären Zonenschnitte für P_2 bestimmt, denn es hat der Eine $Q(L)$, der zu L senkrecht ist, die Seiten M und H_2 und der Andere $Q(M)$, der zu M senkrecht ist, die Seiten L und H_2.

Construirt man nun, was möglich ist, ein solches drittes gerades Prisma P_3, das die Höhe $H_3 = H$ und eine parallelogrammatische Grundfläche G_3 hat, welche von den Seiten A_3 und B_3 so begrenzt ist, dass einerseits ihre Seite $A_3 = A_1$ und ihre zu A_3 senkrechte Höhe $\alpha_3 = \alpha_1$ ist, während andererseits

entweder ihre Seite $B_3 = L$ und ihre zu L senkrechte Höhe $\beta_3 = M$ ist,

---

*) Vergleiche den ersten Absatz des Beweises im §. 4.

oder ihre Seite $B_3 = M$ und ihre zu M senkrechte Höhe $\beta_3 = L$ ist;

so ist, wenn $Q(A_3)$ der zu A_3 und $Q(B_3)$ der zu B_3 senkrechte Zonenschnitt von P_3 ist, wegen:

$$A_3 = A_1 \text{ und } Q(A_3) \cong Q(A_1) \text{ auch } P_3 = P_1;$$

und:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{entweder: wegen} & B_3 = L \text{ und } Q(B_3) \cong Q(L) \\ \text{oder: wegen} & B_3 = M \text{ und } Q(B_3) \cong Q(M)\end{array}\right\} \text{ auch } P_3 = P_2,$$

so dass $P_1 = P_2$ ist.

§. 7. Zusätze.

I. **Parallelendige Prismen von gleicher Länge der Seitenkanten haben bei gleichgrossen (zu den Seitenkanten senkrechten) Zonenschnitten auch gleiche Volumina.**

Vergleiche §. 2. und §. 6. Nr. I.

II. **Parallelendige Prismen von gleichen Höhen haben bei gleichgrossen Grundflächen auch gleiche Volumina.**

Vergleiche §. 5. und §. 6. Nr. II.

§. 8. Lehrsatz.

Jedes nicht parallelendige Prisma *aABb* (Taf. XI. Fig. 7.) wird durch eine Ebene *OmM*, welche mit den beiden Endflächenebenen *OaA* und *ObB* die Durchschnittslinie *O* gemein hat und eine, mithin jede der Seitenkantenlinien halbirt, in zwei gleichgrosse Theile *aAMm* und *bBMm* getheilt, deren jeder ein nicht parallelendiges Prisma von einerlei Zonenschnitt mit dem getheilten Prisma ist.

Beweis. Wollte man annehmen, es theile die Ebene *OmM* das Prisma *aABb* nicht in zwei gleiche Theile, so müsste es irgend eine andere Ebene geben, die mit den Endflächenebenen *OaA* und *ObB* die Durchschnittslinie *O* gemein hätte und die Halbirung des Prisma's *aABb* bewirkte, aber eine, mithin jede der Seitenkantenlinien in zwei ungleiche Theile theilen würde, so

Digitized by Google

dass alle grösseren Theile dieser Linien einer und derselben Endfläche anlägen. Wäre dann OtT Taf. XI. Fig. 7. diese Halbirungsebene, so müsste das nicht parallelendige Prisma $aATt$ dem nicht parallelendigen Prisma $bBTt$ an Inhalt gleich sein.

Würde man aber dann (sowie in Taf. XI. Fig. 7, 1.; 7, 2.; 7, 3.) eine Ebene mVt_1, oder mt_1V, so in das Prisma legen, dass der Durchschnitt m der Ebene OmM mit der Grenze ab des Prisma's in ihr liegt, und dass sie parallel der Endfläche bB ist, so würde diese Ebene mt_1 einen Durchschnitt t_1 mit der Ebene OtT und einen solchen V mit der Grenze AB des Prisma's bilden.

Dabei läge dann der Durchschnitt V entweder zwischen t_1 und m, wie in Taf. XI. Fig. 7, 1., oder es fiele V mit t_1, also auch mit T zusammen, wie in Taf. XI. Fig. 7, 2, oder es läge V in der Erweiterung von mt_1 über t_1 hinaus, wie in Taf. XI. Fig. 7, 3.

Wären nämlich e und E zwei Ebenen, die man so mit dem Prisma $aABb$ zusammengestellt hätte, dass in e die Grenze ab und in E die Grenze AB läge, während beide Ebenen e und E einander und auch der Durchschnittslinie O der beiden Endflächenebenen parallel wären, so würde der Abstand zwischen e und E entweder kleiner (wie in Taf. XI. Fig. 7, 1.), oder eben so gross (wie in Taf. XI. Fig. 7, 2.), oder (wie in Taf. XI. Fig. 7, 3.) grösser sein, als der Abstand der Durchschnittslinie t_1, der Ebenen mt_1 und OtT von der Ebene e.

Wäre dann aber, in den beiden ersten dieser drei Fälle, aN eine durch a parallel der Endfläche bB gelegte Ebene, so würden $mVBb$ und $aNVm$ (Taf. XI. Fig. 7, 1. und 7, 2.) zwei parallelendige Prismen von einerlei Zonenschnitt mit dem gegebenen Prisma $aABb$ und dabei von gleicher Seitenkantenlänge sein, die also gleiche Inhalte hätten.

Es wäre also in Taf. XI. Fig. 7, 1. und 7, 2.:

$$mVBb = aNVm,$$

dabei wäre aber:

$$tTBb < mVBb \text{ und } aATt > aNVm.$$

Es wäre also:

$$\text{Prisma } tTBb < \text{Prisma } aATt.$$

Da nun der Voraussetzung nach:

$$tTBb = aATt,$$

Digitized by Google

und dem Beweise nach:

$$tTBb < aATt$$

sein würde, so folgt, dass die Voraussetzung in Fällen wie Taf. XI. Fig. 7, 1. und 7, 2. unzulässig ist, weshalb für Fälle wie Taf. XI. Fig. 7, 1. oder 7, 2. die Behauptung als bewiesen zu betrachten ist, dass das Prisma $aABb$ durch die Ebene OM in zwei gleich grosse Theile getheilt ist.

Die Voraussetzung, dass das Prisma $tTBb$ dem Prisma $aATt$ gleich sei, wenn die Ebene OtT den Theil $mMBb$, nicht aber den anderen Theil des gegebenen Prisma's $aABb$ durchschneidet, ist aber auch in Fällen wie Taf. XI. Fig. 7, 3. unzulässig.

Man kann nämlich das Prisma $aABb$ in diesen Fällen durch Ebenen, die den Seitenkanten und der Durchschnittslinie O der beiden Endflächenebenen parallel sind (die wir daher durch die geraden Linien a_1b_1, a_2b_2, ... darstellen), in kleinere Prismen zertheilen, so dass der Zonenschnitt eines jeden dieser prismatischen Theile ein Theil des Zonenschnitts des Prisma's $aABb$ ist.

Haben dann die Ebenen OM und OT die oben angegebene Lage, so wird jeder dieser prismatischen Theile aa_1b_1b, $a_1a_2b_2b_1$.... durch die Ebenen OM und OT so getheilt, dass die Ebene OM jede Seitenkantenlinie halbirt, die Ebene OT aber jede Seitenkantenlinie in zwei ungleiche Theile theilt, von denen der grössere der Ebene aA anliegt. Bei der Theilung durch die Ebenen a_1b_1, a_2b_2, ... aber ist es möglich auf mancherlei Weise den prismatischen Theilen, in der zu den Theilungsebenen a_1b_1, a_2b_2, ... senkrechten Richtung, welche wir **Breitenrichtung** derselben nennen wollen, solche Dimensionen zu geben, dass jeder dieser Theile dem Falle von Taf. XI. Fig. 7, 1. oder 7, 2. entspricht.

Bestimmt man nämlich in einem solchen Falle (wie Taf. XI. Fig. 7, 3.) zuerst den Durchschnitt t_1 der Ebenen mt_1 und OtT, legt dann durch t_1 die Ebene $a_1b_1 = a_1m_1t_1b_1$ parallel mit den Seitenkanten und mit der Durchschnittslinie O der Endflächenebenen, so ergiebt sich der Durchschnitt m_1 der Ebenen OM und a_1b_1. Legt man dann ebenso durch m_1 die Ebene m_1t_2 parallel der Ebene bB, und dann durch die hierbei entstehende Durchschnittslinie t_2 der Ebenen m_1t_2 und Ot_2T die Ebene a_2b_2 parallel der Ebene a_1b_1, und fährt man so fort, von ab nach AB hin fortschreitend, das gegebene Prisma zu zertheilen, so bewirken die Ebenen a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 .... eine solche Theilung des gegebenen Prisma's $aABb$ in Prismen von kleinerer Breite, also von kleine-

Digitized by Google

rem Zonenschnitt, dass man an jedem dieser kleineren Prismen, ebenso wie an dem Prisma $aABb$ in dem Falle von Taf. XI. Fig. 7, 1. oder 7, 2., sofort nachweisen kann, dass es durch die Ebene OM halbirt wird.

Was dabei die Anzahl dieser Prismen wie aa_1b_1b, $a_1a_2b_2b_1$.... betrifft, so ist leicht einzusehen, dass dieselbe nicht grösser, wohl aber in vielen Fällen kleiner ist, als wenn man (was, wie Taf. XI. Fig. 7, 4. zeigt, gleichfalls zum Ziele führen würde) den derartigen prismatischen Theilen in der zu der Ebene a_1b_1 senkrechten Richtung solche Dimensionen gegeben hätte, dass wenn diese Breitendimension bei dem ersten der prismatischen Theile, nämlich bei aa_1b_1b den Werth $=\delta$ hat, sie auch bei jedem der übrigen dieser Theile, mit Ausnahme des letzten derselben, den Werth $=\delta$ hat, bei dem letzten aber entweder gleichfalls $=\delta$, oder kleiner als δ ist.

Ist für das ganze Prisma $aABb$ die (zur Ebene a_1b_1 senkrechte) Breitendimension $=\Delta$, so ist bei einem Theilungsverfahren wie das in Taf. XI. Fig. 7, 4. versinnlichte, die erforderliche Anzahl der einander parallelen Theilungsebenen wie a_1b_1, a_2b_2, ..., diejenige ganze Zahl, welche $\geqq\left(\frac{\Delta}{\delta}-1\right)$ und $\leqq\frac{\Delta}{\delta}$ ist. Bei einem Verfahren, wie das in Taf. XI. Fig. 7, 3. befolgte, bei welchem die zwischen dem ersten Theile aa_1b_1b und dem letzten Theile enthaltenen Theile der Ordnung nach an Breite zunehmen, muss diese Anzahl also jedenfalls kleiner als $\frac{\Delta}{\delta}$ sein. Bedeutet ferner z eine solche ganze Zahl, die grösser als $\frac{\Delta}{\delta}$ ist, und man würde das ganze Prisma $aABb$ durch Ebenen, welche zur Breitenrichtung desselben senkrecht sind, so theilen, dass die Breite Δ in z gleiche Theile getheilt wird, so würde jeder dieser Theile einem Falle entsprechen, wie derjenige, welcher in Taf. XI. Fig. 7, 1. dargestellt ist. Es würde also auch diese Theilung zum Ziele führen.

Ist aber jedes der Prismen, wie aa_1b_1b, $a_1a_2b_2b_1$ .... durch die Ebene OM halbirt, so ist auch das ganze Prisma $aABb$ durch die Ebene OM in zwei gleichgrosse Theile getheilt.

§. 9. Lehrsatz.

Jedes Prismatoid, welches mittelst einer Ebene,

in welcher die Durchschnittslinie seiner Endflächenebenen liegt, so durchschnitten ist, dass dabei eine, mithin jede seiner Seitenkantenlinien in zwei gleichlange Theile getheilt wird, ist durch diese Ebene in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweis. Ist $aABb$ (Taf. XI. Fig. 8.) ein nicht parallelendiges Prisma und man theilt es mit einer Ebene OmM so, dass jede Seitenkantenlinie desselben in zwei gleiche Theile getheilt wird, und man legt dann, wenn m dieselbe Bedeutung hat wie im vorigen Paragraphen, durch m eine Ebene mP parallel mit der Endfläche aA und eine Ebene mQ parallel der Endfläche bB, so wird dadurch das Prisma $aABb$ in drei Theile getheilt. Es ist dabei der mittlere PmQ ein Prismatoid, welches durch die Ebene mM, in welcher die Durchschnittslinie m der Endflächenebenen mP und mQ liegt, so getheilt ist, dass jede seiner Seitenkantenlinien in zwei gleichlange Theile getheilt ist. Die beiden anderen Theile $aAPm$ und $bBQm$ aber sind parallelendige Prismen von einerlei Zonenschnitt mit dem gegebenen Prisma $aABb$ (und mit dem Prismatoid PmQ), und von einerlei Seitenkantenlänge, mithin von gleichem Körperinhalte. Da nun:

$$\text{Prisma } aAMm = \text{Prisma } bBMm$$

und:

$$\text{Prisma } aAPm = \text{Prisma } bBQm$$

ist, so ist auch:

$$aAMm - aAPm = bBMm - bBQm,$$

d. h.:

$$\text{Prismatoid } PmM = \text{Prismatoid } QmM.$$

Es ist daher das Prismatoid PmQ durch die Ebene mM in zwei gleichgrosse Theile getheilt.

Da nun auch umgekehrt es zu jedem Prismatoid wie PmQ, Prismen wie $aABb$ giebt, die mit demselben einerlei Zonenschnitt und dabei eine solche Lage ihrer Endflächenebenen wie aA und bB haben, dass das gegebene Prismatoid PmQ in der oben angegebenen Weise, durch Abtrennen der Theile $aAPm$ und $bBQm$, erhalten werden kann, so ist der zu beweisende Lehrsatz bewiesen.

§. 10. Zusatz.

Wird eine dreiseitige Pyramide mittelst einer

Ebene so durchschnitten, dass eine der Kantenlinien und der Halbirungspunkt der dieser Kantenlinie gegenüberliegenden anderen Kantenlinie der Pyramide in der Theilungsebene liegt, so sind die beiden Theile der Pyramide von gleichem Körperinhalt.

Ist z. B. Taf. XI. Fig. 9. $PFEQ$ die Pyramide und ist $PM = QM$, so ist auch $PFEM = QFEM$.

Betrachtet man nämlich die dreiseitige Pyramide $PFEQ$ als ein Prismatoid von dreiseitigem Zonenschnitt, so, dass PQ Seitenkante ist, dass also FEP und FEQ die Endflächen sind, dass demnach FE die Durchschnittslinie der Endflächenebenen ist, so sind, gemäss vorigem Paragraphen, die beiden Theile $PFEM$ und $QFEM$ des Prismatoides an Grösse gleich, weil in der Theilungsebene FEM die Linie FE und der Halbirungspunkt M der Seitenkantenlinie PQ liegt.

Anmerkung. In Taf. XI. Fig. 10. stellt $a\alpha AB\beta b$ ein solches nicht parallelendiges dreiseitiges Prisma vor, an welchem eine der Seitenkantenlinien, nämlich AB länger ist als jede der beiden anderen ab und $\alpha\beta$, die an Länge gleich sind. An ihm ist durch die Ebene FEM jede der drei Seitenkantenlinien in zwei gleichlange Theile getheilt, so dass auch (gemäss §. 8.) die beiden Theile $a\alpha AMEF$ und $b\beta BMEF$ des Prisma's an Grösse gleich sind. Es ist dann ferner das Prisma durchschnitten mittelst der beiden Ebenen FEP und FEQ, deren erste parallel der Endfläche $a\alpha A$ und deren zweite parallel der Endfläche $b\beta B$ ist, so dass $a\alpha APEF$ und $b\beta BQEF$ zwei parallelendige Prismen sind, die mit dem gegebenen Prisma $a\alpha AB\beta b$ einerlei Zonenschnitt haben und auch an Seitenkantenlänge mit einander übereinstimmen, also an Grösse einander gleich sind. Da nun:

$$a\alpha AMEF = b\beta BMEF$$

und:

$$a\alpha APEF = b\beta BQEF,$$

also:

$$a\alpha AMEF - a\alpha APEF = b\beta BMEF - b\beta BQEF$$

ist, also der Theil $PFEM$ dem Theile $QFEM$ an Grösse gleich ist, und da diese beiden Theile des Prisma's $a\alpha AB\beta b$ das Prismatoid $PFEQ$ bilden, welches eine dreiseitige Pyramide ist, so folgt, dass jede dreiseitige Pyramide $PFEQ$ durch eine Ebene FEM, in welche eine Kantenlinie FE und der Halbirungspunkt

Digitized by Google

M der gegenüberliegenden Kantenlinie PQ liegt, in zwei gleich grosse Theile getheilt ist.

§. 11. Lehrsatz.

Jede vierseitige Pyramide mit parallelogrammatischer Grundfläche wird durch ihre beiden Diagonalebenen in vier gleich grosse dreiseitige Pyramiden, mithin durch eine ihrer beiden Diagonalebenen in zwei gleich grosse dreiseitige Pyramiden getheilt.

Beweis. Die Pyramide *abdef* (Taf. XI. Fig. 11.) ist durch ihre beiden Diagonalebenen *bae*, *daf* getheilt. Die beiden Linien *be* und *df* halbiren einander in *c*.

Es ist also gemäss §. 10.:

1) Pyramide *aecf* = Pyramide *aecd*,
2) Pyramide *aecd* = Pyramide *adcb*,
3) Pyramide *adcb* = Pyramide *abcf*.

Es ist also auch:

$$aecf + aecd = adcb + abcf,$$

d. h.:

$$\text{Pyramide } afde = \text{Pyramide } afdb,$$

und ebenso:

$$abef = abed.$$

§. 12. Lehrsatz.

Der Inhalt eines jeden dreiseitig pyramidalen Prismatoides ist:

> **1) ein Drittel des Inhaltes eines jeden solchen parallelendigen dreiseitigen Prisma's, mit dem es den Zonenschnitt und die Seitenkantenlänge gemein hat.**

Er ist aber auch ebenso:

> **2) ein Drittel des Inhaltes eines jeden solchen parallelendigen dreiseitigen Prisma's, mit dem es die Grundfläche und die zur Grundfläche senkrechte Höhe gemein hat.**

Beweis. Jede Diagonalebene theilt das dreiseitige parallelendige Prisma $a\alpha AB\beta b$ (Taf. XI. Fig. 12.) in eine vierseitige Pyramide mit parallelogrammatischer Grundfläche und in eine dreiseitige Pyramide.

Fügt man zu einer der sechs Diagonalebenen noch eine zweite Diagonalebene hinzu und wählt man diese so, dass sie mit der ersten eine Diagonale einer der Seitenflächen des Prisma's, als Grenze, gemein hat, wie diess z. B. bei $a\alpha B$ und $a\beta B$ der Fall ist, so wird dadurch die vierseitige Pyramide in zwei dreiseitige Pyramiden zertheilt, die gemäss vorigem Paragraphen an Grösse gleich sind.

Es ist daher als Theil der Pyramide $a\alpha\beta bB$

$$\text{die Pyramide } a\alpha\beta B = \text{der Pyramide } ab\beta B$$

und als Theil der Pyramide $a\beta BAa$,

$$\text{die Pyramide } a\alpha\beta B = \text{der Pyramide } a\alpha AB,$$

und es ist demnach das dreiseitige Prisma (Taf. XI. Fig. 12.) in drei an Grösse gleiche dreiseitige Pyramiden getheilt.

Es ist also der Inhalt einer jeden dieser drei Pyramiden ein Drittel von dem Inhalte des dreiseitigen Prisma's.

Jede dieser drei Pyramiden kann aber als ein solches Prismatoid betrachtet werden, das mit dem gegebenen dreiseitigen Prisma einerlei Zonenschnitt und einerlei Seitenkantenlänge hat. Da nun aber verschiedene solche parallelendige dreiseitige Prismen, welche denselben Zonenschnitt und dieselbe Seitenkantenlänge haben, einander an Grösse gleich sind, so folgt, dass jedes dreiseitig pyramidale Prismatoid an Inhalt gleich ist dem Drittel des Inhaltes eines jeden parallelendigen dreiseitigen Prisma's, das mit ihm einerlei Zonenschnitt und einerlei Seitenkantenlänge hat.

Da aber auch zwei der drei gleichgrossen dreiseitig pyramidalen Theile des Prisma's Taf. XI. Fig. 12., nämlich $ab\beta B$ und $a\alpha AB$, mit diesem Prisma einerlei Grundfläche und einerlei (zur Grundfläche senkrechte) Höhe haben und da parallelendige Prismen von einerlei Grundfläche und einerlei Höhe gleichgross sind, so ist jede dreiseitige Pyramide auch an Inhalt gleich dem Drittel des Inhaltes eines parallelendigen Prisma's, das mit ihm einerlei Grundfläche und einerlei Höhe hat.

§. 13. Lehrsätze.

1) Dreiseitig pyramidale Prismatoide von gleich-

Digitized by Google

grossen Seitenkantenlängen und gleichgrossen (zu den Seitenkanten senkrechten) Zonenschnitten haben gleichgrosse Volumina.

2) Dreiseitige Pyramiden von gleichen Höhen und gleichgrossen Grundflächen haben gleiche Volumina.

Beweis. Da dreiseitige Prismen von einerlei Seitenkantenlänge und gleichgrossen Zonenschnitten gleichgross sind, und, da ebenso dreiseitige Prismen von gleichen Höhen und gleichgrossen Grundflächen gleichgross sind, und da der Inhalt einer jeden der verglichenen Pyramiden ein Drittel des Inhaltes eines solchen Prisma's ist, so sind diese Pyramiden von gleicher Grösse.

XXXIII.

Wurfbewegung im widerstehenden Mittel.

(Zweiter Nachtrag zu der Abhandlung in Thl. XLVI. Nr. XX. S. 361.)

Von

Herrn Dr. *A. M. Nell,*

Lehrer an der technischen Schule zu Darmstadt.

---

§. 32.

In §. 30. und §. 31. der Abhandlung Nr. XXVI. in diesem Theile S. 338. haben wir gezeigt, wie der Elevationswinkel einer Wurflinie, die durch einen bestimmten Punkt geht, gefunden werden kann, sofern derselbe ziemlich klein ist.

Viel schwieriger fällt dagegen die Bestimmung dieses Winkels aus, wenn derselbe einen grösseren Werth hat.

Wir wollen die Aufgabe zuerst für die Bewegung im luftleeren Raume lösen. Setzt man dafür den Elevationswinkel $=\alpha^0$ und behält im übrigen die Bezeichnungen des §. 30. bei, so hat man die Gleichung:

$$n = m \operatorname{tg} \alpha^0 - \frac{gm^2}{2V^2} \sec^2 \alpha^0.$$

Führt man die Tangente statt der Sekante ein, so wird:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha^0 - \frac{2V^2}{gm} \operatorname{tg} \alpha^0 + \frac{2V^2 n}{gm^2} + 1 = 0.$$

Man berechne die beiden Hülfswinkel $\varkappa$ und θ:

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{n}{m}, \quad \sin \theta = \left(\frac{gm}{V^2} + \frac{n}{m}\right) \cos \varkappa;$$

und erhält die beiden Auflösungen:

$$\alpha_1{}^0 = \tfrac{1}{2}(\theta + \varkappa), \quad \alpha_2{}^0 = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\theta - \varkappa).$$

Beispiel. $m = 3239{,}73$; $n = 94{,}24$; $g = 9{,}81$; $V = 300$.

Mit diesen Werthen findet sich:

$$\varkappa \;=\; 1^0 39' 58'', \quad \theta \;= 22^0 27' 40'';$$

$$\alpha_1{}^0 = 12^0 3' 49'', \quad \alpha_2{}^0 = 79 \;\; 36 \;\;\; 9.$$

Auch für die Bewegung im lufterfüllten Raume gibt es zwei Lösungen, nämlich ebenfalls einen flacheren und einen steileren Winkel, welche freilich von den eben gefundenen Werthen ziemlich stark abweichen.

Wir benutzen nun die Gleichung 30) des §. 4. und setzen in ihr $y = n$, $x = m$, so geht sie über in:

$$n = m \operatorname{tg} \alpha - \frac{gm^2 \sec^2 \alpha}{2V^2} - \frac{bgm^3 \sec^3 \alpha}{3V^2}$$

$$- \frac{bgm^4 \sec^4 \alpha}{6V^2}\left(b - \frac{g \sin \alpha}{2V^2}\right) - \frac{bgm^5 \sec^5 \alpha}{15V^2}\left(b^2 - \frac{2bg \sin \alpha}{V^2} + \frac{g^2 \cos^2 \alpha}{4V^4}\right).$$

Damit verbinden wir die Gleichung:

$$n = m \operatorname{tg} \alpha^0 - \frac{gm^2 \sec^2 \alpha^0}{2V^2},$$

so wird jetzt:

Digitized by Google

$$0 = \operatorname{tg}\alpha^0 - \operatorname{tg}\alpha - \frac{gm}{2V^2}(\operatorname{tg}^2\alpha^0 - \operatorname{tg}^2\alpha) + \frac{bgm^2\sec^3\alpha}{3V^2}$$
$$+ \frac{bgm^3\sec^4\alpha}{6V^2}\left(b - \frac{g\sin\alpha}{2V^2}\right) + \frac{bgm^4\sec^5\alpha}{15V^2}\left(b^2 - \frac{2bg\sin\alpha}{V^2} + \frac{g^2\cos^2\alpha}{4V^4}\right).$$

Zur Abkürzung führen wir die Grössen A und B ein, nämlich:

$$A = bm, \quad B = \frac{mg}{2V^2};$$

wodurch wir erhalten:

$$0 = -(\operatorname{tg}\alpha^0 - \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha^0 + \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{B}) + \frac{2}{3}A\sec^3\alpha$$
$$+ \frac{1}{3}A\sec^4\alpha(A - B\sin\alpha) + \frac{2}{15}A\sec^5\alpha(A^2 - 4AB\sin\alpha + B^2\cos^2\alpha),$$

$$0{,}4.A^2 + A\cos\alpha + (2 + 0{,}4.B^2)\cos^2\alpha = 1{,}6.AB\sin\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha$$
$$+ \frac{3}{A}\cos^5\alpha(\operatorname{tg}\alpha^0 - \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha^0 - \frac{1}{B} + \operatorname{tg}\alpha).$$

Hier bedeutet also α^0 den Elevationswinkel für die Bewegung im luftleeren Raum und α denjenigen für den lufterfüllten Raum. Die Gleichung ist in Bezug auf α aufzulösen, was nur durch Nährung geschehen kann. Man wird dabei zweckmässig in folgender Weise verfahren.

Zuerst berechnet man $A = \frac{m}{2k}$ und $B = \frac{mg}{2V^2}$, und dann die verschiedenen von α unabhängigen Coefficienten. Wird nun der erste Nährungswerth von α durch ε bezeichnet, so kann man ε um 5 bis 10 Grade kleiner*) annehmen als α^0 und berechnet dann die Grössen M, N und f, nämlich:

$$M = 0{,}4.A^2 + A\cos\varepsilon + (2 + 0{,}4.B^2)\cos^2\varepsilon,$$
$$N = 1{,}6.AB\sin\varepsilon + B\sin\varepsilon\cos\varepsilon + \frac{3}{A}\cos^5\varepsilon(\operatorname{tg}\alpha^0 - \operatorname{tg}\varepsilon)(\operatorname{tg}\alpha^0 - \frac{1}{B} + \operatorname{tg}\varepsilon),$$
$$f = M - N.$$

*) Dass bei einem steilen Elevationswinkel die Wurflinie $AD''Q$ (Taf. XII. Fig. 6.) eine kleinere Elevation α als die Parabel ADC haben müsse, wenn beide durch denselben Punkt Q führen sollen, ersieht man aus folgender Betrachtung. Eine Wurflinie $AD'C'$ von gleicher Elevation α^0 wie die Parabel würde ganz innerhalb dieser letzteren bleiben. Wird die Elevation vermindert, so nimmt die Wurfhöhe $B''D''$ ab, dagegen wächst die Wurfweite. Umgekehrt verhält es sich bei flachen Elevationswinkeln. Bei diesen muss die Wurflinie eine grössere Elevation haben, als die Parabel, wenn beide durch denselben Punkt gehen sollen.

Führt man dieselbe Rechnung noch mit einem anderen Winkel ε' durch, so erhalte man die Werthe M', N' und $f' = M' - N'$. Dann hat man nämlich:

$$\alpha = \varepsilon - \frac{f}{f' - f}(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Diese Rechnung wird man übrigens mehrmals wiederholen müssen, um denjenigen Winkel α zu finden, welcher der obigen Gleichung genügt.

§. 33.

Für das in §. 32. berechnete Beispiel war $V = 300$, $m = 3239{,}73$; $n = 94{,}24$. Der steilere Elevationswinkel fand sich $\alpha^0 = 79^0 36' 9''$. Nehmen wir wie in §. 13. $\log k = 3{,}69692$, so wird:

$$\log A = 9{,}51256, \quad \log B = 9{,}24691$$

$$0{,}4 . A^2 = 0.04238, \quad \log(2 + 0{,}4 . B^2) = 0.30373$$

$$\log 1{,}6 . AB = 8{,}96359, \quad \log \frac{3}{A} = 0{,}96456$$

$$\operatorname{tg} \alpha^0 = 5{,}44990, \quad \operatorname{tg} \alpha^0 - \frac{1}{B} = -0{,}21370.$$

1. $\varepsilon = 70^0$, $\operatorname{tg} \varepsilon = 2{,}74748$.

$$\log \sin \varepsilon = 9.97299, \quad \log \cos \varepsilon = 9.53405$$

$$M = 0.04238 + 0{,}11133 + 0{,}23541 = 0.38912$$

$$N = 0.05675 + 0{,}08641 + 0{,}29535 = 0.43851$$

$$f = -0.04939.$$

$\varepsilon' = 75^0$, $\operatorname{tg} \varepsilon' = 3{,}73205$.

$$\log \sin \varepsilon' = 9.98494, \quad \log \cos \varepsilon' = 9.41300$$

$$M' = 0.04238 + 0.08425 + 0.13481 = 0.26144$$

$$N' = 0.04414 + 0.08882 + 0.06470 = 0.19766$$

$$f' = 0.06378.$$

$$f' - f = 0.11317, \quad \varepsilon' - \varepsilon = 5^0$$

$$\alpha = \varepsilon + \frac{0.04939}{0.11317} \cdot 5^0 = 70^0 + 2^0.182$$

$$\alpha = 72^0 11'.$$

2. Um den Winkel α genauer zu erhalten, nehmen wir jetzt $\varepsilon = 71^0 30'$ und $\varepsilon' = 72^0 30'$:

$$\varepsilon = 71^0 30', \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon = 2.98869$$

$$\log\sin\varepsilon = 9.97696, \quad \log\cos\varepsilon = 9.50148$$

$$M = 0.04238 + 0.10328 + 0.20263 = 0.34829$$
$$N = 0.05313 + 0.08721 + 0.20247 = 0.34281$$
$$f = 0.00548.$$

$\varepsilon' = 72^0 30', \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon' = 3.17159.$

$$\log\sin\varepsilon' = 9.97942, \quad \log\cos\varepsilon' = 9.47814$$

$$M' = 0.04238 + 0.09788 + 0.18198 = 0\ 32224$$
$$N' = 0.05064 + 0.08770 + 0.15270 = 0.29004$$
$$f' = 0.03220.$$

$$f' - f = 0.02672, \quad \varepsilon' - \varepsilon = 1^0 = 60'$$

$$\alpha = \varepsilon - \frac{0.00548}{0.02672} \cdot 60' = 71^0 30' - 12'.3$$

$$\alpha = 71^0 17',7.$$

3. Um den Winkel α noch genauer zu erhalten, nehmen wir jetzt $\varepsilon = 71^0 15'$ und $\varepsilon' = 71^0 20'$:

$$\varepsilon = 70^0 15', \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon = 2.94591$$

$$\log\sin\varepsilon = 9.97632, \quad \log\cos\varepsilon = 9.50710$$

$$M = 0.04238 + 0.10463 + 0.20794 = 0.35495,$$

$$N = 0.05374 + 0.08708 + 0.21637 = 0.35719$$
$$f = -0.00224.$$

$\varepsilon' = 71^0 20', \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon' = 2.96004.$

$$\log\sin\varepsilon' = 9.97653, \quad \log\cos\varepsilon' = 9.50523$$

$$M' = 0.04238 + 0.10418 + 0.20615 = 0.35271$$

$$N' = 0.05354 + 0.08712 + 0.21166 = 0.35232$$

$$f' = 0.00039.$$

$$f' - f = 0.00263, \quad \varepsilon' - \varepsilon = 5';$$

$$\alpha = \varepsilon + \frac{0.00224}{0.00263} \cdot 5' = 71^{0}15' + 4',26;$$

$$\alpha = 71^{0}19'16''.$$

Wenn dieser Werth von α auch der obigen Gleichung genügt, so folgt daraus noch nicht, dass er schon ganz genau sei; denn diese Gleichung enthält nur eine endliche Anzahl von Gliedern, während die Beziehung zwischen den Grössen m, n, V und α durch eine unendliche Reihe dargestellt wird.

§. 34.

Um den Winkel α genau zu finden, kann man in ähnlicher Weise verfahren, wie in §. 31. gezeigt wurde.

Man wird nämlich mit Zugrundlegung des nach §. 33. erhaltenen Werthes von α, den wir durch α^0 bezeichnen wollen, die Ordinate des Punktes der Curve berechnen, welche der Abscisse m entspricht. Hier wird man wieder einen von n verschiedenen Werth finden, denn sei ACQ (Taf. XII. Fig. 7.) die Curve (Elevation α), welche durch den gegebenen Punkt Q geht, so wird die Curve mit der Elevation α^0 die Senkrechte PQ in einem Punkte q treffen, so dass:

$$Pq > PQ \text{ wenn } \alpha^0 < \alpha$$

und umgekehrt.

Um den Werth von $Pq = n^0$ zu erhalten, bestimmt man zuerst (§. 12.) die Coordinaten $Ab = w$ und $bc = H$ des höchsten Punktes c und ebenso die Dimensionen de und ce für den Punkt d, in welchem der Tangentenwinkel gleich α^0 ist. Dann ist die Rechnung nach folgenden Formeln weiter zu führen:

$$i = m - (w + de),$$

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}\alpha^0 + (L + \Delta \operatorname{tg}\alpha^0)\frac{i}{2k} + \frac{L + \Delta \operatorname{tg}\alpha^0}{\cos\alpha^0}\left(\frac{i}{2k}\right)^2,$$

$$\log u^0 = 9.58406 + \log(\log \frac{L+\Delta \operatorname{tg}\eta}{L+\Delta \operatorname{tg}\alpha^0}),$$

$$\operatorname{tg} x^0 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\eta + \operatorname{tg}\alpha^0) - \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\eta - \operatorname{tg}\alpha^0)\, u^0,$$

$$fg = \frac{6k\, u^0 \cos x^0}{\mathfrak{s}[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\eta - x^0)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x^0 - \alpha^0)]},$$

$$gd = fg \cdot \operatorname{tg} x^0,$$

$$\omega = i - fg,$$

$$\zeta = \omega \operatorname{tg}\eta + (L+\Delta \operatorname{tg}\eta)\frac{\omega^2}{4k} + \frac{L+\Delta \operatorname{tg}\eta}{\cos\eta} \cdot \frac{\omega^2}{12k^2},$$

$$n^0 = H - (ce + dg + \zeta).$$

Nun ist die ganze Rechnung mit einem zweiten Werthe α' zu wiederholen, wobei:

$$\alpha' > \alpha^0 \text{ zu nehmen, wenn } n^0 > n,$$

$$\alpha' < \alpha^0 \text{ zu nehmen, wenn } n^0 < n.$$

Man kann dabei α' um 15 bis 30 Minuten verschieden von α^0 nehmen, und wird schliesslich den Werth n' erhalten, dann ist:

$$\alpha = \alpha^0 + \frac{n - n^0}{n' - n^0}(\alpha' - \alpha^0).$$

§. 35.

Zur Anwendung der im vorigen Paragraphen gegebenen Vorschriften setzen wir nun:

$$\alpha^0 = 71^0 19'.$$

Um die Coordinaten w und H mit Genauigkeit zu erhalten, muss man diesen Winkel in mindestens fünf Theile zerlegen, wobei es zweckmässig ist, diese einzelnen Tangentenwinkel so zu wählen, dass ihre Differenzen nicht einander gleich werden, sondern allmälig zunehmen. Man nehme z. B. hier $\alpha_1 = 63^0$, $\alpha_2 = 51^0$, $\alpha_3 = 36^0$, $\alpha_4 = 19^0$. Bei gleichen Differenzen hätte man dagegen erhalten $\alpha_1 = \frac{4}{5}\alpha^0 = 57^0 3'$ oder $\alpha^0 - \alpha_1 = 14^0 16'$. Eine solche Aenderung würde aber bei dem grossen Winkel α^0 sehr grosse Werthe für die Coordinaten des Punktes D (Taf. VIII., Fig. 9., Thl. XLVI.) und desshalb eine weniger genaue Bestimmung derselben zur Folge haben, während die folgenden Coordinatendifferenzen ziemlich klein ausfielen.

Die Rechnung ergibt nun:

$$w = 1778.89, \quad H = 2930,90$$
$$de = 1147.35, \quad ce = 1582,08$$
$$w + de = 2926.24$$
$$m = 3239.73, \quad i = 313.49$$
$$\eta = 76^0 15', \quad \log u^0 = 8.57573, \quad \varkappa^0 = 74^0 3' 26''$$
$$fg = 308.66, \quad gd = 1080.54$$
$$w = 4.83, \quad \zeta = 18.90$$
$$n^0 = 249.38$$
$$n = 94.24, \quad n - n^0 = -155,14.$$

Da $n^0 > n$, so nehmen wir $\alpha' = 71^0 40'$. Hier ist es nun bequem, die Werthe der anderen Tangentenwinkel $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ ganz ungeändert, wie bei der ersten Rechnung zu lassen.

$$w' = 1749.67, \quad H' = 2942.10$$
$$d'e' = 1131.69, \quad c'e' = 1592.02$$
$$i' = 358.35, \quad \eta' = 77^0 7'$$
$$\log u_1' = 8.64934, \quad \varkappa_1' = 74^0 44' 15''$$
$$f'g' = 350.45, \quad g'd' = 1284.31$$
$$w' = 7.90, \quad \zeta' = 34.68$$
$$n' = 31.09, \quad n' - n^0 = -218.29, \quad \alpha' - \alpha^0 = 21'$$

$$\alpha = \alpha^0 + \frac{15514}{21829} \cdot 21' = 71^0 19' + 14',92$$

$$\alpha = 71^0 33' 55''.$$

Die in §. 32 entwickelte Formel gab also in diesem Falle den Winkel α um $\frac{1}{4}$ Grad zu klein.

XXXIV.

Vermischtes aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Herrn Dr. *Ludwig Matthiessen*

in Husum.

---

1. Ein seltener Fall. Vor einiger Zeit ereignete sich hierorts bei einer Whistpartie, welche von vier Beamten gespielt wurde, ein Fall wohl der allerseltensten Art. Als nach Verlauf von mehreren Partien (natürlich mit denselben Karten) abermals die Karten gegeben wurden, traf es sich, dass jeder Mitspieler 13 Karten von einer Farbe erhielt. Um einen Begriff von der Rarität und der Kleinheit der Wahrscheinlichkeit einer künftigen Wiederholung desselben Ereignisses zu erhalten, bedenke man, dass 52 Karten unter vier Whistspieler auf $\frac{52!}{4!(13!)^4}$ verschiedene Arten überhaupt vertheilt werden können; unter vier bestimmte Spieler A, B, C, D aber auf $\frac{52!}{(13!)^4}$ verschiedene Arten. Der mitgetheilte Fall würde also unter $(52!):[4!(13!)^4]$ Malen, so dass Jeder 13 Karten derselben Farbe erhielte, einmal eintreffen; dagegen unter $(52!):(13!)^4$ Malen nur 1mal so, dass A wieder dieselbe Farbe a, B dieselbe Farbe b, u. s. w. erhielte. Es ist aber:

$$\frac{52!}{4!(13!)^4} = 2235|197406|895366|368301|560000.$$

Um die Ideen besser zu fixiren, nehmen wir an, dass wenn 1000 Millionen Menschen im Stande wären, Tag und Nacht zu arbeiten und Jeder jede Minute einmal die 52 Karten in 4 Haufen theilte, im Ganzen

4|252658|688918 Jahre 45 Tage,

also weit über 4 Billionen Jahre dazu gehörten, um alle möglichen Variationen zu erhalten. Man kann deshalb wohl mit der grössten Sicherheit behaupten, dass das obenerwähnte Ereigniss einzig in seiner Art dasteht.

---

2. **Ein unterbrochenes Spiel.** Drei Spieler *A*, *B*, *C*, von denen einer drei Spiele gewonnen haben muss, um die Partie zu gewinnen, zahlen verschiedene Einsätze, und zwar *A* 3 Thaler, *B* 2 Thaler, *C* 1 Thaler, mit der Bedingung, dass wenn *A* gewinnt, dieser den ganzen Einsatz, *B* hingegen $^3/_4$ desselben, *C* nur die Hälfte, also 3 Thaler, erhalten, der Rest aber zu milden Zwecken verwendet werden solle. Als *A* zwei Spiele, *B* eins und *C* noch kein einziges gewonnen haben, entzweien sie sich. *A* beansprucht nun den ganzen Einsatz von 6 Thalern, *B* und *C* hingegen fordern ihre Einsätze zurück. Da *B* und *C* sich ausserdem weigern, auf den Vorschlag des *A* das Spiel fortzusetzen, verlangt *A* richterliche Entscheidung. Wie musste dieselbe lauten:

Es fehlten dem *A* noch ein gewonnenes Spiel, dem *B* zwei und dem *C* drei. Da sich nach höchstens vier Spielen die Partie hätte entscheiden müssen, weil ferner die Wahrscheinlichkeit, ein Spiel zu gewinnen, für Jeden $\frac{1}{3}$ beträgt, so entwickle man:

$$(^1/_3+^2/_3)^4 = (^1/_3)^4+4(^1/_3)^3(^2/_3)^1+6(^1/_3)^2(^2/_3)^2+4(^1/_3)(^2/_3)^3+(^2/_3)^4.$$

Hieraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeiten, den Einsatz zu gewinnen, sind:

für *A*: $w_1 = {}^{65}/_{107}$; für *B*: $w_{\prime\prime} = {}^{33}/_{107}$; für *C*: $w_{\prime\prime\prime} = {}^9/_{107}$.

Da ferner *A*'s Ansprüche an den Einsatz das Gewicht 1, *B*'s Ansprüche das Gewicht $^3/_4$, *C*'s Ansprüche das Gewicht $^1/_2$ haben, so sind die 6 Thaler zu vertheilen, wie folgt:

A	erhält	$1.{}^{65}/_{107}.6$	oder	3 Thaler	20 Groschen,
B	„	$^3/_9.{}^{33}/_{107}.6$	„	1 „	12	„
C	„	$^1/_2.{}^9/_{107}.6$	„	— „	$7^1/_2$	„

Die übrigen $20^1/_2$ Groschen sind zu milden Zwecken zu verwenden.

---

3. **Eine Probalität aus dem Gebiete der Zahlentheorie.** Eine der ältesten Regeln, sogenannte „befreundete

Digitized by Google

Zahlen" (numeri amicabiles) zu finden, ist die von van Schooten nach Descartes Mittheilung angegebene: Man soll drei Primzahlen wählen von der Form 3.2^n-1, 6.2^n-1, $18.2^{2n}-1$. Dann ist die letzte Primzahl, mit 2^{n+1} multiplicirt, eine der beiden Freundschaftszahlen und die Summe ihrer aliquoten Theile natürlich die andere. Diese Regel gibt für $n=1$ das Paar 220 und 284; jede von ihnen ist der Summe der aliquoten Theile der anderen gleich. Ausserdem liefern $n=3$ und $n=6$ Freundschaftspaare. Dahingegen nicht $n=2$, 4, 5 und 7 bis 17 incl. keine mehr. Da für grössere Zahlen die Factorentafeln fehlen, so frägt es sich, ob und wie wahrscheinlich es ist, dass für $n>17$ noch Freundschaftspaare gefunden werden könnten *).

Nimmt man nach Gauss und Legendre die Ausdrücke

$$\int_2^x \frac{\partial x}{\log x} \quad \text{und} \quad \frac{x}{\log\text{nat}\, x - 1}$$

als angenäherte Ausdrücke für die Anzahl der Primzahlen unter x an, so ist die Dichtigkeit der Primzahlen für beträchtlich grosse Werthe von x nahezu $1:\log\text{nat}\, x$; mithin die Wahrscheinlichkeit, dass die 3 Zahlen 3.2^n-1, 6.2^n-1, $18.2^{2n}-1$ Primzahlen sein werden, dem Producte der Dichtigkeit der Primzahlen gleich, also nahezu:

$$w=\frac{1}{2(n\log\text{nat}\,2)^3}=\frac{1}{2(\log\text{nat}\,2)^3.n^3}$$

oder $w=\frac{2}{3n^3}$.

Die Wahrscheinlichkeit also, dass überhaupt noch über 17 hinaus der gedachte Fall eintreffe, ist nahezu gleich der Summe der Reihe

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{18^3}+\frac{1}{19^3}+\frac{1}{20^3}+\frac{1}{21^3}+\ldots \text{ in inf.}\right\}.$$

Von der Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots \text{ in inf.}$$

*) Ueber befreundete Zahlen vergl. m. den von Klügel verfassten sehr lehrreichen Artikel: Befreundete Zahlen im Mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 246. Nach Klügel lautet van Schootens Regel eigentlich so: „Man suche, wenn P, Q, R unbestimmte Primzahlen sind, eine Potenz A der 2 von der Beschaffenheit, dass $3A-1=P$, $6A-1=Q$, $18AA-1=R$ ist; dann sind $2AR$ und $2APQ$ ein Paar befreundeter Zahlen." G.

finde ich in den Comment. Petrop. VII. 133. nur die von Euler angegebenen Werthe $\frac{\pi^2}{6}$ und $\frac{\pi^4}{90}$ für $m=2$ und $m=4$.

---

4. Aufgabe. Jemand soll p weisse, q schwarze Kugeln in zwei Urnen derartig vertheilen, dass man durch einen blinden Griff wahrscheinlicher weiss als schwarz zieht. Wie ist diese Vertheilung vorzunehmen? Auf wie vielfache Art ist eine solche Vertheilung möglich, wenn $p=3$ und $q=4$ ist?

XXXV.

Ueber ein algebraisches Problem von Herrn Barnaba Tortolini in Rom, die cubischen Gleichungen betreffend.

Von

Herrn Dr. *Ludwig Matthiessen*

in Husum.

Laut des Literar. Berichts CLXXXIV. S. 15. des Archivs ist in den Annali di mat. Tom. VII. p. 297. ein Artikel von Tortolini veröffentlicht, enthaltend: Risoluzione di un problema relativo all' equazioni di terzo grado. Die Aufgabe ist: Wenn eine cubische Gleichung gegeben ist, die Gleichung zu finden, deren Wurzeln die Verhältnisse je zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Da ich mich leider nicht im Besitz der Ann. di mat. befinde, so kann ich nicht beurtheilen, ob die folgende Deduction neue Gesichtspunkte darbietet *).

Gegeben sei also die Gleichung

$$x^3-ax^2+bx-c=0,$$

*) Ich glaube es. Entlehnt ist die Aufgabe eigentlich aus: The Educational Times. August 1866. p. 108. G.

Digitized by Google

und die Wurzeln x_0, $x_{,}$, $x_{,,}$ derselben seien resp. α, β, γ. Es soll die Gleichung

$$y^6+my^5+ny^4+py^3+qy^2+ry+s=0$$

gefunden werden, welche die Verhältnisse

$$\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{\alpha}{\gamma},\quad \frac{\gamma}{\alpha},\quad \frac{\beta}{\gamma},\quad \frac{\gamma}{\beta}$$

zu Wurzeln hat. Hieraus geht zunächst hervor, dass die gesuchte Gleichung eine reciproke Gleichung des sechsten Grades sein muss; also von der Form:

$$y^6+py^5+qy^4+ry^3+qy^2+py+1=0.$$

Bildet man diese Gleichung mittelst binomischer Factoren aus dem Producte:

$$\left(y-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(y-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(y-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(y-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(y-\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(y-\frac{\gamma}{\beta}\right)=0,$$

so findet man leicht:

$$y^6-\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)y^5+\left\{3+\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\Sigma\left(\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\right)+\Sigma\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)\right\}y^4$$
$$-\left\{2+2\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\Sigma\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\right\}y^3$$
$$+\left\{3+\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\Sigma\left(\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\right)+\Sigma\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)\right\}y^2-\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)y+1=0.$$

Um die Summen der symmetrischen Functionen zu erhalten, bedarf man der Gleichungen:

$$\alpha+\beta+\gamma=a,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=M=a^2-2b,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b,\quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=N=a^3-3ab+3c,$$
$$\alpha\beta\gamma=c,\quad \alpha^3\beta^3+\alpha^3\gamma^3+\beta^3\gamma^3=P=b^3-3abc+3c^2.$$

Nun ist:

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\gamma+(\alpha^2+\gamma^2)\beta+(\beta^2+\gamma^2)\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{aM-N}{c}=\frac{ab-3c}{c},$$
$$\Sigma\left(\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\right)=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a^3-3ab+3c}{c},$$
$$\Sigma\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)=\frac{\alpha^3\beta^3+\alpha^3\gamma^3+\beta^3\gamma^3}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=\frac{b^3-3abc+3c^2}{c^2},$$
$$\Sigma\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)=\left[\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2-2\left[3+\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\Sigma\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)+\Sigma\left(\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\right)\right]$$
$$=\frac{-2a^3c+a^2b^2+4abc-3c^2-2b^3}{c^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die y-Gleichung ein, so erhält man:

$$y^6-\frac{ab-3c}{c}y^5+\frac{a^3c-5abc+b^3+6c^2}{c^2}y^4-\frac{-2a^3c+a^2b^2+6abc-7c^2-2b^3}{c^2}y^3$$

$$+\frac{a^3c-5abc+b^3+6c^2}{c^2}y^2-\frac{ab-3c}{c}y+1=0.$$

Sind also die drei Wurzeln gleich, nämlich $\beta=\gamma=\alpha$, so ist:

$$a=3\alpha,\quad b=3\alpha^2,\quad c=\alpha^3$$

und die bicubische Gleichung geht über in:

$$y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1=0,$$

in welchem Falle man erhält:

$$y_0=y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=1.$$

XXXVI.

Ueber einen Satz von der Ellipse.

Von

dem Herausgeber.

Lehrsatz.

Wenn in eine Ellipse, deren Mittelpunkt C sein mag, ein Dreieck $A_0A_1A_2$ beschrieben ist, so ziehe man nach den Mittelpunkten

$$B_0,\quad B_1,\quad B_2$$

der Seiten

$$A_1A_2,\quad A_2A_0,\quad A_0A_1$$

Digitized by Google

dieses Dreiecks die Halbmesser

$$CB_0, \quad CB_1, \quad CB_2$$

der Ellipse. Zieht man dann durch einen ganz beliebigen Punkt A der Ellipse mit den Halbmessern

$$CB_0, \quad CB_1, \quad CB_2$$

die Parallelen

$$AD_0, \quad AD_1, \quad AD_2,$$

welche die Seiten

$$A_1A_2, \quad A_2A_0, \quad A_0A_1$$

des Dreiecks $A_0A_1A_2$ in den Punkten D_0, D_1, D_2 schneiden; so liegen diese drei Durchschnittspunkte jederzeit in **einer** Geraden.

Beweis.

Die Coordinaten der drei Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2$$

seien in bekannter Bezeichnung respective:

$$a\cos u_0,\; b\sin u_0; \quad a\cos u_1,\; b\sin u_1; \quad a\cos u_2,\; b\sin u_2.$$

Dann sind die Coordinaten der Mittelpunkte

$$B_0, \quad B_1, \quad B_2$$

der Seiten

$$A_1A_2, \quad A_2A_0, \quad A_0A_1$$

des Dreiecks $A_0A_1A_2$ respective:

$$\tfrac{1}{2}a(\cos u_1 + \cos u_2) = a\cos\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2),$$
$$\tfrac{1}{2}b(\sin u_1 + \sin u_2) = b\sin\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2);$$

$$\tfrac{1}{2}a(\cos u_2 + \cos u_0) = a\cos\tfrac{1}{2}(u_2 + u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$
$$\tfrac{1}{2}b(\sin u_2 + \sin u_0) = b\sin\tfrac{1}{2}(u_2 + u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0);$$

$$\tfrac{1}{2}a(\cos u_0 + \cos u_1) = a\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1),$$
$$\tfrac{1}{2}b(\sin u_0 + \sin u_1) = b\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1).$$

Folglich sind die Gleichungen der durch den Anfang C der Coordinaten gehenden Geraden

$$CB_0, \quad CB_1, \quad CB_2$$

respective:

$$y=\frac{b}{a}x\tang\tfrac{1}{2}(u_1+u_2),$$

$$y=\frac{b}{a}x\tang\tfrac{1}{2}(u_2+u_0),$$

$$y=\frac{b}{a}x\tang\tfrac{1}{2}(u_0+u_1).$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des beliebigen Punktes A in der Ellipse durch

$$a\cos u,\quad b\sin u;$$

so sind die Gleichungen der den Halbmessern

$$CB_0,\quad CB_1,\quad CB_2$$

parallelen Geraden

$$AD_0,\quad AD_1,\quad AD_2$$

respective:

$$y-b\sin u=\frac{b}{a}\tang\tfrac{1}{2}(u_1+u_2).(x-a\cos u),$$

$$y-b\sin u=\frac{b}{a}\tang\tfrac{1}{2}(u_2+u_0).(x-a\cos u),$$

$$y-b\sin u=\frac{b}{a}\tang\tfrac{1}{2}(u_0+u_1).(x-a\cos u);$$

oder, wie man leicht findet:

$$bx\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)-ay\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\sin\{\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)-u\},$$

$$bx\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)-ay\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)=ab\sin\{\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)-u\},$$

$$bx\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-ay\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\sin\{\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-u\}.$$

Die Gleichungen der Seiten

$$A_1A_2,\quad A_2A_0,\quad A_0A_1$$

sind beziehungsweise:

$$y-b\sin u_1=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u_1-\sin u_2}{\cos u_1-\cos u_2}(x-a\cos u_1),$$

$$y-b\sin u_2=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u_2-\sin u_0}{\cos u_2-\cos u_0}(x-a\cos u_2),$$

$$y-b\sin u_0=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u_0-\sin u_1}{\cos u_0-\cos u_1}(x-a\cos u_0);$$

oder:

$$y-b\sin u_1=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u_1+u_2).(x-a\cos u_1),$$

$$y-b\sin u_2=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u_2+u_0).(x-a\cos u_2),$$

$$y-b\sin u_0=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u_0+u_1).(x-a\cos u_0);$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1).$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte

$$D_0,\quad D_1,\quad D_2$$

der Geraden

$$AD_0,\quad AD_1,\quad AD_2$$

mit den Seiten

$$A_1A_2,\quad A_2A_0,\quad A_0A_1$$

respective durch

$$X_0,\ Y_0;\quad X_1,\ Y_1;\quad X_2,\ Y_2;$$

so haben wir zu deren Bestimmung nach dem Vorhergehenden die Gleichungen:

$$bX_0\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)-aY_0\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\sin\{\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)-u\},$$
$$bX_0\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+aY_0\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2);$$

$$bX_1\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)-aY_1\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)=ab\sin\{\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)-u\},$$
$$bX_1\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)+aY_1\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

$$bX_2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-aY_2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\sin\{\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-u\},$$
$$bX_2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+aY_2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1);$$

aus denen sich leicht:

$$2X_0=a\{\cos u+\cos u_1+\cos u_2-\cos(u_1+u_2-u)\},$$
$$2Y_0=b\{\sin u+\sin u_1+\sin u_2-\sin(u_1+u_2-u)\};$$

$$2X_1=a\{\cos u+\cos u_2+\cos u_0-\cos(u_2+u_0-u)\},$$
$$2Y_1=b\{\sin u+\sin u_2+\sin u_0-\sin(u_2+u_0-u)\};$$

$$2X_2=a\{\cos u+\cos u_0+\cos u_1-\cos(u_0+u_1-u)\},$$
$$2Y_2=b\{\sin u+\sin u_0+\sin u_1-\sin(u_0+u_1-u)\}$$

Digitized by Google

ergiebt.

Aus diesen bemerkenswerthen Formeln leitet man leicht die folgenden Formeln ab:

$$X_0-X_1=-2a\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u),$$
$$X_1-X_2=-2a\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u),$$
$$X_2-X_0=-2a\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u);$$

$$Y_0-Y_1=-2b\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u),$$
$$Y_1-Y_2=-2b\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u),$$
$$Y_2-Y_0=-2b\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u).$$

Die Bedingungsgleichung, dass die Punkte D_0, D_1, D_2 oder (X_0Y_0), (X_1Y_1), (X_2Y_2) in einer Geraden liegen, ist bekanntlich:

$$X_0(Y_1-Y_2)+X_1(Y_2-Y_0)+X_2(Y_0-Y_1)=0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}X_0(Y_1-Y_2)\\+\{X_0-(X_0-X_1)\}(Y_2-Y_0)\\+\{X_0+(X_2-X_0)\}(Y_0-Y_1)\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}X_0\{(Y_1-Y_2)+(Y_2-Y_0)+(Y_0-Y_1)\}\\-\{(X_0-X_1)(Y_2-Y_0)-(X_2-X_0)(Y_0-Y_1)\}\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$(X_0-X_1)(Y_2-Y_0)-(X_2-X_0)(Y_0-Y_1)=0,$$

oder:

$$(X_0-X_1)(Y_2-Y_0)=(X_2-X_0)(Y_0-Y_1).$$

Dass aber diese Gleichung erfüllt ist, geht aus den obigen Ausdrücken der Differenzen der Coordinaten der Punkte D_0, D_1, D_2 auf der Stelle hervor, und unser Satz ist daher bewiesen.

Suchen wir nun noch die Gleichung der durch die Punkte D_0, D_1, D_2 gehenden Geraden.

Diese Gleichung ist:

$$y-Y_0=\frac{Y_0-Y_1}{X_0-X_1}(x-X_0),$$

oder:

$$(Y_0-Y_1)x-(X_0-X_1)y=X_0(Y_0-Y_1)-Y_0(X_0-X_1),$$

also, wenn man die obigen Ausdrücke von

$$X_0,\ Y_0 \quad\text{und}\quad X_0-X_1,\ Y_0-Y_1$$

einführt, und die dadurch hervorgehende Gleichung durch

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u)$$

dividirt:

$$2\{ay\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u)-bx\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u)\}$$

$$=ab\left\{\begin{array}{l}\quad[\sin u+\sin u_1+\sin u_2-\sin(u_1+u_2-u)]\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u)\\-[\cos u+\cos u_1+\cos u_2-\cos(u_1+u_2-u)]\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u)\end{array}\right\}$$

$$=ab\left\{\begin{array}{l}\quad\sin\tfrac{1}{2}(3u-u_0-u_1-u_2)\\+\sin\tfrac{1}{2}(u+u_0-u_1-u_2)\\+\sin\tfrac{1}{2}(u-u_0+u_1-u_2)\\+\sin\tfrac{1}{2}(u-u_0-u_1+u_2)\end{array}\right\},$$

oder:

$$2\{ay\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u)-bx\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u)\}$$

$$=ab\left\{\begin{array}{l}\quad\sin\tfrac{1}{2}\{(u-u_0)+(u-u_1)+(u-u_2)\}\\+\sin\tfrac{1}{2}\{(u-u_0)+(u_1-u_2)\}\\+\sin\tfrac{1}{2}\{(u-u_1)+(u_2-u_0)\}\\+\sin\tfrac{1}{2}\{(u-u_2)+(u_0-u_1)\}\end{array}\right\},$$

welche Gleichung ganz symmetrisch ist.

Der von mir hier bewiesene Satz ist von Herrn J. J. Walker in London in dem Journal: „The Educational Times. August 1867. p. 111." ohne Beweis aufgestellt worden. Andeutungen zu einem Beweise von Herrn W. S. McCay in Edinburgh und Herrn S. Bills in Newark-on-Trent finden sich an demselben Orte. Die von mir im Obigen entwickelten Formeln und Gleichungen dürften sich vielleicht besonders durch ihre Symmetrie empfehlen.

Die Erweiterung auf die Kegelschnitte überhaupt überlasse ich dem Leser.

XXXVII.

Ueber einen Satz vom Kreise.

Von

dem Herausgeber.

Lehrsatz.

Durch einen Punkt A eines Kreises seien drei Gerade gezogen, welche den Kreis zum zweiten Male in den Punkten A_0, A_1, A_2 schneiden. Beschreibt man nun über den Sehnen AA_0, AA_1, AA_2 als Durchmessern drei Kreise, welche also sämmtlich durch den Punkt A gehen, so liegen die drei zweiten Durchschnittspunkte dieser drei Kreise jederzeit in **einer** Geraden.

Beweis.

Bevor wir auf den Beweis dieses Satzes näher eingehen, wollen wir zuerst im Allgemeinen zeigen, wie, wenn die Coordinaten des einen Durchschnittspunkts zweier Kreise gegeben sind, die Coordinaten des anderen Durchschnittspunkts dieser beiden Kreise gefunden werden können.

Zu dem Ende seien:

$$(x-a_0)^2+(y-b_0)^2=r_0^2,$$
$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

die Gleichungen der beiden Kreise, und a, b seien die Coordinaten ihres einen Durchschnittspunkts. Bezeichnen wir nun die Coordinaten des anderen Durchschnittspunkts durch x_{01}, y_{01}; so haben wir die folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$(x_{01}-a_0)^2+(y_{01}-b_0)^2=r_0{}^2,$$
$$(x_{01}-a_1)^2+(y_{01}-b_1)^2=r_1{}^2;$$

welche sich auf folgende Art schreiben lassen:

$$\{(x_{01}-a)+(a-a_0)\}^2+\{(y_{01}-b)+(b-b_0)\}^2=r_0{}^2,$$
$$\{(x_{01}-a)+(a-a_1)\}^2+\{(y_{01}-b)+(b-b_1)\}^2=r_1{}^2.$$

Entwickelt man nun die Quadrate, und bemerkt, dass, weil (ab) der eine Durchschnittspunkt der beiden Kreise ist, die beiden Gleichungen:

$$(a-a_0)^2+(b-b_0)^2=r_0{}^2,$$
$$(a-a_1)^2+(b-b_1)^2=r_1{}^2$$

Statt finden; so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$(x_{01}-a)^2+(y_{01}-b)^2+2\{(a-a_0)(x_{01}-a)+(b-b_0)(y_{01}-b)\}=0,$$
$$(x_{01}-a)^2+(y_{01}-b)^2+2\{(a-a_1)(x_{01}-a)+(b-b_1)(y_{01}-b)\}=0;$$

und durch deren Subtraction die Gleichung:

$$(a_0-a_1)(x_{01}-a)+(b_0-b_1)(y_{01}-b)=0.$$

Insofern wir nun annehmen, dass die beiden Kreise wirklich in dem Punkte (ab) sich schneiden, können offenbar die beiden Grössen

$$a_0-a_1 \quad \text{und} \quad b_0-b_1$$

nicht zugleich verschwinden, weshalb wir etwa voraussetzen wollen, dass b_0-b_1 nicht verschwinde. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der vorstehenden Gleichung:

$$y_{01}-b=-\frac{a_0-a_1}{b_0-b_1}(x_{01}-a),$$

also:

$$(x_{01}-a)^2+(y_{01}-b)^2=\frac{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2}{(b_0-b_1)^2}(x_{01}-a)^2$$

und:

$$(a-a_0)(x_{01}-a)+(b-b_0)(y_{01}-b)$$
$$=\frac{(a-a_0)(b_0-b_1)-(b-b_0)(a_0-a_1)}{b_0-b_1}(x_{01}-a).$$

Daher hat man nach dem Obigen die Gleichung:

$$\frac{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2}{(b_0-b_1)^2}(x_{01}-a)^2+2\frac{(a-a_0)(b_0-b_1)-(b-b_0)(a_0-a_1)}{b_0-b_1}(x_{01}-a)$$
$$=0.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$x_{01}-a=0;$$

dann ist aber wegen der Gleichung

$$y_{01}-b=-\frac{a_0-a_1}{b_0-b_1}(x_{01}-a)$$

auch

$$y_{01}-b=0;$$

folglich:

$$x_{01}-a=0,\quad y_{01}-b=0 \text{ oder } x_{01}=a,\quad y_{01}=b;$$

so dass also der Punkt $(x_{01}y_{01})$ der Durchschnittspunkt (ab) der beiden Kreise ist, welcher hier nicht gesucht wird. Nach dem Obigen müssen wir also:

$$\frac{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2}{(b_0-b_1)^2}(x_{01}-a)+2\frac{(a-a_0)(b_0-b_1)-(b-b_0)(a_0-a_1)}{b_0-b_1}$$
$$=0$$

setzen, woraus sich, zugleich in Verbindung mit der Gleichung

$$y_{01}-b=-\frac{a_0-a_1}{b_0-b_1}(x_{01}-a),$$

zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten x_{01}, y_{01} die folgenden Formeln ergeben:

$$x_{01}-a=-\frac{2(b_0-b_1)\{(a-a_0)(b_0-b_1)-(b-b_0)(a_0-a_1)\}}{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2},$$

$$y_{01}-b=\frac{2(a_0-a_1)\{(a-a_0)(b_0-b_1)-(b-b_0)(a_0-a_1)\}}{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2}.$$

Die Voraussetzung, dass a_0-a_1 nicht verschwindet, führt ganz zu denselben Formeln, und dieselben sind also allgemein gültig.

Indem wir nun zu dem Beweise unseres Satzes übergehen, bezeichnen wir den Halbmesser des gegebenen Kreises durch r, und nehmen dessen Mittelpunkt als Pol eines polaren Coordinatensystems an, welches wir, in Verbindung mit dem entsprechenden rechtwinkligen Coordinatensysteme der xy, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des gegebenen Kreises ist, in welchem Systeme ferner der positive Theil der Axe der x mit der Axe des polaren Coordinatensystems zusammenfällt und der positive Theil der Axe der y auf der Seite der Axe der x liegt, nach welcher hin die Winkel in dem polaren Coordinatensysteme von

seiner Axe an von 0 bis 360° gezählt werden, unseren folgenden Betrachtungen zu Grunde legen. Dies vorausgesetzt, sind nun alle im Folgenden zur Betrachtung kommenden Coordinaten rechtwinklige Coordinaten, ausgedrückt durch die entsprechenden polaren Coordinaten.

Die Coordinaten des Punktes A seien:

$$r\cos\alpha,\quad r\sin\alpha;$$

die Coordinaten der Punkte

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2$$

seien respective:

$$r\cos\alpha_0,\ r\sin\alpha_0;\quad r\cos\alpha_1,\ r\sin\alpha_1;\quad r\cos\alpha_2,\ r\sin\alpha_2.$$

Folglich sind die Coordinaten der Mittelpunkte der Sehnen

$$AA_0,\quad AA_1,\quad AA_2$$

beziehungsweise:

$$\begin{array}{ll} \tfrac{1}{2}r(\cos\alpha+\cos\alpha_0), & \tfrac{1}{2}r(\sin\alpha+\sin\alpha_0);\\ \tfrac{1}{2}r(\cos\alpha+\cos\alpha_1), & \tfrac{1}{2}r(\sin\alpha+\sin\alpha_1);\\ \tfrac{1}{2}r(\cos\alpha+\cos\alpha_2), & \tfrac{1}{2}r(\sin\alpha+\sin\alpha_2). \end{array}$$

Wenn wir nun die Coordinaten x_{01}, y_{01} des zweiten Durchschnittspunkts der in dem Punkte A sich schneidenden, über den Sehnen AA_0, AA_1 als Durchmessern beschriebenen Kreise finden wollen, so müssen wir in unseren obigen allgemeinen Formeln:

$$\begin{array}{ll} a=r\cos\alpha, & b=r\sin\alpha;\\ a_0=\tfrac{1}{2}r(\cos\alpha+\cos\alpha_0), & b_0=\tfrac{1}{2}r(\sin\alpha+\sin\alpha_0);\\ a_1=\tfrac{1}{2}r(\cos\alpha+\cos\alpha_1), & b_1=\tfrac{1}{2}r(\sin\alpha+\sin\alpha_1) \end{array}$$

setzen, woraus sich ergiebt:

$$\begin{aligned} a-a_0 &= \tfrac{1}{2}r(\cos\alpha-\cos\alpha_0)\\ &=-r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0),\\ b-b_0 &= \tfrac{1}{2}r(\sin\alpha-\sin\alpha_0)\\ &= r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0);\\ a_0-a_1 &= \tfrac{1}{2}r(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)\\ &=-r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1),\\ b_0-b_1 &= \tfrac{1}{2}r(\sin\alpha_0-\sin\alpha_1)\\ &= r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1). \end{aligned}$$

Folglich ist:

Digitized by Google

$$(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2=r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)^2,$$

und:

$$\begin{aligned}&(a-a_0)(b_0-b_1)-(b-b_0)(a_0-a_1)\\
=&-r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\\
&+r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\\
=&-r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1).\end{aligned}$$

Daher ist nach den obigen allgemeinen Formeln, wie man sogleich übersieht:

$$x_{01}-r\cos\alpha=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1),$$
$$y_{01}-r\sin\alpha=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1);$$

und auf ganz ähnliche Weise hat man in ähnlicher Bezeichnung:

$$x_{12}-r\cos\alpha=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2),$$
$$y_{12}-r\sin\alpha=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2);$$

und:

$$x_{20}-r\cos\alpha=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0),$$
$$y_{20}-r\sin\alpha=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0).$$

Bekanntlich ist die Bedingungsgleichung, dass die drei Punkte

$$(x_{01}y_{01}),\quad (x_{12}y_{12}),\quad (x_{20}y_{20})$$

in gerader Linie liegen:

$$x_{01}(y_{12}-y_{20})+x_{12}(y_{20}-y_{01})+x_{20}(y_{01}-y_{12})=0;$$

oder, weil

$$r\cos\alpha(y_{12}-y_{20})+r\cos\alpha(y_{20}-y_{01})+r\cos\alpha(y_{01}-y_{12})=0$$

ist:

$$\left.\begin{aligned}&(x_{01}-r\cos\alpha)(y_{12}-y_{20})\\+&(x_{12}-r\cos\alpha)(y_{20}-y_{01})\\+&(x_{20}-r\cos\alpha)(y_{01}-y_{12})\end{aligned}\right\}=0;$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}&(x_{01}-r\cos\alpha)\{(y_{12}-r\sin\alpha)-(y_{20}-r\sin\alpha)\}\\+&(x_{12}-r\cos\alpha)\{(y_{20}-r\sin\alpha)-(y_{01}-r\sin\alpha)\}\\+&(x_{20}-r\cos\alpha)\{(y_{01}-r\sin\alpha)-(y_{12}-r\sin\alpha)\}\end{aligned}\right\}=0.$$

Nach dem Obigen wird also diese Bedingungsgleichung, wenn man für die in derselben vorkommenden Differenzen die betreffenden Ausdrücke einführt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)$$

$$\times\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\}$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)$$

$$\times\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\}$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)$$

$$\times\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\}$$

$$=0.$$

Wäre nun etwa

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)=0,$$

so wäre, indem k eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)=k\pi,\quad \alpha-\alpha_0=2k\pi.$$

Weil aber der absolute Werth von $\alpha-\alpha_0$ nicht grösser als 2π ist, so kann nur $k=-1$, oder $k=0$, oder $k=+1$; und folglich nur:

$$\alpha-\alpha_0=-2\pi,\quad \alpha-\alpha_0=0,\quad \alpha-\alpha_0=+2\pi$$

oder:

$$\alpha_0=\alpha+2\pi,\quad \alpha=\alpha_0,\quad \alpha=\alpha_0+2\pi$$

sein. Keiner dieser drei Fälle ist möglich, insofern AA_0 eine wirkliche nicht verschwindende Sehne ist, und es kann folglich $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)$ nicht verschwinden. Eben so wenig können $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)$ und $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)$ verschwinden, und es verschwindet folglich das Product

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)$$

nicht. Daher ist die obige Bedingungsgleichung:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\}$$

$$+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\}$$

$$+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\}$$

$$=0,$$

oder:

Digitized by Google

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\}$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\}$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\}$$
$$=0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\\ +\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)\\ +\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)\end{array}\right\}=0,$$

oder durch Verwandlung der Producte in Differenzen:

$$\left.\begin{array}{r}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)\\ +\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2)\\ +\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)\end{array}\right\}=0,$$

eine Gleichung, welche in der That identisch erfüllt ist, wodurch also unser Satz bewiesen ist.

Wir wollen nun noch die Gleichung der Geraden suchen, in welcher die drei Punkte

$$(x_{01}\,y_{01}),\quad (x_{12}\,y_{12}),\quad (x_{20}\,y_{20})$$

liegen.

Die Gleichung dieser Geraden ist:

$$(x_{01}-x_{12})(y-y_{01})=(y_{01}-y_{12})(x-x_{01}),$$

oder:

$$\{(x_{01}-r\cos\alpha)-(x_{12}-r\cos\alpha)\}\{(y-r\sin\alpha)-(y_{01}-r\sin\alpha)\}$$
$$=\{(y_{01}-r\sin\alpha)-(y_{12}-r\sin\alpha)\}\{(x-r\cos\alpha)-(x_{01}-r\cos\alpha)\},$$

oder:

$$\begin{array}{rl} & \{(y_{01}-r\sin\alpha)-(y_{12}-r\sin\alpha)\}(x-r\cos\alpha)\\ & -\{(x_{01}-r\cos\alpha)-(x_{12}-r\cos\alpha)\}(y-r\sin\alpha)\\ = & (x_{01}-r\cos\alpha)\{(y_{01}-r\sin\alpha)-(y_{12}-r\sin\alpha)\}\\ & -(y_{01}-r\sin\alpha)\{(x_{01}-r\cos\alpha)-(x_{12}-r\cos\alpha)\}.\end{array}$$

Nach dem Obigen ist:

Digitized by Google

$$(x_{01}-r\cos\alpha)-(x_{12}-r\cos\alpha)$$

$$=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\}$$

$$=r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\left\{\begin{array}{c}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-2\alpha_0-\alpha_1)\\ -\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1-2\alpha_2)\end{array}\right\}$$

$$=r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-2\alpha_0-\alpha_1)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1-2\alpha_2)\}$$

$$=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2),$$

$$(y_{01}-r\sin\alpha)-(y_{12}-r\sin\alpha)$$

$$=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\}$$

$$=r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\left\{\begin{array}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-2\alpha_0-\alpha_1)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)\\ -\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1-2\alpha_2)+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)\end{array}\right\}$$

$$=r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-2\alpha_0-\alpha_1)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1-2\alpha_2)\}$$

$$=-2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2).$$

Ferner ist:

$$(x_{01}-r\cos\alpha)\{(y_{01}-r\sin\alpha)-(y_{12}-r\sin\alpha)\}$$

$$-(y_{01}-r\sin\alpha)\{(x_{01}-r\cos\alpha)-(x_{12}-r\cos\alpha)\}$$

$$=-(x_{01}-r\cos\alpha)(y_{12}-r\sin\alpha)+(y_{01}-r\sin\alpha)(x_{12}-r\cos\alpha)$$

$$=-4r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$+4r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=-4r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0);$$

und daher die Gleichung unserer Geraden:

$$-2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2).(x-r\cos\alpha)$$

$$-2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2).(y-r\sin\alpha)$$

$$=-4r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0).$$

Ganz eben so, wie oben gezeigt worden ist, dass die Factoren

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2)$$

nicht verschwinden können, überzeugt man sich, dass auch $\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_0)$ nicht verschwinden kann, wobei man, wie früher die Sehnen:

$$AA_0,\quad AA_1,\quad AA_2;$$

jetzt nur die Sehne A_2A_0 in's Auge zu fassen braucht; daher ergiebt sich aus dem Obigen die folgende merkwürdige Gleichung der durch die Punkte:

$$(x_{01}y_{01}),\quad (x_{12}y_{12}),\quad (x_{20}y_{20})$$

gehenden Geraden:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2).(x-r\cos\alpha)+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2).(y-r\sin\alpha)$$
$$=2r\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2),$$

oder:

$$\frac{x}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)+\frac{y}{r}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(3\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)+2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2),$$

oder:

$$\frac{x}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)+\frac{y}{r}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\alpha_0)+(\alpha-\alpha_1)+(\alpha-\alpha_2)\}+2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_2).$$

Nun ist aber allgemein:

$$\sin(x+y+z)+2\sin x\sin y\sin z$$
$$=\sin(x+y+z)+\cos(x-y)\sin z-\cos(x+y)\sin z$$
$$=\sin(x+y+z)+\tfrac{1}{2}\sin(x-y+z)-\tfrac{1}{2}\sin(x-y-z)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin(x+y+z)+\tfrac{1}{2}\sin(x+y-z)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\sin(x+y+z)+\sin(-x+y+z)+\sin(x-y+z)+\sin(x+y-z)\},$$

und folglich nach dem Obigen die Gleichung unserer Geraden:

$$\frac{2x}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)+\frac{2y}{r}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\alpha_0)+(\alpha-\alpha_1)+(\alpha-\alpha_2)\}$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}\{-(\alpha-\alpha_0)+(\alpha-\alpha_1)+(\alpha-\alpha_2)\}$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\alpha_0)-(\alpha-\alpha_1)+(\alpha-\alpha_2)\}$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\alpha_0)+(\alpha-\alpha_1)-(\alpha-\alpha_2)\}.$$

Den hier bewiesenen Satz hat in der Zeitschrift: The Educational Times. August 1867. p. 111. Herr A. Renschaw in Sherwood Rise, Nottingham ohne Beweis mitgetheilt, und Herr Hirst in London hat denselben ebendaselbst durch eine geometrische Betrachtung auf einen anderen Satz zurückgeführt; die von mir im Obigen entwickelten Gleichungen können, glaube ich, noch zu manchen anderen bemerkenswerthen Resultaten führen.

Digitized by Google

XXXVIII.

Miscellen.

Eine Aufgabe über einen geometrischen Ort.

Von dem Herausgeber.

Aufgabe.

Den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte je zweier Berührenden einer Ellipse zu bestimmen, deren Berührungssehne, worunter man bekanntlich die Sehne versteht, welche die Berührungspunkte der beiden Berührenden mit einander verbindet, eine gegebene constante Grösse hat.

Auflösung.

Die Anomalien zweier beliebigen Punkte der Ellipse, deren Gleichung wie gewöhnlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

sein mag, seien u_0, u_1 *). Die Gleichungen der Berührenden der Ellipse in diesen Punkten sind:

$$1)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l}\frac{x}{a}\cos u_0+\frac{y}{b}\sin u_0=1,\\ \frac{x}{a}\cos u_1+\frac{y}{b}\sin u_1=1;\end{array}\right.$$

---

*) Wegen aller hier zur Anwendung kommenden Formeln verweise ich auf meine Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX.

Digitized by Google

wo x, y diesen beiden Gleichungen genügen müssen, da es sich um den Durchschnittspunkt der beiden Berührenden handelt. Bezeichnet nun s den gegebenen constanten Werth der Länge der Berührungssehne, so ist bekanntlich:

$$2)\quad s^2=4\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2\}.$$

Aus den drei vorstehenden Gleichungen müssen, um die Gleichung des zu bestimmenden Orts zu finden, die beiden Anomalien u_0, u_1 eliminirt werden.

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen 1) erhält man:

3)

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)=1,$$

$$\frac{x}{a}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)-\frac{y}{b}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)=0;$$

also:

$$\frac{x}{a}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=\frac{y}{b}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1),$$

folglich:

$$\frac{x^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{y^2}{b^2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2,$$

$$\frac{y^2}{b^2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{x^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2;$$

woraus sich:

$$4)\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2&=\frac{\frac{y^2}{b^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=\frac{a^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2},\\ \cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2&=\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=\frac{b^2x^2}{b^2x^2+a^2y^2}\end{aligned}\right.$$

ergiebt.

Folglich ist:

$$a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{b^4x^2+a^4y^2}{b^2x^2+a^2y^2},$$

und daher nach 2):

Digitized by Google

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2 &= \frac{b^2x^2+a^2y^2}{b^4x^2+a^4y^2}\cdot\frac{s^2}{4}, \\ \cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2 &= \frac{4(b^4x^2+a^4y^2)-(b^2x^2+a^2y^2)s^2}{4(b^4x^2+a^4y^2)}. \end{aligned}\right.$$

Quadrirt man die erste der beiden Gleichungen 3), so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+\frac{y^2}{b^2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2 \\ +2\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) \end{aligned}\right\} = \frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2}.$$

Nach 4) ist:

$$\frac{x^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+\frac{y^2}{b^2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{b^2x^2}{b^2x^2+a^2y^2}+\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{a^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2},$$

und nach dem Obigen ist ferner:

$$\frac{x}{a}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=\frac{y}{b}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1),$$

also:

$$\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=\frac{y^2}{b^2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{x^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2}.$$

Daher erhält man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{b^2x^2}{b^2x^2+a^2y^2}+\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{a^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2}+\frac{2x^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2}=\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2},$$

folglich:

$$b^4x^4+a^4y^4+2a^2b^2x^2y^2=\frac{a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2},$$

also:

$$(b^2x^2+a^2y^2)^2=\frac{a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2},$$

woraus sich die Gleichung:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2=\frac{a^2b^2}{b^2x^2+a^2y^2},$$

also nach 5) die Gleichung:

$$\frac{4(b^4x^2+a^4y^2)-(b^2x^2+a^2y^2)s^2}{4(b^4x^2+a^4y^2)}=\frac{a^2b^2}{b^2x^2+a^2y^2}$$

ergiebt, welches die Gleichung des zu bestimmenden Orts ist. Leicht bringt man aber diese Gleichung auf die Form:

$$6)\quad (b^2x^2+a^2y^2)^2s^2=4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)(b^4x^2+a^4y^2).$$

Setzen wir:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;$$

so wird diese Gleichung:

$$(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2s^2r^2$$
$$=4\{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)r^2-a^2b^2\}(a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2),$$

woraus sich:

$$r^2=\frac{4a^2b^2(a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)\{4(a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)-(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)s^2\}}$$

oder:

$$r^2=\frac{4a^2b^2(a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)}{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)\{a^2(4a^2-s^2)\sin\varphi^2+b^2(4b^2-s^2)\cos\varphi^2\}},$$

also:

7)

$$r=\frac{2ab\sqrt{a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2}}{\sqrt{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)\{a^2(4a^2-s^2)\sin\varphi^2+b^2(4b^2-s^2)\cos\varphi^2\}}}$$

ergiebt.

Die Gleichung 6) lässt sich auch auf folgende Art schreiben:

8)

$$\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right\}^2=4\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1\right\}\left\{\left(\frac{x}{a}:\frac{s}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{b}:\frac{s}{a}\right)^2\right\},$$

und überhaupt lassen sich die obigen Gleichungen noch auf verschiedene Arten umgestalten; das Weitere hierüber und die weitere Untersuchung der entsprechenden Ortscurve überlasse ich jedoch für jetzt dem Leser.

Ueber einige Sätze von der Ellipse.

Von dem Herausgeber.

Die Gleichungen zweier conjugirten Durchmesser einer Ellipse, deren Längen wir durch $2A$, $2B$ bezeichnen wollen, sind im Allgemeinen *):

---

*) M. s. die Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX. §. 5.

Digitized by Google

$$y=\frac{b}{a}x\,\mathrm{tang}\,u,\quad y=-\frac{b}{a}x\cot u;$$

und es ist:

$$A^2=a^2\cos u^2+b^2\sin u^2,\quad B^2=a^2\sin u^2+b^2\cos u^2.$$

Durch den einen der beiden Brennpunkte der Ellipse, deren Coordinaten e, 0 sind, wo e positiv und negativ sein soll, lege man eine dem Durchmesser $2B$ parallele Sehne; so ist deren Gleichung:

$$y=-\frac{b}{a}(x-e)\cot u.$$

Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte dieser Sehne mit der Ellipse durch X, Y; so ist:

$$Y=-\frac{b}{a}(X-e)\cot u,\quad \left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1.$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen X, Y, so erhält man:

$$X=\quad e\cos u^2\pm\sin u\sqrt{a^2-e^2\cos u^2},$$
$$Y=\frac{b}{a}\cos u(e\sin u\mp\sqrt{a^2-e^2\cos u^2});$$

oder, weil

$$a^2-e^2\cos u^2=a^2-(a^2-b^2)\cos u^2=a^2\sin u^2+b^2\cos u^2=B^2$$

ist:

$$X=e\cos u^2\pm B\sin u,$$
$$Y=\frac{b}{a}\cos u(e\sin u\mp B).$$

Bezeichnen wir nun die Länge der Sehne durch $2S$, so ist:

$$S^2=B^2\left(\sin u^2+\frac{b^2}{a^2}\cos u^2\right)=\frac{B^2(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)}{a^2},$$

also nach oben Stehendem:

$$S^2=\frac{B^4}{a^2}.$$

Der Flächeninhalt des Vierecks, welches den Diameter $2A$ und die Sehne $2S$ zu Diagonalen hat, sei J; so ist, wenn θ den von den beiden conjugirten Durchmessern eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$J=2AS\sin\theta,$$

und folglich, weil nach einem bekannten Satze von den Kegelschnitten:

Digitized by Google

$$\sin\theta = \frac{ab}{AB} \text{ ist: } J = \frac{2abS}{B},$$

also, weil nach dem Obigen:

$$S = \frac{B^2}{a} \text{ ist: } J = 2bB.$$

Der Inhalt J ist also dem conjugirten Diameter $2B$ proportional.

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt der Sehne $2S$ mit dem Diameter $2A$ durch $(X'Y')$, so haben wir die folgenden Gleichungen:

$$Y' = \frac{b}{a} X' \operatorname{tang} u, \quad Y' = -\frac{b}{a}(X'-e) \cot u;$$

woraus man durch Elimination von u auf der Stelle die Gleichung:

$$a^2 Y'^2 = -b^2 X'(X'-e), \quad \text{oder:} \quad a^2 Y'^2 + b^2 X'(X'-e) = 0$$

erhält. Addirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Grösse $\frac{1}{4}b^2e^2$, so wird dieselbe:

$$a^2 Y'^2 + b^2(X'^2 - eX' + \tfrac{1}{4}e^2) = \tfrac{1}{4}b^2e^2, \text{ also: } b^2(X' - \tfrac{1}{2}e)^2 + a^2 Y'^2 = \tfrac{1}{4}b^2e^2,$$

oder:

$$\left(\frac{X' - \frac{1}{2}e}{\frac{e}{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{\frac{be}{2a}}\right)^2 = 1,$$

woraus sich ergiebt, dass der geometrische Ort des Punktes $(X'Y')$ eine Ellipse ist, die mittelst der vorstehenden Gleichung leicht näher bestimmt werden kann, was wir dem Leser überlassen.

Die obigen Sätze sind von Herrn R. Tucker. M. A. in den „Educational Times. March. 1867. p. 278." mitgetheilt, und von dem Herrn Proposer selbst, und Anderen, bewiesen worden; die obige Darstellung ist davon ganz verschieden, und kann, wie es mir scheint, noch zu weiteren Betrachtungen führen.

Berichtigungen zu Thl. XLVII. Heft I. und II.

Seite	Zeile		für	setze
151	12	v. o.	Cotg	Loth.
161	13	v. u.	gramatici	gromatici.
162	16	v. o.	ἀφιϑμητική	ἀριϑμητική.
238	3	v. u.	$\cos(\varphi + \overline{\lambda - 1})\psi$	$\cos(\varphi + \overline{\lambda - 1}\,\psi)$.
239	8	v. o.	$-n \sin^2\varphi$	$-n \sin^2 \frac{1}{2}\varphi$.
241	7	v. o.	$+\sin^2 m\varphi$	$-\sin^2 m\varphi$.

241 hinter Formel (23) auf Zeile 16 füge man hinzu:

„Ebenso erhält man durch Vergleichung der Formeln (13) und (20) die merkwürdige Gleichung:

$$\sum_{1}^{n-1}(n-\lambda)\cos 2\lambda\varphi + \sin\varphi \sum_{1}^{n-1}(n-\lambda)(n-\lambda+1)\sin(2\lambda-1)\varphi = \tfrac{1}{2}n(n-1). \tag{24}$$"

Literarischer Bericht
CLXXXV.

Am 26sten April 1867 starb in Nizza

Mathias Schaar,

Professor der mathematischen Wissenschaften an der Universität zu Gent und Mitglied der Section des Sciences mathématiques et physiques der Königlich Belgischen Akademie der Wissenschaften in Brüssel, ein vielfach verdienter Mathematiker, dessen Necrolog wir gern im Archiv abdrucken lassen würden, wenn er uns gütigst mitgetheilt werden sollte. G.

Am 1sten Juni 1867 starb an einem Lungenleiden

Dr. Georg Karl Christian v. Staudt,

o. Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen.

Aus einer alten Patrizierfamilie stammend, war derselbe im Jahre 1798 in der ehemals freien Reichsstadt Rothenburg a. d. T. geboren, wurde nach in Göttingen zurückgelegten Studien 1822 Professor der Mathematik am Gymnasium zu Würzburg und Privatdocent an der dortigen Universität, 1827 Professor der Mathematik am Gymnasium zu Nürnberg, und 1835 ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen, wo er bis zu seinem nun erfolgten Tode segensreich gewirkt hat. Die Bearbeitung und weitere Ausbildung der „Geometrie der Lage*)“ hatte er

*) Geometrie der Lage von Dr. G. K. C. von Staudt. Nürnberg. 1847. und später.

Digitized by Google

zur Hauptaufgabe seines wissenschaftlichen Lebens und Strebens gemacht, und seine Arbeiten auf diesem Gebiete werden seinen Namen in der Geschichte der Wissenschaft stets erhalten. Allen, die ihn näher kannten, hinterlässt er das in sich abgeschlossene Bild eines durch anhaltende Geistesarbeit gestählten wissenschaftlichen Charakters eines Mannes, in dem eigenes unermüdliches Weiterstreben mit pietätvoller Berücksichtigung des Bestehenden, Pflichttreue, Rechtssinn und Strenge gegen sich selbst, mit Heiterkeit im geselligen Verkehr, mit Wohlwollen gegen Andere und grösster Anspruchslosigkeit wohlthuend sich vereinigten.

Es würde uns sehr angenehm sein, wenn wir von irgend einer Seite her in den Stand gesetzt würden, diese vorläufigen, grösstentheils aus Zeitungsnachrichten entlehnten Notizen einen ausführlichen Necrolog folgen lassen zu können. G.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

erblickte das Licht der Welt am 17. September 1826 zu Breseleuz bei Lüneburg, wo sein Vater Prediger war. Er war ein geborner Mathematiker, und so fleissig hat er eine seltene hohe Begabung verwerthet, dass, als er im vierzigsten Lebensjahre starb, seine Fachgenossen den Verlust eines Meisters beklagen mussten. Riemann studirte 1846 in Göttingen, 1847 und 1848 in Berlin, habilitirte sich 1854 in Göttingen, wo er drei Jahre später ausserordentlicher und 1859 ordentlicher Professor ward. Zur Milderung eines Lungenleidens nach Selasca bei Intra am Lago maggiore gereist, ist er daselbst am 20. Juli 1866 gestorben.

Auf verschiedenen Gebieten der mathematischen Wissenschaften hat sich Riemann mit glänzendem Erfolge bewährt. Vor Allem aber leuchten jene Arbeiten hervor, welche die Functionen complexer Veränderlichen und ihre Integrale zum Gegenstande haben. Diese Theorieen pflegt man schon jetzt mit Riemann's Namen zu bezeichnen; sie werden sein Andenken in der Geschichte der Wissenschaft fortpflanzen. Sie dienen in eminentem Grade der charakterischen Tendenz der modernen Mathematik, den Calcul mehr und mehr zu ersetzen durch Betrachtung und Räsonnement. Um auf diesem höchst abstracten Gebiete, namentlich bei der verwickelten Discussion vieldeutiger Functionen, Durchsichtigkeit und Anschaulichkeit zu gewinnen, schuf Riemann ein neues Hülfsmittel in der Imagination eigenthümlicher räumlicher Gebilde, an welche die Vorstellung und die wissenschaftliche Terminologie sich anknüpft. Sie beschäftigten seinen Geist schon in den

Studienjahren. Diese neue Art eines halbbildlichen Ausdrucks wusste er zu einem mächtigen Werkzeug des analytischen Studiums zu gestalten. Von seiner Thätigkeit durch einen frühen Tod abgerufen, hinterlässt er den Ruhm, als ein würdiger Nachfolger seiner Lehrer Gauss und Dirichlet an der Georgia Augusta den hervorragenden Rang ihrer mathematischen Schule in voller Ehre aufrecht erhalten, — strebsame Schüler und Mitarbeiter in die neugeschaffenen Gebiete der Wissenschaft eingeweiht zu haben. (Aus den Sitzungsberichten der Münchener Akademie).

Am 28sten März d. J. starb zu Thorn der emeritirte Director des dortigen Königlichen Gymnasiums und der Realschule erster Ordnung

Dr. Ludwig Martin Lauber.

Derselbe war geboren am 20sten Juni 1793 zu Breslau, wo sein Vater dem Kaufmannsstande angehörte. Im 14sten Jahre trat er in das Magdalenengymnasium seiner Vaterstadt ein, von wo er 1812 auf die Universität Breslau überging, um Mathematik und Philologie zu studiren. Später siedelte er an die Universität Berlin über. 1819 wurde er dort in das pädagogische Seminar aufgenommen und promovirte auch in diesem Jahre zum Dr. phil. 1821 wurde er an des noch lebenden Prof. Dr. Ohm in Berlin Stelle an das Gymnasium in Thorn berufen und am 20sten September dieses Jahres gleichzeitig mit dem Botaniker O. Lenz durch den Director Brohm eingeführt. Er hielt dabei seine Antrittsrede über „die mathematische Methode." 1822 erhielt er den Titel Professor und 1836, als der mit der interimistischen Leitung der Anstalt betraute Prof. Keferstein an demselben Tage, an welchem seine Ernennung zum Director eintraf, starb, wurde ihm dieselbe übergeben. Neujahr 1839 wurde er als Director definitiv bestätigt. Als solcher wirkte er in Thorn bis zum 28sten October 1858. An diesem Tage zog er sich, durch Gesundheitsrücksichten getrieben, in das Privatleben zurück, er bewahrte aber bis zu seinem Tode der früher von ihm geleiteten Anstalt und ihren Lehrern wie Schülern ein treues Andenken.

Nicht blos als Pädagoge und Lehrer, sondern auch als Schriftsteller im Fache der Mathematik hat sich der Verstorbene einen ehrenvollen Namen erworben. Einige seiner Schriften sind folgende:

1*

Digitized by Google

1828. De evolvendarum functionum principiis ac formulis (Thorner Progr.).
1832. Ueber die Mathematik als Lehrobject auf Gymnasien. Berlin.
1834. Versuch einer rein wissenschaftlichen Darstellung der Mathematik durch strenge Begründung derselben in ihren Principien und Elementen. 1. Theil. Berlin.
1835. Dasselbe Werk. 2. Theil. ebendaselbst.
1836. Unterricht in der reinen Elementar-Mathematik nach Lehrkursen für den Schulgebrauch. 1. Theil. Arithmetik und Algebra. Berlin.
1837. Dasselbe Werk. 2. Theil. Vorschule der Geometrie. Ebendaselbst.
1842. Die Elemente der geometrischen Aehnlichkeits- und Vergleichungslehren u. s. w. Berlin.
1849. Das Wirken und Wesen der Naturkräfte. (Progr.).
1862. Die Grundlehren der Physik vom Standpunkte einer idealen Auffassung des Naturlebens. Thorn.

Alle, die mit dem Dahingeschiedenen in näherem Verkehr gestanden, werden ihm ein treues und liebevolles Gedächtniss bewahren. Seine Frau und eine Pflegetochter beweinen sein Andenken. M. C.

Schriften über Unterrichtswesen.

In der so eben erschienenen „Uebersicht der Frequenzverhältnisse der einzelnen Abtheilungen des Polytechnikums in Carlsruhe in den Jahren 1850—1866. Stuttgart. 1867.“ hat Herr Professor Dienger auf einem grossen Bogen eine sehr interessante Uebersicht der Frequenzverhältnisse der einzelnen Abtheilungen der genannten berühmten Lehranstalt mittelst einer graphischen Darstellung durch Curven geliefert, eine rücksichtlich solcher Verhältnisse neue Idee, die wir zu weiterer Verfolgung in ähnlichen Fällen recht sehr empfehlen möchten, da sich der leichten Uebersichtlichkeit und der Anschaulichkeit wegen auf solche Darstellungen leicht weitere Schlüsse gründen lassen.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrage der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften

herausgegeben von Dr. Titus Wilde, Sekretär der Gesellschaft. Dreiundvierzigster Band. Erstes Heft. Görlitz. 1866. 8°. Zweites Doppelheft. Görlitz. 1867. 8°.

Dieser 43ste Band der verdienstlichen Schriften der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz enthält in seinem ersten Hefte S. 1. — S. 40. eine sehr ansprechend geschriebene, allgemein verständliche, interessante „Lebensbeschreibung des Ehrenfried Walther von Tschirnhaus auf Kieslingswalde und Würdigung seiner Verdienste“ von Herrn Alfred Kunze, Lehrer der Mathematik und Physik am Karl-Friedrichs-Gymnasium in Eisenach, in welcher die Verdienste des genannten deutschen Gelehrten auf den Gebieten der Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaft ohne grosse Weitläufigkeit und ohne alle in eine solche Schrift gar nicht gehörende ermüdende mathematische Rechnungen, die natürlich jeder erste Anfänger in der Differential- und Integralrechnung u. s. w. mit Leichtigkeit ausführen kann, in einer solchen Weise gewürdigt worden sind, dass man ein recht anschauliches und lebensvolles Bild von der Wirksamkeit des trefflichen Mannes erhält. Eine ausführliche Aufzählung der von Tschirnhaus edirten grösseren Werke und sonstiger Abhandlungen, überall mit kurzer und prägnanter Angabe des Inhalts derselben, und Charakterisirung des Wesens der verschiedenen in denselben angegebenen Methoden, so wie auch das Verzeichniss von 38 zum Theil wenig bekannten und wohl auch seltenen Schriften, in denen sich Mittheilungen und Nachrichten über Tschirnhaus finden, verleihen der Schrift des Herrn A. Kunze besonderen Werth für die Geschichte und Literatur der Philosophie, Mathematik und Naturlehre, weshalb wir dieselbe zu sorgfältigster Beachtung empfehlen, und der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften für deren Publication unseren besten Dank aussprechen.

Das zweite Heft des vorliegenden Bandes dieser verdienstlichen Gesellschaftsschriften enthält auf S. 339. — S. 382. eine interessante ausführliche Lebensbeschreibung eines sehr verdienten Lehrers der Mathematik und Physik, der auch noch auf sehr vielen anderen wissenschaftlichen Gebieten sich tüchtig umgesehen hatte, des Prorectors am Gymnasium zu Guben in der Niederlausitz:

Dr. Heinrich Wilhelm Sausse,

für deren Veröffentlichung der Verfasser, Herr Archidiakonus Tschirch in Guben, den besten und schönsten Dank verdient. Allen Lehrern empfehlen wir diese Lebensbeschreibung recht

Digitized by Google

sehr zur Beachtung und bemerken hier nur, dass Sausse am 19ten November 1796 in Naumburg a. d. Saale geboren war, und am 20sten März 1866 in Guben starb.

Arithmetik.

Grundzüge der höhern Analysis der Differential- und Integralrechnung. Für das Selbststudium bearbeitet von Herrn J. Klein. Erlangen. 1867.

Mit der eingehenderen Anzeige von Schriften dieser Art, an denen jeder Fortschritt in der strengeren Begründung der Wissenschaft spurlos vorübergegangen oder von dem Verfasser absichtlich ignorirt worden ist, kann sich das Archiv nicht befassen.

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen von Dr. Rudolf Sonndorfer. Zweiter Theil. Die Geometrie des Raumes. Mit 114 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien. 1867. Wilhelm Braumüller. 8°.

Der erste, die Geometrie der Ebene enthaltende Theil dieses Lehrbuchs ist im Literar. Ber. Nr. CLXX. S. 12. angezeigt worden, und was wir dort zur allgemeinen Charakterisirung jenes ersten Theils gesagt haben, gilt im Wesentlichen ganz auch von diesem zweiten Theile, so dass wir darüber hier nichts weiter zu sagen haben. Jedenfalls ist die grosse Deutlichkeit, mit welcher dieser zweite stereometrische Theil verfasst ist, zugleich auch die Einfachheit der Darstellung rühmend anzuerkennen, und auf die neueren Fortschritte der elementaren Stereometrie ist überall gebührend Rücksicht genommen, so wie denn z. B. im siebenten Abschnitte das Prismatoid und seine Specialitäten eine ausführliche und eingehende Behandlung gefunden haben; auch der Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie ist gebührend hervorgehoben. Sehr viele lehrreiche Aufgaben und historische und literarische Bemerkungen mancherlei Art sind beigefügt. Auch Aufgaben zur numerischen Berechnung fehlen nicht. Eine etwas eingehendere Anleitung zur annähernden Berechnung des Inhalts der körperlichen Räume, welche für viele praktische Anwendungen von so grosser Wichtigkeit, ausserdem auch für die

Digitized by Google

Schüler in mehrfacher Beziehung lehrreich ist, hätte uns wünschenswerth geschienen. — So wie die Stereometrie im eigentlichen Sinne ist auch die sphärische Trigonometrie sehr eingehend behandelt, und auf viele stereometrische Aufgaben aus der Lehre vom Prisma und Parallepipedon und von den regulären Körpern angewandt worden, so wie auch auf Astronomie, Geodäsie und Nautik, wo überall numerische Beispiele in lehrreicher Weise beigefügt worden sind; den Schluss dieser Anwendungen bildet die so wichtige Schifffahrt auf dem grössten Kreise, wobei wir dem Verfasser mit besonderem Interesse gefolgt sind. — Wir glauben, dass dieses Lehrbuch Jedem als ein gutes Hülfsmittel bei dem Studium der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie empfohlen werden kann. — Die sehr elegante äussere Ausstattung lässt nichts zu wünschen übrig.

In der verdienstlichen kleinen Schrift:

Intorno alla Geometria immaginaria o non-Euclidiana. Considerazioni storico-critiche del Dott. A. Forti, Professore di Matematiche e Meccanica al R. Liceo di Pisa. Pisa, Tipog. Nistri. 1867.

hat Herr Professor A. Forti in Pisa von den vorzüglich durch Lobatschewsky, Farkas Bolyai und Gauss vertretenen neueren Ansichten über die Theorie der Parallelen, und über Lobatschewsky's imaginäre oder nicht-euclidische Geometrie ausführlich Nachricht gegeben, und dadurch sehr wesentlich zur Verbreitung dieser neueren Ansichten in seinem Vaterlande beigetragen, wofür er jedenfalls besonderen Dank verdient.

Elementi di Geometria analitica per R. Rubini. Parte II. Geometria nello spazio. Napoli. Tipografia di Achille Morelli. 1866. 8°.

Wir freuen uns sehr, diesen, die Geometrie des Raumes enthaltenden zweiten Theil der trefflichen „Elemente der analytischen Geometrie" des Herrn Professor Rubini in Neapel, mit deren, die Geometrie der Ebene enthaltenden ersten Theile wir im Literar. Ber. Nr. CLXVIII. S. 3. die Leser des Archivs näher bekannt zu machen das Vergnügen hatten, jetzt anzeigen zu können. Dieser zweite Theil ist ganz mit derselben Gründlichkeit und Deutlichkeit wie der erste Theil verfasst, und nimmt überall auf die neueren Fortschritte der Wissenschaft gebührend Rücksicht, ohne darin zu weit zu gehen und den Anfänger zu überhäufen, was hier nur zu leicht möglich ist, also durch-

gehends das richtige Maass haltend und überall den besonnenen und erfahrenen Lehrer bekundend; auch sind die allgemeinen analytischen Betrachtungen vielfach durch saubere Figuren erläutert und zu grösserer Anschaulichkeit gebracht, so dass wir dieses Buch allen des Italienischen hinreichend kundigen Anfängern recht sehr zum Leitfaden bei ihrem Studium der analytischen Geometrie des Raumes empfehlen können. Bei richtigem Maasshalten ist dessenungeachtet das Buch doch sehr reichhaltig und macht den Leser auch mit den verschiedenen Coordinatensystemen, von denen in neuerer Zeit so vielfache Anwendungen in der fruchtbarsten Weise gemacht worden sind, hinreichend bekannt. Um dieses Urtheil näher zu begründen, theilen wir, so wie in unserer früheren Anzeige von dem ersten Theile, auch von diesem zweiten Theile nachstehend das Inhaltsverzeichniss mit:

Libro I. — Della retta e del piano.
Capitolo I. — Delle projezioni e delle coordinate.
Articolo I. — Delle projezioni.
Articolo II. — Delle coordinate cartesiane o di projezione. — Equazioni d'un punto, d'una retta parallela a un piano coordinato, e d'un piano parallelo a un asse coordinato.
Capitolo II. — Della retta e del piano.
Articolo I. — Formole varie relative ad uno o a due punti. — Equazione generale d'un piano, ed equazioni generali d'una retta.
Articolo II. — Della trasformazione delle coordinate.
Capitolo III. — Formole relative a rette e a piani.
Articolo I. — Formole relative alla retta.
Articolo II. — Formole relative al piano.
Articolo III. — Formole relative a rette e piani.
Articolo IV. — Questioni diverse. — Fascio di piani anarmonico, armonico, o in involuzione.
Libro II. — Delle superficie di secondo grado.
Capitolo I. — Principi generali.
Articolo I. — Significato geometrico d'una o più equazioni simultanee a tre variabili. — Teoremi sulle superficie. — Alcune definizioni.
Articolo II. — Del modo di trovare l'equazione d'una superficie; e reciprocamente come investigare il luogo d'una data equazione.
Capitolo II. — Del centro e dei piani diametrali nelle superficie di 2^0 grado.
Articolo I. — Del centro.

Articolo II. — Dei piani diametrali.
Capitolo III. — Investigazione delle varie forme di superficie contenute nell'equazione generale di 2° grado.
Articolo I. — Riduzione dell'equazione generale di 2° grado a forma più semplice. — Diverse specie di superficie di questo grado.
Articolo II. — Equazioni omogenee delle varie specie di superficie di 2° grado.
Capitolo IV. — Proprietà delle superficie di secondo grado.
Articolo I. — Piano polare; piano tangente; normale.
Articolo II. — Continuazione dello stesso argomento. — Coni supplementari.
Articolo III. — Dei diametri delle superficie dotate di centro.
Capitolo V. — Delle sezioni rettilinee, e circolari delle superficie di secondo grado.
Articolo I. — Delle sezioni rettilinee.
Articolo II. — Delle sezioni circolari nelle superficie di secondo grado. — Condizioni perchè una superficie di 2° grado sia di rotazione.
Capitolo VI. — Delle coniche focali e delle coniche sferiche.
Articolo I. — Delle coniche focali. — Proprietà del cono di 2° grado.
Articolo II. — Delle coniche sferiche.
Capitolo VII. — Delle superficie omofocali, e delle superficie reciproche.
Articolo I. — Delle superficie omofocali.
Articolo II. — Superficie reciproche.
Capitolo VIII. — Coordinate quadriplanari e tetraedriche. — Questioni diversi.
Articolo I. — Coordinate quadriplanari e tetraedriche.
Articolo II. — Questioni diverse.

Möge das nun vollständig erschienene treffliche Buch die so sehr verdiente Beachtung in vollstem Maasse finden.

Ueber die geometrische Repräsentation der Gleichungen zwischen zwei veränderlichen, reellen oder komplexen Grössen von C. A. Bjerknes. Auf Veranlassung des academischen Collegiums herausgegeben von Dr. O. J. Broch, Professor. Universitätsprogramm für das zweite Halbjahr 1859. Christiania. Gedruckt bei Broyger & Christie. 1859. 4°.

Auf diese erst jetzt zu unserer Kenntniss gelangte Schrift, welche viele interessante Resultate enthält und auch rücksichtlich

Digitized by Google

der Methode sehr beachtenswerth und für die Curvenlehre wichtig ist, müssen wir recht sehr aufmerksam machen. Der Herr Verfasser sagt auf S. 2.: „Im Folgenden werde ich zeigen, wie die gewöhnliche Repräsentation der Kurven, die durch reelle Gleichungen gegeben sind, verallgemeinert werden kann, indem die Definition einer durch eine Gleichung zwischen zwei reellen veränderlichen Grössen bestimmten Kurve auf solche Weise modificirt wird, dass sie auch für den allgemeinen Fall, wenn die Konstanten der Gleichung und ihre zwei Veränderlichen komplex sind, anwendbar gemacht wird. Demnächst werde ich auch zeigen, wie die analytische Planometrie, indem sie sodann von einem höheren Gesichtspunkte gesehen wird, wieder in ihren Hauptzügen dargestellt werden kann." — Wir glauben, dass mit diesen Worten der Zweck und die Bedeutung der Schrift deutlich genug bezeichnet sind, und begnügen uns des Weiteren wegen mit der folgenden Angabe ihrer Hauptabschnitte: Ueber die geometrische Repräsentation komplexer Gleichungen. S. 2. bis S. 6. — Schneidung und Deckung. S. 7. — S. 10. — Bestimmung einer durch eine reelle Gleichung ausgedrückten Kurve, welche die gegebene überall deckt. S. 10. — S. 20. — Die Kurvenpunkte als Durchschnittspunkte zweier Kurvenreihen. S. 20. — S. 27. — Kurvenelemente, besondere Punkte, Krümmungsradius. S. 27. bis S. 38. — Kurven, die einander schneiden oder berühren. S. 38. — S. 46. — Flächenelemente. S. 46. — S. 50. — Bestimmung der Kurvengleichungen, indem man von Eigenschaften der Kurven ausgeht. S. 51. — S. 63.

Man sieht hieraus, dass die Schrift eine ziemlich vollständige Behandlung der ganzen Kurvenlehre in ihren wesentlichsten Theilen aus dem angegebenen Gesichtspunkte enthält, und daher gewiss sorgfältigst beachtet zu werden sehr verdient.

Trigonometrie.

Règles mnémoniques, pour établir la Théorie des signes en Trigonométrie, et pour écrire les formules de Delambre, par Georges Dostor, Docteur ès Sciences mathematiques, Professeur au Lycée impérial de la Réunion. Paris, Gauthier Villars. 1866. 8°.

Wir machen Lehrer der Mathematik auf die in dieser verdienstlichen Schrift dargebotenen recht zweckmässigen mnemonischen Hülfsmittel aufmerksam, indem wir bemerken, dass die

Digitized by Google

auf die Formeln von Delambre oder Gauss bezüglichen Regeln von dem Herrn Verfasser schon im Archiv. Thl. XXX. S. 467. mitgetheilt worden sind.

Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apostol. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der Sternwarte. Dritter Folge Dreizehnter Band. Jahrgang 1863. Wien. 1866. 8°. S. Literar. Bericht. Nr. CLXV. S. 8.

Herr Director v. Littrow fährt mit der Publication dieser wichtigen Annalen regelmässig fort, und erwirbt sich dadurch, so wie auch durch die Veröffentlichung der älteren meteorologischen Beobachtungen der Wiener Sternwarte, fortwährend ein grosses Verdienst um die Wissenschaft. Dieser neue Band der „Annalen" enthält nach einer „Einleitung" wieder zuerst Beobachtungen am Meridiankreise aus dem Jahre 1860 nebst den Resultaten aus den Beobachtungen am Meridiankreise. I. Mittlere Positionen von Fixsternen beobachtet im Jahre 1860, bezogen auf den Anfang des Beobachtungsjahres. II. Verzeichniss der im Jahre 1860 beobachteten Sterne der Histoire céleste. — Stern- und Planetenbedeckungen und Sonnenfinsternisse, beobachtet in den Jahren 1857 bis 1863. — Hierauf folgen: Planeten- und Cometen-Beobachtungen am Refractor von sechs Zoll Oeffnung. Vom September 1862 bis December 1864. Von Dr. Edmund Weiss, Adjunct der k. k. Sternwarte. — Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre. — Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1862. — Tafeln zur Reduction der Zonenbeobachtungen. — Uebersicht der Zonen.

Zugleich mit diesem Bande der Annalen ist auch erschienen der letzte Band des von Herrn von Littrow zum grossen Nutzen der Meteorologie unternommenen und auf öffentliche Kosten herausgegebenen wichtigen Werkes:

Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte in Wien von 1775 bis 1855. Auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director,

Digitized by Google

und Edmund Weiss, Adjunct der k. k. Sternwarte. Fünfter Band. 1839—1855. Wien. 1866.

wofür die Wissenschaft den beiden verdienten Herren Herausgebern und der k. k. Staatsregierung den wärmsten Dank zollen muss und wird. Ueber die vorhergehenden Bände ist von uns früher (m. s. Literar. Ber. Nr. CLXV. S. 9.) ausführlich Nachricht gegeben worden. Jeder Meteorologe kennt die Schwierigkeit und das Mühsame einer solchen Publication, und die vielen Berücksichtigungen, die dabei zu nehmen sind, über welche Herr v. Littrow sich in dem Vorwort zu dem vorliegenden letzten Bande in ausführlicher und höchst lehrreicher Weise ausgesprochen hat. Wir können den trefflichen Herren Herausgebern zur Vollendung dieser schwierigen Arbeit, und der deutschen Wissenschaft zu dem Besitz eines solchen, gewiss noch viele schöne Früchte tragenden Werkes nur aufrichtigst Glück wünschen.

Nautik.

Almanach der österreichischen Kriegs-Marine für das Jahr 1867. Herausgegeben mit Genehmigung des hohen k. k. Kriegs-Ministeriums von der kaiserlich königlichen Marine-Akademie. Sechster Jahrgang. Triest. 1867.

Der fünfte Jahrgang dieses interessanten Almanachs ist im Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. S. 12. angezeigt worden. Die äussere Einrichtung ist ganz dieselbe geblieben wie früher, und kann daher aus unseren Anzeigen der vorhergehenden Jahrgänge als bekannt vorausgesetzt werden. Die in diesem Jahrgange enthaltenen wissenschaftlichen nautischen Abhandlungen, auf welche es uns hier vorzugsweise ankommt, sind die folgenden: Längenbestimmung aus correspondirenden Monddistanzen von Dr. F. Paugger, k. k. Hydrograph. Unter correspondirenden Monddistanzen versteht der Herr Verfasser solche, welche von je zwei Sternen dann beobachtet werden, wenn der Mond im oder nahezu im Aequidistanzkreise jener Sterne sich befindet, wo unter dem Aequidistanzkreise zweier Sterne derjenige Kreis verstanden wird, welcher den Bogenabstand der beiden Sterne halbirt und auf demselben senkrecht steht. Die Grundlage dieser Methode der Längenbestimmung bildet also die Beobachtung gleicher Abstände des Mondes von zwei Sternen; der Herr Verfasser hält diese Methode der Längenbestimmung für genauer als

Digitized by Google

die gewöhnliche Methode der Monddistanzen, und sein Aufsatz verdient allerdings von den Seeleuten beachtet und die Methode durch den wirklichen Gebrauch auf der See geprüft zu werden. Zweckmässig sind mehrere vollständig berechnete Beispiele beigefügt, unter denen wenigstens der auf Seite 56. in 24. u. s. w. ausführlich behandelte Fall auf wirklichen Beobachtungen beruht, die am 8ten April 1865 auf der Sternwarte der k. k. hydrographischen Anstalt angestellt wurden. Die beobachteten Sterne waren Regulus und Spica, und die Länge ergab sich aus diesen Beobachtungen $0^h.\ 55^m.\ 5^s,2$; welche von der auf andere Weise gefundenen Länge $0^h.\ 55^m.\ 5^s,0$ ö. v. Gr. nur um $\frac{2}{10}$ einer Zeitsecunde abweicht, was also für die neue Methode jedenfalls ein nicht ungünstiges Zeugniss ablegt. — An den vorigen Aufsatz schliesst sich zur Erleichterung der praktischen Anwendung dieser Methode unmittelbar der folgende Aufsatz an: Ephemeriden für das Jahr 1867 zur Bestimmung der Länge aus correspondirenden Monddistanzen, berechnet von A. v. Tegetthoff. — Auch der letzte Aufsatz: Vorläufige Resultate des auf der Marine-Sternwarte in Pola aufgestellten Thermo-Autographen, von Julius Peterin, k. k. Hydrographen-Adjunct. bietet mannigfaches Interesse dar.

Wir wünschen diesem sehr verdienstlichen nautischen Almanach einen so ununterbrochenen Fortgang wie bisher.

Physik.

Von der verdienstlichen Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von Dr. Carl Jelinek (m. vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXIV. S. 14.) sind neuerlich Band II. Nr. 7.—Nr. 12. erschienen, die wieder mehrere interessante Aufsätze enthalten: Ueber Characterisirung der Winde. Ein Wort an die Stationsbeobachter. Von Dr. Jos. R. Lorenz. — Einiges über Sturmwarnungen. Von Prof. Buijs Ballot in Utrecht. — Ueber die Priorität der Anwendung des electrischen Telegraphen zu den Sturmwarnungen. Von Dr. C. Jelinek. — Meteorologische Beobachtungen während der Sonnenfinsterniss am 6. März 1867. Von Carl Fritsch. — Ueber „Deflection" eines Windes, oder die an der Windseite eines Gebirges entstehende Ablenkung eines überwehenden Luftstroms. Zur Theorie der Gebirgswinde.

Digitized by Google

Von A. Mühry in Göttingen. — Einfluss des Windes auf den Regen. Von Carl Fritsch. — Ueber die Bedeutung arithmetischer Mittelwerthe in der Meteorologie. Von Prof. Lamont. (Scheint uns sehr beachtenswerth für die Beurtheilung des Werthes solcher Mittelwerthe in der Meteorologie). — Die Vorschläge zur Milderung der Sommerdürre in Ungarn. Von Jul. Hann. — Die klimatischen Verhältnisse des ungarischen Ländercomplexes. Von Prof. Joh. Hunfalvy. — Ausserdem enthalten auch diese Nummern wieder eine grosse Menge sehr interessanter kleinerer Mittheilungen und Literaturberichte.

Annales météorologiques de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées, aux frais de l'état, par le Directeur A. Quetelet. Bruxelles. 1867. 4°.

Die Königl. Belgische Staatsregierung und der berühmte Herausgeber, Herr A. Quetelet, verdienen gewiss den grössten Dank für diese regelmässig monatlich erscheinenden Publicationen der natürlich gehörig reducirten meteorologischen Beobachtungen der Brüsseler Sternwarte, von denen uns bis jetzt die Monate Januar bis Mai 1867 zugegangen sind. Die Hauptrubriken sind: Baromètre réduit à la température de 0° C. — Température centigrade. — Psychromètre d'August. — Anemomètre d'Osler. Direction du vent. Intensité du vent. — Vents supérieurs et pluie. — Déclinaison magnétique et électricité de l'air. — État du ciel. — Dass durch solche regelmässige, in bestimmten kürzeren Zeiträumen erfolgende Mittheilungen der Meteorologie sehr genützt wird, liegt auf der Hand, und wir wünschen daher dem so hoch verdienten Herrn Herausgeber von Herzen noch viele Jahre Kraft zu solchen nützlichen und wichtigen Arbeiten.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Academie der Wissenschaften. Vergl. Literar. Bericht. Nr. CLXXXI. S. 15.

1866. II. Heft II. Kuhn: Ueber zwei im Frühlinge dieses Jahres vorgekommene Blitzereignisse. S. 192.

1866. II. Heft III. Seidel: Trigonometrische Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen. S. 263. (Recht sehr beachtenswerther Auf-

Digitized by Google

satz wegen der Einfachheit der gegebenen Formeln oder eigentlich der ganzen Rechnungsweise; auch optischen Künstlern zu empfehlen).

1866. II. Heft IV. Steinheil: Ein Photographie-Apparat zur Aufnahme von Naturstudien. S. 478. (Alle, die sich mit Photographie beschäftigen, sind auf den hier beschriebenen Apparat recht sehr aufmerksam zu machen). — E. Voit: Ueber Diffusion von Flüssigkeiten. S. 483.

1867. I. Heft I. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

1867. I. Heft II. v. Schlagintweit-Sakülünski: Ueber die Temperatur der Alpenseen in grossen Tiefen nach Beobachtungen im Starnbergersee und im Chiemsee. S. 305.

1867. I. Heft III. Enthält Necrologe von Georg Friedrich Bernhard Riemann. S. 381. — Gottfried Wilhelm Osann, Professor der Physik und allgemeinen Chemie in Würzburg, S. 385., geboren in Weimar am 26sten October 1796, gestorben in Würzburg am 10ten August 1866. Beide Necrologe sind von Herrn von Martius verfasst. Der Necrolog von Riemann ist oben (S. 2.) abgedruckt.

Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1866. Juli — December. S. Literar. Ber. Nr. CLXXXI. S. 1.

Wir machen die Leser des Archivs besonders aufmerksam auf einen Vortrag des Herrn Amerling (S. 82. — S. 84), der in interessanter Weise das Vorkommen einer grossen Anzahl der merkwürdigsten geometrischen Curven in der Natur nachzuweisen sucht. — Auch auf den Vortrag des Herrn Alois Nowak: Ueber die Nothwendigkeit der Annahme eines allgemeinen (concentrischen) Hohlraumes zwischen der Erdrinde und dem Erdkern, so wie über die Wahrscheinlichkeit gewisser darin stattfindender Vorgänge (S. 117. — S. 123.) machen wir aufmerksam.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. A Paris, chez J.-B. Baillière. A Bordeaux, chez Chaumas-Gayez. 8°.

Die Société des Sciences physiques et naturelles

in Bordeaux giebt seit dem Jahre 1855 ihre Memoiren heraus. Von diesen Memoiren sind bis jetzt vier Theile in sieben Heften erschienen. Je weniger der Inhalt dieser Schriften, welche viele, auch in den Kreis des Archivs gehörende, sehr bemerkenswerthe und zu beachtende Abhandlungen enthalten, in Deutschland bekannt sein dürfte: desto mehr halten wir es für unsere Pflicht, deren Inhalt, so weit derselbe dem Kreise unserer Zeitschrift angehört, hier anzuzeigen, und werden nicht unterlassen, regelmässige Fortsetzungen dieser Anzeige zu liefern, so wie neue Theile oder Hefte in unsere Hände gelangen. Die Leser werden gewiss mit uns erkennen, wie sehr man der genannten hochachtbaren Gesellschaft zu Dank für diese Publicationen verpflichtet ist, und den Wunsch theilen, dass dieselben unausgesetzten und ununterbrochenen Fortgang haben mögen; die Gesellschaft ist ein freier Verein hochachtbarer, für die Wissenschaft sich lebhaft interessirender Männer und, wie es scheint, ohne alle Unterstützung von Seiten des Staats, weshalb ihre Publicationen einen um so grösseren Dank verdienen.

Tome I. Aout 1854 — Janvier 1855. — Examen critique et comparatif des Théories dualistiques et unitaire de la chimie, par L. Micé. p. 21—154.

Tome II. 1er Cahier. 1861. — 2me Cahier. 1863. — Mémoire sur le mouvement des noeuds de la lune par M. G. Lespiault. p. 7. — Démonstoration de plusieurs formules de Gauss, relatives à l'action mutuelle de deux aimants, par M. Abria. p. 59. — Essai sur les propulseurs à mouvement alternatif, par M. Glotin. p. 135. — Note sur les petites planètes situées entre Mars et Jupiter, par M. G. Lespiault. p. 169. — Premier Mémoire sur la structure des corps, par A. Baudrimont. p. 203. — Note sur les relations qui existent entre les différentes parties du cube et celles des solides qui en dérivent cristallographiquement, par A. Baudrimont. p. 237. — Réfraction et dispersion de la lumière, par A. Baudrimont. p. 243. — Theorèmes sur les ellipsoides associés, par V.-A. Le Besgue. p. 247. — De quelques moyens pratiques de diviser les angles en parties égales, par M. Glotin. p. 253.

Tome III. 1er Cahier. 1864. — 2me Cahier. 1865. — Tables diverses pour la composition des nombres en leurs facteurs premiers, par V.-A. Le Besgue. p. 1. — Deuxième Mémoire sur la structure des corps, par A. Baudrimont. p. 39. — Propagation des ondes dans les milieux isaxiques et dans les milieux hétéraxiques, par A. Baudrimont. p. 153. — Tables donnant

Digitized by Google

pour la moindre racine primitive d'un nombre premier, ou puissance d'un nombre premier: 1° les nombres qui correspondent aux indices; 2° les indices des nombres premiers et inférieurs au module, par V.-A. Le Besgue. p. 231. — Observations sur la philosophie des sciences, par A. Baudrimont. p. 275. — Observations relatives aux orages et à leur mode de formation, par le même. p. 307. — Note sur la non-identité de la chaleur et de la lumière, par le même. p. 313. — Considérations physiologiques sur la question de l'identité de la chaleur et de la lumière, par le Dr. G. Sous. p. 323. — Du daltonisme, par le même. p. 401. — Démonstrations élémentaires relatives à la théorie des nombres premiers, par A. Baudrimont. p. 419. — Un tétraèdre quelconque est inscriptible dans une sphère; démonstration élémentaire de ce théorème, par A. Baudrimont. p. 445.

Tome IV. 1er Cahier. 1866. — 2me Cahier. 1866. — Observations sur la note de M. Baudrimont intitulée: De la non-identité de la chaleur et de la lumière, par M. Abria. p. 77. — Études géométriques sur la Théorie des parallèles, par N. J. Lobatschewsky. Traduit de l'Allemand par J. Hoüel. p. 83. — Recueil de formules et de tables numériques, par J. Hoüel. — Die beiden letzten sehr verdienstlichen Schriften sind von uns im Literar. Ber. Nr. CLXXXIV. und Nr. CLXXXIII. besonders angezeigt worden, und daher den Lesern genau bekannt.

Selbstverständlich haben wir uns im Obigen, wie schon erinnert, auf die in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen beschränken müssen; ausserdem enthalten aber diese sehr verdienstlichen Schriften noch eine grosse Anzahl von Abhandlungen aus den verschiedenen beschreibenden Naturwissenschaften, aus der Anatomie, Medicin u. s. w. und viele interessante Necrologe von verstorbenen Mitgliedern, auch ausführliche Extraits des Procès-verbaux, so dass dieselben für einen sehr grossen Leserkreis interessant und wichtig sind, und daher dringend zur allgemeinsten Beachtung empfohlen zu werden verdienen.

Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften. Fastnacht 1867. 4°.

Dieser Jahresbericht der hochachtbaren Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften, über dessen letzten Vorgänger wir im Literar. Ber. Nr. CLXXII. S. 15. berichtet haben, enthält auch diesmal, nach den Gesellschaftsnachrichten — unter den verstorbenen Mitgliedern der Ge-

sellschaft finden wir u. A.: Johann Franz Encke, geboren in Hamburg den 23sten September 1791, gestorben in Spandau den 26sten August 1865; — Lieutenant-General Sir Thomas Brisbane, gestorben in Stakerstown den 28sten Januar 1860; — Christian Ludwig Gerling, geboren in Hamburg den 10ten Juni 1788, gestorben in Marburg den 15ten Januar 1864; und andere verdiente Mathematiker und Astronomen — mehrere werthvolle Aufsätze, die diesmal vorzugsweise ein mehr praktisches Interesse haben, und namentlich praktischen Geometern recht sehr zur Beachtung empfohlen werden müssen. Diese Aufsätze sind die folgenden:

Der Rechnenmaassstab zur Ausführung gewöhnlicher und trigonometrischer Rechnungen, mittelst arithmetischer und gleichzeitig mittelst mechanischer — (linearer) — Summirung der Logarithmen. Von F. Gravenhorst, Geometer am Hamburgischen Vermessungsbureau, jetzt in Itzehoe. (Der Aufsatz ist sehr lehrreich in Bezug auf sogenannte instrumentale Arithmetik überhaupt; aufmerksam machen möchten wir bei dieser Gelegenheit, wie schon früher in dieser Zeitschrift, auf das ausführliche und schöne Werkchen des früheren königl. italienischen Finanzministers, Herrn Quintino Sella, welches unter dem Titel: Teorica e Pratica del regolo calcolatore*) per Quintino Sella. Torino. Stamperia Reale. 1859. erschienen ist, und diesen Gegenstand sehr eingehend und mit grosser Sachkenntniss behandelt).

Ueber Flächenberechnung. Von F. Gravenhorst. (Betrifft insbesondere den Oldendorp'schen Planimeter-Zirkel).

Einige Höhenbestimmungen im Hamburger Landgebiete. Von H. Stück, Adjunct der Gesellschaft.

Ein Böschungsmaass. Von H. W. C. Hübbe, Jahrverwalter der Gesellschaft. (Praktischen Geometern auch recht sehr zur Beachtung zu empfehlen).

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Bericht. Nr. CLXXXIV. S. 16.).

---

*) Englisch: Sliding rule.

Digitized by Google

Anno V. Gennaio e Febbraio. 1867. Sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali; per N. Trudi. p. 1. — Di una proprietà delle linee a doppia curvatura; per E. Beltrami. p. 21. — Intorno ad una trasformazione di variabili; per E. Beltrami. p. 24. — Soluzione della quistione 55; per A. Armenante. p. 28. — Soluzione della quistione 52; per A. Bonolis. p. 30. — Programmi di concorso. p. 32. — Annunzio bibliografico. p. 33. — Nota sulla riduzione alla forma canonica delle quadratiche; per C. Sardi. p. 35. — Sulle forme binarie dei primi quattro gradi, appartenenti ad una forma ternaria quadratica; per G. Battaglini. p. 39. — Notizia Universitaria. p. 56. — Soluzioni delle quistioni 49, 50; per A. Mogni e L. Rajola. p. 57. — Soluzione di una questione proposta nell' Educational Times; per V. Mollame. p. 63.

Anno V. Marzo e Aprile. 1867. Sulle perturbazioni planetarie; per R. del Grosso. p. 65. — Lettera di E. Beltrami ad A. Mogni. p. 89. — Sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali; per N. Trudi. p. 93. — Intorno ad una trasformazione di alcune equazioni a tre variabili; per A. Genocchi. p. 106. — Sulle funzioni simmetriche complete; per G. Torelli. p. 110. — Soluzione della quistione 44; per L. Rajola. p. 121. — Quistioni. p. 122. — Soluzione della quistione 54; per A. Armenante. p. 126. — Questioni proposte nell' Educational Times, risolute da alcuni giovani studenti. p. 127.

Preisaufgabe der Königlichen Societät der Wissenschaften in Kopenhagen.

Le potentiel peut être ramené à une forme plus générale, lorsqu'on considère la variable μ, dans la fonction $\Sigma\frac{\mu}{r}$, comme une fonction de $t-\frac{a}{r}$, t étant une nouvelle variable et a une constante. Comme le potentiel ainsi généralisé pourra recevoir des applications bien plus étendues, la Société désire qu'outre un exposé des principales propositions connues jusqu'ici relativement à cette fonction, on lui présente une recherche sur la même fonction sous la forme indiquée ci-dessus.

Les réponses doivent être adressées avant la fin du mois d'Octobre 1868 au secrétaire de la Société, M. le Professeur J. Japetus Sm. Steenstrup. Prix: la médaille d'or de la Société.

Erklärung.

In dem „Literarischen Zentralblatte" macht sich ein Ungenannter, der ohne Zweifel ein grosser Mathematiker ist, von Zeit zu Zeit das unschuldige Vergnügen, meine Schriften anzuschwärzen, und zwar ganz vorzugsweise wegen Dessen, was sie nicht enthalten und auch nach meiner Absicht nicht enthalten sollten. Wenn er dabei auch erst zwei bis drei Jahre nach Erscheinen meiner Schrift sein fünfzeiliges Urtheil abgibt, so ist es natürlich nur um so reifer, und es lässt sich entschuldigen, wenn er vergessen hat, was denn eigentlich in dem Buche steht. Ich bedauere von Herzen, den Namen meines ehrenwerthen Gönners nicht zu kennen, um ihm persönlich meinen Dank aussprechen zu können, was ich doch gar zu gerne thun würde. Vielleicht — wenn ich nicht irre — weiss er das aus eigener Erfahrung und ich bitte ihn, wenn er meine 1867 erscheinende nächste Schrift wieder (etwa 1870) in seiner Weise empfiehlt, mir das Vergnügen nicht zu rauben, seine nähere Bekanntschaft zu machen. Bis dahin muss er sich eben mit obiger allgemeinen Danksagung begnügen.

Karlsruhe, 22. Juni 1867.

J. Dienger.

Aus Hoboken, New Jersey, den 1. Mai 1867. ist uns eine Anzeige von H. Reffelt's Arithmetical Aid. (Rechnengehülfe). Patentirt unterm 3. März 1863. zugesandt worden, worin ein, wie es uns scheint, recht zweckmässiger Hülfsapparat bei'm Rechnenunterrichte beschrieben ist, auf den wir die Leser des Archivs aufmerksam machen. Herr Hermann Reffelt ist Lehrer an der Hoboken-Academy. G.

Literarischer Bericht
CLXXXVI.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Sechzehnter Jahrgang. 1866.

Der funfzehnte Jahrgang dieses auch in dem vorliegenden neuen Jahrgange wieder ein sehr erfreuliches Bild von der ausgebreiteten und erfolgreichen Thätigkeit der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften darbietenden Almanachs ist im Literar. Ber. Nr. CLXXIX. S. 12. angezeigt worden. In diesem neuen Jahrgange machen wir vorzüglich auf die von dem Generalsekretair, Herrn A. Schrötter, verfasste ausführliche Lebensbeschreibung (S. 124.—S. 170.) des hochverdienten Präsidenten der Akademie, Andreas Freiherrn von Baumgartner, aufmerksam, welche wir neben der von uns im Archiv. Thl. XLV. S. 1. mitgetheilten Lebensbeschreibung des trefflichen Mannes schon deshalb der Beachtung unserer Leser recht sehr empfehlen, weil dieselbe, ausser anderen interessanten Mittheilungen, auf S. 167. — S. 170. ein vollständiges Verzeichniss aller Schriften Baumgartner's enthält. — Ausserdem enthält dieser Almanach auf S. 246.—S. 251. eine Lebensskizze des verdienten Physikers Ferdinand Hessler, dessen plötzlichen Tod wir mit der aufrichtigsten Trauer im Literer. Ber. Nr. CLXXV. S. 1. anzeigten, und dem in der dritten Ausgabe seiner sehr verdienstlichen „Technischen Physik" (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXIII. S. 12.) ein so schönes Denkmal gesetzt worden ist.

Digitized by Google

Arithmetik.

Wenn Herr H. Hankel in einer vor Kurzem erschienenen Schrift:

Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung. Leipzig. 1867.

von meinen im „Archiv. Thl. XLIV. Nr. 26. 27. Thl. XLV. Nr. 29." publicirten Abhandlungen über die „Aequivalenzen" sagt: „Es werden diese Bemerkungen genügen, um das Wesen dieser Methode in's Licht zu setzen, welche neben den schon angeführten wesentlichen Nachtheilen noch den besitzt, überall eine Entwickelbarkeit nach Potenzen von i vorauszusetzen" so erlaube ich mir — wenn auch ein Urtheil des Herrn H. Hankel an sich sehr gleichgültig ist — hierüber doch zu bemerken, dass diese Auslassung nur auf einem Miss- oder Nichtverständniss der genannten Abhandlungen beruhen kann, denn von „Entwickelbarkeit nach Potenzen von i" — in dem Sinne wenigstens, wie man dies in der Analysis zu nehmen und zu verstehen gewohnt ist, also etwa Entwickelung oder Entwickelbarkeit der Functionen in Reihen — ist in jenen Abhandlungen nirgends auch nur mit einem einzigen Worte die Rede, sondern überall nur von ganzen rationalen algebraischen Functionen, indem ja auch z. B. in Thl. XLIV. S. 445. ausdrücklich gesagt ist: „Alle im Folgenden vorkommenden Zeichen bedeuten ganze rationale algebraische Functionen einer gewissen Grösse, die wir im Allgemeinen durch i bezeichnen werden, constante Grössen natürlich nicht ausgeschlossen, welche als ganze rationale algebraische Functionen des 0ten Grades von i zu betrachten sind; und wenn im Folgenden von Grössen gesprochen wird, so sollen darunter immer ganze rationale algebraische Functionen von i mit Einschluss constanter Grössen verstanden werden." — Was nun Herr H. Hankel bei **ganzen rationalen algebraischen Functionen** unter „**Entwickelbarkeit** nach Potenzen von i" versteht und sich denkt, wird er wahrscheinlich besser wissen als wir. Ausserdem hätte Herr Hankel den etwas wegwerfenden Excurs auf S. 14. über einen der wichtigsten und wesentlichsten Theile der in allen Beziehungen Epoche machenden „Analyse algébrique" von Cauchy sich füglich ersparen

Digitized by Google

können. Dieses im Jahre 1821, also vor beinahe 50 Jahren, erschienene, über alles Lob und allen Tadel — namentlich des Herrn H. Hankel — erhabene Werk eines der grössten Meister der Wissenschaft, war für die damalige Zeit ganz besonders auch rücksichtlich der mit grosser Consequenz — auf dem nun dabei einmal eingeschlagenen Wege — durchgeführten Behandlung des sogenannten Imaginären — welche Herr H. Hankel auf S. 73. sogar einen „Galimatias" zu nennen sich nicht scheut — Epoche machend. Wie weit die neueren Ansichten über diesen Gegenstand, dessen hohe Wichtigkeit Niemand mehr als der Unterzeichnete erkennen kann, und welchem derselbe schon seit einer Reihe von Jahren die grösste Aufmerksamkeit gewidmet hat, sich allgemein Bahn brechen und allgemein Eingang finden werden, wird die Folgezeit lehren; und ob das von Herrn H. Hankel begonnene Buch dazu wesentlich beitragen wird, scheint zur Zeit wenigstens noch sehr zweifelhaft zu sein. G.

Théorie élémentaire des Quantités complexes par J. Hoüel, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Première Partie. Algèbre des quantités complexes. (Extrait des Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 1er Cahier. 1867.). Paris. Gauthier Villars. 1867. 8°.

Diese Schrift über die wichtige Theorie der complexen Grössen oder der „Quantités géométriques", wie Cauchy dieselben nannte, ist in der That ganz elementar, d. h. von den einfachsten ganz bestimmten Begriffen ausgehend und nach und nach systematisch weiter aufsteigend; dieselbe ist mit grosser Deutlichkeit verfasst, und verdient namentlich jedem Anfänger, welcher sich Kenntniss über diese Gegenstände und wahre Einsicht in dieselben in streng mathematischer, und also auch in streng mathematischen Gränzen sich haltender, Weise mit völliger Klarheit und Bestimmtheit verschaffen will, recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden, so dass man auch der zu erwartenden Fortsetzung mit Verlangen entgegen sehen muss. Dieselbe schliesst sich im Wesentlichen — jedoch mit verschiedenen eigenen weiteren Erörterungen und Ausführungen*) — der mit Recht berühmten Abhandlung von Cauchy über die „Théorie des

*) M. s. u. A. die Bemerkung über die Auffassung der Benennung: „Quantités complexes" auf p. 29. neben oder nach der vorher nur „provisoirement. (p. 24.)" nach Cauchy gebrauchten Benennung „Quantités géométriques."

Digitized by Google

quantités géométriques" in den „Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. J. IV. p. 157.—355." an, und der Herr Verfasser sagt auch, nachdem er sich über verschiedene andere Schriften des Weiteren ausgesprochen hat, auf p. 10. selbst: „Cette théorie a été reprise et coordonnée par Cauchy, dans le tome IV. de ses Exercices d'Analyse et de Physique mathématique (pages 157.— 355), et l'on peut dire maintenant qu'elle a reçu sa forme définitive." Herrn Hoüels Schrift ist auch in Deutschland mit desto grösserem Danke entgegen zu nehmen, je weniger allgemein die Abhandlungen Cauchy's über den fraglichen Gegenstand bei uns bekannt zu sein scheinen, und je schwerer schon jetzt die „Exercices d'Analyse et de Physique mathématique," eben so wie die „Exercices de Mathématiques," zu erhalten sind*). Die Schrift zerfällt in die folgenden Kapitel und Paragraphen: **Chapitre I.** Introduction. §. I. Considérations générales. §. II. Sur l'histoire de la théorie géométrique des imaginaires. — **Chapitre II.** Des quantités arithmétiques et algébriques, ou quantités réelles. (Betrifft die gewöhnlichen arithmetischen und algebraischen Begriffe und Rechnungsarten). — **Chapitre III.** Des quantités géométriques, ou quantités complexes. §. I. Définition des quantités géométriques. §. II. Addition et soustraction des quantités géométriques. §. III. Multiplication, division et élévation aux puissançes entières des quantités géométriques. §. IV. Puissances fractionnaires des quantités géométriques. — Équation binome. §. V. Des équations algébriques. — **Chapitre IV.** Des fonctions exponentielles et circulaires d'une variable complexe**), et de leurs fonctions inverses. §. I. Des exponentielles à exposant complexe. §. II. Des fonctions circulaires. §. III. Des logarithmes. §. IV. Fonctions circulaires inverses. §. V. Exponentielles et logarithmes à base complexe.

---

*) Bei welcher Gelegenheit wir auch von Neuem eine andere sehr empfehlenswerthe, gleichfalls vorzugsweise sich an Cauchy anschliessende Schrift: „Geometrisk Kalkyl eller Geometriska Quantiters Räknelagar af G. Dillner. Upsala. C. A. Leffler. 1860. 8°. (m. s. Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. S. 19.) in Erinnerung bringen wollen, die, mit grosser Gründlichkeit und Deutlichkeit verfasst, in Deutschland bekannter zu sein verdiente, als es der Fall zu sein scheint.

**) Wie schon erwähnt, hat sich der Herr Verfasser früher in Chap. III. §. II. p. 29. über die Benennung „complex" weiter ausgesprochen.

Digitized by Google

Der Fortsetzung dieser Schrift entgegen sehend, wiederholen wir unser obiges Urtheil, dass wir dieselbe namentlich für Anfänger — die freilich gewisse analytische Vorstudien schon gemacht haben müssen — wegen ihrer Klarheit für jetzt vorzugsweise*) empfehlenswerth halten, wenn dieselben sich eine deutliche Einsicht in den fraglichen so sehr wichtigen Gegenstand verschaffen wollen.

Logarithmes de Gauss à sept décimales etc. Siebenstellige Gauss'sche Logarithmen zur Auffindung des Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind. Von Theodor Wittstein, Professor in Hannover. Hannover. Hahn. 1866.

Siebenstellige Gauss'sche Logarithmen giebt es bekanntlich bereits von Matthiessen und Zech, welche jedoch noch manches Unbequeme haben, wie der Herr Verfasser in der Einleitung ganz richtig bemerkt. Er giebt hier, wie er selbst sagt, die Gauss'schen Logarithmen in derjenigen Anordnung wieder, welche er zuerst in seinen fünfstelligen logarithmischen Tafeln (Hannover 1859) veröffentlicht hat, jedoch auf sieben Stellen erweitert, damit sie so als Ergänzung zu jeder gewöhnlichen Tafel siebenstelliger Logarithmen gebraucht werden können. Die Gauss'sche Tafel findet sich in dieser Anordnung auf zwei Columnen reducirt, welche die doppelten Logarithmen der Tangenten und der Secanten von 0^0 bis 90^0 darstellen (s. des Herrn Verfassers Trigonometrie. Hannover 1859. §. 81.), oder man kann sie auch wie die neben einander aufgeführten Werthe von $\log x$ und $\log(x+1)$ von $x=0$ bis $x=\infty$ ansehen (s. des Herrn Verfassers Arithmetik. 2 Aufl. Hannover. 1863. §. 295.). In Folge davon ist nicht nur der Umfang der Tafel beträchtlich kleiner geworden als bei Matthiessen und Zech, und mithin die Mühe des Aufschlagens merklich erleichtert, sondern es hat auch die Regel für den Gebrauch derselben sich so ausserordentlich vereinfacht, dass jeder Anfänger, der eine gewöhnliche Logarithmentafel zu handhaben weiss, sie ohne Weiteres richtig anwenden und für immer im Gedächtniss behalten wird. Die Vorzüge dieser Anordnung werden, wie der Herr Verfasser meint, wie man wohl

*) Die oben erwähnte gründliche Schrift des Herrn Dillner wird wegen der im Ganzen geringen Verbreitung der Kenntniss des Schwedischen sich doch leider wenig Eingang in Deutschland verschaffen können; desto mehr scheint in Schweden ihr Werth gewürdigt zu werden.

Digitized by Google

hoffen dürfe, auf den häufigeren Gebrauch der Gauss'schen Logarithmen nicht ohne Einfluss bleiben. — Zur Erhöhung der Brauchbarkeit sind überall die Proportionaltheile vollständig beigefügt, mit alleiniger Ausnahme von Seite 5., wo des Raumes wegen die Differenzen nur alternirend angesetzt werden konnten, und S. 126., wo sie unnöthig erschienen.

Wenn wir das Obige absichtlich grösstentheils mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers mittheilten, so können wir nicht umhin, zu bemerken, dass wir selbst damit im Ganzen vollständig einverstanden sind. Allerdings sind wir der Meinung, dass als siebenstellige Tafeln die vorliegenden die bequemsten sein dürften, und jedenfalls alle Empfehlung verdienen. Druck und Papier sind so schön, wie man nur wünschen kann, ersterer sehr deutlich, letzteres sehr stark und fest. Die vollständige Mittheilung der Proportionaltheile, welche wir bei allen jetzt erscheinenden neueren Tafeln für sehr wesentlich und unerlässlich halten, billigen wir vollkommen und erkennen sie besonders an.

Geodäsie.

Theorie der Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung von Oscar Schreiber, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jäger-Bataillon. Hannover. Hahn. 1866. 4°.

Gauss hat bekanntlich ein besonderes vollständiges Werk über den theoretischen oder analytischen Theil seiner geodätischen Arbeiten nicht veröffentlicht, und der berechtigte Wunsch, denselben im Zusammenhange und in möglichst vollständiger Entwickelung zu besitzen und zu kennen, ist längst gehegt und vielfach ausgesprochen worden. Nur Andeutungen über die bei der Berechnung des Hannoverschen Dreiecksnetzes benutzten Formeln, aber ohne alle analytische Herleitung derselben, finden sich in dem von Herrn Peters herausgegebenen Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher an verschiedenen Orten zerstreut; ausserdem existiren noch die beiden bekannten Abhandlungen: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Erste Abhandlung. Göttingen. 1847. 4°. Zweite Abhandlung. Göttingen 1847. 4°. und die in Schumachers astronomischen Abhandlungen. Heft 3. Altona 1825. 4°. abgedruckte Abhandlung: Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer ge-

Digitized by Google

gebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in dem kleinsten Theile ähnlich wird. Nach diesen gedruckten Schriften und nach einem nach Gauss's Vorträgen über höhere Geodäsie ausgearbeiteten Hefte hat nun der Herr Verfasser der vorliegenden Schrift in derselben eine vollständige Entwickelung der Gauss'schen Theorie zu geben versucht, und, wie es scheint, seine Aufgabe ganz im Geiste und Sinne von Gauss mit Geschick gelöst, so dass wir diese von uns aufrichtigst willkommen geheissene Schrift einem Jeden, der sich für höhere Geodäsie interessirt, glauben zur Beachtung recht sehr empfehlen zu dürfen. Dieselbe besteht nach einer Einleitung aus 16 Paragraphen, zwei Zusätzen und zwei die Rechnungen erleichternden Tafeln. §. 4. giebt den allgemeinen Ausdruck der Conformitäts-Bedingungen bei Uebertragungen der Ellipsoidfläche auf eine Ebene, also nicht in der Allgemeinheit wie Gauss in der oben zuletzt genannten Abhandlung diese Bedingungen für Uebertragungen auf eine Fläche überhaupt sehr schön entwickelt hat. §. 5.—§. 7. betreffen die Berechnung der Coordinaten aus Längen und Breiten; §. 8. beschäftigt sich mit der Umkehrung dieser Aufgabe; §. 9. und §. 10. enthalten die Berechnung der Breite des Endpunkts eines elliptischen Meridianbogens aus dessen von einer festen Breite aus gezählten Länge; §. 11. §. 12. §. 13. §. 14. betreffen die Berechnung der Convergenz des Meridians aus Länge und Breite, die Berechnung des Vergrösserungsverhältnisses aus den Coordinaten, und die Bestimmung des Unterschieds zwischen den Azimuthen einer auf die Ebene projicirten geodätischen Linie und der zwischen denselben Endpunkten enthaltenen Geraden; §. 15. liefert die Relation zwischen der Länge einer geodätischen Linie und der Länge der zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte enthaltenen Geraden; endlich enthält §. 16. die Uebertragung der trigonometrischen Messungen auf die Ebene. — Den weiteren Inhalt muss man in der Schrift selbst nachsehen.

Nautik.

Maximilian I.

Kaiser von Mexico

Majestät

ward am 19ten Juni 1867 in Queretaro in Mexico das Opfer der scheusslichsten Rachsucht, das Opfer einer allem Göttlichen und Menschlichen Hohn sprechenden, jedes menschlich fühlende Herz mit Grauen und Entsetzen erfüllenden That, für die es keinen Namen giebt.

Friede Seiner Asche!

Ausgestattet mit den herrlichsten Eigenschaften des Herzens und Geistes, begeistert für alles Grosse und Schöne, wie selten ein Fürst, der auf einem Throne gesessen, war der in so scheusslicher Weise dahingeopferte Kaiser auch einer der grössten und ersten Kenner der praktischen und theoretischen Nautik im weitesten Umfange; hauptsächlich Ihm verdankt die österreichische Kriegsmarine ihre hohe allseitige Ausbildung; ja Er hat es selbst nicht verschmäht, als nautischer Schriftsteller aufzutreten, denn die in diesen Literarischen Berichten. Nr. LXXXV. S. 6. bis S. 8. ausführlich angezeigten und nach ihrem Werthe gewürdigten:

Nautischen Tafeln, der österreichischen Kriegsmarine gewidmet. Triest. 1853. 12⁰.

welche sich, wie ein hochachtbarer nautischer Schriftsteller sagt, „in den Händen aller Offiziere, Cadetten und Zöglinge der k. k. Kriegsmarine befinden", haben Ihn zum Verfasser. Hieran jetzt wieder zu erinnern, war uns Herzenssache. Nochmals:

Friede Seiner Asche!

Physik.

Die Potentialfunction und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik von R. Clausius. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig. 1867. 8⁰.

Die erste Auflage dieser sehr zu empfehlenden Schrift ist im Literar. Ber. Nr. CXXX. S. 7. angezeigt worden, worauf rück-

Digitized by Google

sichtlich der Kenntniss derselben im Allgemeinen hier verwiesen werden kann. Ueber die zweite Auflage sagt der Herr Verfasser in der Vorrede: „Was die in der zweiten Auflage angebrachten ziemlich zahlreichen Veränderungen anbetrifft, so bestehen sie grösstentheils in Vervollständigungen. Diese haben aber nicht sowohl den Zweck, das Gebiet des behandelten Gegenstandes zu erweitern, als vielmehr den, durch ausführlichere Behandlung und durch Beleuchtung von verschiedenen Seiten das Gegebene noch klarer und anschaulicher zu machen. Dadurch hat die Schrift, welche ursprünglich einigermassen einer mathematischen Abhandlung glich, mehr die Form eines Lehrbuchs erhalten, was, wie ich hoffe, zur Vermehrung ihrer Brauchbarkeit beitragen wird." Wir stimmen hierin dem Herrn Verfasser vollkommen bei, glauben, dass er seinen Zweck in vorzüglicher Weise erreicht habe, und dürfen aus ziemlich genauer und eingehender Bekanntschaft mit beiden Auflagen den Lesern die Versicherung geben, dass in der angedeuteten Beziehung die zweite Auflage allerdings wesentliche Vorzüge vor der ersten besitzt.

Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie von R. Clausius. Zweite Abtheilung. Braunschweig. 1867. 8°.

Die erste Abtheilung dieser mit besonderem Dank entgegen zu nehmenden Sammlung ist im Literar. Ber. Nr. CLXXIII. S. 18. angezeigt worden, worauf wir daher im Allgemeinen verweisen und mit der folgenden Inhaltsangabe der vorliegenden zweiten Abtheilung uns begnügen können: IX. Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Zusatz. Ueber die Bestimmung der Energie und Entropie eines Körpers. Hierauf folgen nun Abhandlungen über die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die electrischen Erscheinungen, nämlich: Einleitung in die mathematische Behandlung der Electricität. X. Ueber das mechanische Aequivalent einer electrischen Entladung und die dabei stattfindende Erwärmung des Leitungsdrahtes. Zusatz. Ueber die in der isolirenden Zwischenschicht einer Franklin'schen Tafel oder Leidener Flasche bei der Ladung stattfindende innere Zustandsänderung und über deren Einfluss auf die Entladungserscheinungen. XI. Ueber die bei einem stationären electrischen Strome in dem Leiter gethane Arbeit und erzeugte Wärme. XII. Ueber die An-

Digitized by Google

wendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermoelectrischen Erscheinungen. XIII. Ueber die Electricitätsleitung in Electrolyten. — Notiz über die Beziehung zwischen der chemischen Action, welche in einer Volta'schen Säule stattfindet, und den durch den Strom hervorgebrachten Wirkungen. — Notiz über die Zunahme des electrischen Leitungswiderstandes der einfachen Metalle mit der Temperatur.

Von der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie (vergl. Liter. Ber. Nr. CLXXXV. S. 13.) sind neuerlichst Band II. Nr. 13. — Nr. 15. erschienen, welche wieder mehrere sehr interessante Aufsätze enthalten: Die Sternschnuppen und der Barometerstand. Weitere Beiträge. Von Carl Fritsch. — Ansichten auswärtiger Meteorologen über den Zusammenhang der Sternschnuppen mit den atmosphärischen Veränderungen. — Ueber die Entstehung des Hagels. Von Heinrich Lucas. — Bemerkungen zur Hageltheorie. Von J. Hann. — Die tägliche Periode des Wasserstandes der Flüsse. Von Carl Fritsch. — Das Nephoskop, Instrument zur Bestimmung der Richtung und der Geschwindigkeit des Windes in höheren Regionen. Von Dr. C. Braun S. J. Eine grosse Menge der interessantesten „Kleineren Mittheilungen“ und „Literaturberichte“ sind auch diesen Nummern beigegeben, so dass diese Zeitschrift sich immer mehr und mehr als ein höchst nützliches Unternehmen bewährt, und die kräftigste Förderung sehr verdient.

Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Von Carl Jelinek und Carl Fritsch, Director und Vice-Director der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Neue Folge, I. Band. Jahrgang 1864. Der ganzen Reihe IX. Band. Wien. Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei. 1866. 4°.

Wir freuen uns, diesen neuen schön ausgestatteten Jahrgang der Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, deren Herausgabe, früher durch den hochverdienten, leider der Wissenschaft zu früh entrissenen Kreil besorgt, einige Jahre unterbrochen wurde, anzeigen zu können. Die neu begonnene Herausgabe wurde zum grossen Nutzen der

Digitized by Google

Wissenschaft hauptsächlich durch eine vom Jahre 1866 an Seitens des Staats bewilligte jährliche Subvention von 800 Fl. möglich gemacht. In dem Vorwort giebt der eine der jetzigen verdienten Herausgeber, Herr Professor Dr. Jelinek, von den gegen früher mehrfach veränderten, wie es uns scheint, sehr zweckmässigen Grundsätzen Nachricht, welche bei der Herausgabe leitend waren und fernerhin leitend sein werden, so wie denn dieses Vorwort überhaupt viel Lehrreiches enthält. Wir müssen uns wegen der Beschränktheit des Raums hier mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts begnügen. Die Einleitung enthält ein Verzeichniss der Beobachtungsstationen im Jahre 1864 mit ihren Längen, Breiten und Seehöhen; die Vertheilung der Beobachtungsstationen nach den Kronländern der österreichischen Monarchie; besondere Erläuterungen über die Seehöhe; constante Barometer-Correctionen; Barometer-Vergleichungen. Der Beobachtungsstationen sind 117; unter den überall angegebenen Beobachtern befinden sich auch zwei Damen: Fräul. Friederike Pessiak in Fellach in Kärnten und Fräul. Caroline Walter in Villach in Kärnten, so wie eine sehr grosse Anzahl von Schulmännern und Geistlichen. Nach dieser Einleitung besteht das Werk aus sechs Abschnitten, nämlich: I. Magnetische Beobachtungen an der k. k Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. II. Monatliche und jährliche Resultate der meteorologischen Beobachtungen. III. Fünftägige Temperaturmittel und Abweichungen derselben von den Normalwerthen. IV. Abweichungen der Tagesmittel des Luftdruckes und der Temperatur vom Normalstande, Tagesmittel der Windesrichtung und Stärke und der Bewölkung. V. Uebersicht der im Jahre 1864 angestellten phänologischen Beobachtungen (Pflanzenreich und Thierreich). VI. Mehrjährige Mittel. Die Beobachtungen beziehen sich vorzugsweise auf das Jahr 1864, reichen aber auch weiter oder gehen auf frühere Jahre zurück. — Wir wünschen den Herren Herausgebern recht sehr Kraft und Ausdauer zur Fortsetzung des schwierigen Werkes.

Vermischte Schriften.

Berichtigung.

Als wir in unserem vorhergehenden Literarischen Berichte. Nr. CLXXXV. S. 15. die sehr verdienstlichen „Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de

Digitized by Google

V. Janni. p. 182. — Intorno alle equazioni binomie; per R. Rubini. p. 184. — Quistione. p. 189. — Nota sul Teorema della pag. 24, Vol. V; per D. Chelini. p. 190. — Quistione di Geometria; per G. Battaglini. p. 192.

Anzeige.

Die grosse Bedeutung der Werke von Lagrange veranlasst uns, die Leser auf die folgende uns zugesandte Anzeige aufmerksam zu machen. G.

S. Calvary & Co.

Special-Geschäft für Philologie und Naturwissenschaften.

Berlin.

Oberwasserstrasse 11.

So eben erschien in Paris:

Lagrange oeuvres vol. I.

Oeuvres de Lagrange; publiées par les soins de M. J. A. Serret, sous les auspices de Son Exc. le ministre de l'instruction publique.

Tome I in 4°. LI et 735 p. 30 fr.

Die Ausgabe ist auf 7 Bände in Ausstattung der Oeuvres de Laplace (Édition du Gouvernement) berechnet, und ist die Anzahl der auszugebenden Exemplare auf eine nur kleine Zahl beschränkt, so dass eine Subscription auch nach der materiellen Seite vortheilhaft erscheint.

Wir liefern das Werk zum Subscriptionspreise von:

8 Thlr. für den Band franco Berlin.

8 Thlr. 25 Sgr. für den Band frankirt an den Subscribenten.

Für die Bestellung genügt es, sich des unten angefügten Subscriptionsscheines zu bedienen oder eine Postanweisung unter Beifügung des heutigen Datums und der Bezeichnung **L** einzusenden.

Herren S. Calvary & Co.

Special-Geschäft für Philologie und Naturwissenschaften.

Berlin.

Oberwasserstrasse 11.

Subscriptions-Schein.

Expl. Oeuvres de Lagrange. Édition du Gouvernement vol. I & ff.

franco Berlin à Band 8 Thlr.

franco . . . à Band 8 Thlr. 25 Sgr.

Ort und Datum:

Name:

Digitized by Google

Nachschrift.

Da die Ausgabe nach dem Obigen nur auf 7 Bände berechnet ist, so wird dieselbe gewiss bloss die grösseren selbstständigen Werke von Lagrange, nämlich: Additions à l'Algèbre d'Euler. (Auch abgedruckt in: Élémens d'Algèbre par L. Euler, traduits de l'Allemand etc. Par T. G. Garnier. T. I. II. Paris. 1807.; die Zusätze von Lagrange finden sich in T. II. p. 281. — p. 485.). — Mécanique analytique. 2 Vol. — Théorie des fonctions analytiques. — Résolution des Équations numériques. — Leçons sur le Calcul des Fonctions enthalten können. Selbstständig, d. h. nicht in einem grösseren Sammelwerke, sondern als besondere Schrift ist auch in Turin gedruckt: Lettre du 23 juin 1754, adressée à Jules-Charles Fagnano, contenant une série pour les différentielles et les intégrales d'un ordre quelconque, correspondante à celle de Newton, pour les puissances. Dass auch dieser Brief in die Sammlung aufgenommen werden möchte, ist sehr zu wünschen. — Ein von Lacroix mitgetheiltes Verzeichniss aller grösseren Werke und einzelnen Abhandlungen ist der Mécanique analytique. **Nouvelle édition.** Tome II. Paris. 1815. beigefügt. Die verschiedenen einzelnen Abhandlungen finden sich sehr zerstreut in: Miscellanea Taurinensia, Mémoires de l'Académie de Berlin, Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, Mémoires de l'Institut, Journal de l'école polytechnique, Séances des écoles normales, Connaissance des tems (auch im Berliner astronom. Jahrbuche). — Am Ende des in Rede stehenden Verzeichnisses ist endlich auch noch angeführt: Essai d'Arithmétique politique, imprimé dans une Collection de divers Ouvrages d'Arithmétique politique, par Lavoisier, Lagrange et autres, publiée en l'an IV (1795—96) par M. Roederer, dessen Aufnahme in die Werke wohl auch recht sehr zu wünschen wäre, da diese Schrift jetzt gewiss sehr schwer zu haben ist. G.

Anzeige.

Im Begriff, dieses Heft zu schliessen, wird uns noch die folgende Anzeige zugesandt, welche wir mit Dank entgegen genommen haben und sogleich mittheilen, weil sie den Mathematikern den Weg angiebt, wie sie sich auf die leichteste, sicherste und

Digitized by Google

wohlfeilste Weise in den Besitz der letzten und einzigen in deutscher Sprache erschienenen Schrift von dem in neuester Zeit so viel genannten Wolfgang (Farkas) Bolyai setzen können.

Grunert.

Durch die Bibliothek des reformirten Collegiums zu Maros Vásárhely oder durch den Buchhändler J. Wittich daselbst ist gegen netto baar 20 Sgr. oder 1 Fl. österr. W. zu beziehen:

Von

Wolfgang Bolyai:

Kurzer Grundriss eines Versuchs

I. Die **Arithmetik**, durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen.

II. In der **Geometrie** die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. d. gl. nicht nur scharf zu bestimmen, sondern auch ihr Seyn im Raume zu beweisen: und da die Frage, **ob zwey von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel nicht $=2R$, sich scheiden oder nicht?** niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie **Euclid** das XI) aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die **Ja**-Antwort, andere auf das **Nein** so zu bauen, dass die Formeln der letzten, auf einen Wink auch in der ersten gültig seyen.

Nach einem lateinischen Werke von 1829. M. Vásárhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen.

MAROS VASARHELY 1851.

Digitized by Google

Literarischer Bericht
CLXXXVII.

Am 25. August 1867 starb nach Zeitungsnachrichten der grosse Physiker

Michael Faraday.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Nach Zeitungsnachrichten ist am 15. Juni 1867 dem grossen Lagrange in seiner Geburtsstadt Turin auf der Piazetta Lagrange, sonst Belloni, ein Monument errichtet worden; die colossale Statue ist ein Werk des Bildhauers Albertoni. — Lagrange war am 25. Januar 1736 in Turin geboren und starb in Paris am 10. April 1813.

Je erfreulicher es für jeden Mathematiker ist, dass Italien auf diese Weise das Andenken seines grossen Landsmanns ehrt: desto mehr wünschen wir, dass uns so bald als möglich einige nähere Nachrichten über die Errichtung jenes Monuments zugehen möchten, um durch deren Mittheilung im „Archiv" unsere Leser erfreuen zu können.

Die Entstehung des Newton-Leibniz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Von F. Giesel. Programm der zur Abhaltung von Abiturienten - Prüfungen berechtigten

höheren Bürgerschule zu Delitzsch von Ostern 1866. Delitzsch (gedruckt bei B. Meyer). 1866. 4°.

Diese zwar nur kurze, aber namentlich eine sehr grosse Anzahl dankenswerther literarischer Nachweisungen enthaltende Abhandlung scheint auf sorgfältigen historischen Untersuchungen zu beruhen, und legt die Hauptpunkte des berühmten Streites klar und deutlich vor Augen, so dass wir glauben, die kleine Schrift recht sehr zur Beachtung empfehlen zu können. Am Schluss gelangt der Herr Verfasser zu dem folgenden Resultate: „Newton ist der erste Erfinder der höheren Analysis. Leibniz ist einige Jahre später zu derselben Entdeckung gelangt, ganz selbstständig hinsichtlich der Erfindung seines Algorithmus, zum grössten Theile auch selbstständig bei der Auffindung der Grundregeln der neuen Rechnung, selbstständig bei deren Begründung. Ferner machte Leibniz von seinem Algorithmus einen consequenteren Gebrauch; Newton hat lange geschwankt, ob er die Fluxionen der Grössen x, y, ... mit X, Y, ... oder mit p, q, ... oder mit $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... bezeichnen sollte. Beide schwankten hinsichtlich der Begründung der Principien ihrer Rechnung. Leibniz hat sich hier und dort der Newton'schen von der Bewegung hergenommenen Anschauung genähert, Newton wiederum der Leibniz'schen. Vor allen aber ist es Leibnizens Verdienst, die Elemente seiner Differentialrechnung zuerst publicirt zu haben, seiner Differentialrechnung, die nach Biots Urtheil auch gegenwärtig noch eine wunderbare Schöpfung sein würde, wenn Newtons Fluxionsrechnung allein für uns vorhanden wäre".

Arithmetik.

Studien zur Integralrechnung von Dr. P. Helmling, ordentlichem Professor der reinen Mathematik an der Kaiserlichen Universität zu Dorpat. Eigenthum des Verfassers. Dorpat. Druck von C. Mattiesen. 1866.

Der Herr Verfasser hat schon früher zwei sehr werthvolle Schriften über Integralrechnung publicirt, nämlich:

Transformation und Ausmittelung bestimmter Integrale. Abhandlung, welche bei der Hochverordneten philosophischen Facultät der Kaiserlichen Universität zu Dorpat zur Erlangung der Magisterwürde ein-

Digitized by Google

gereicht hat und öffentlich vertheidigen wird Dr. Ph. Helmling. Mitau und Leipzig. Reyher. 1854. 4°.

und:

Transformation und Ausmittelung bestimmter Integrale mit besonderer Rücksicht auf grössere Werthe der Gränzen und implicirten Constanten. Von Dr. P. Helmling, Privatdocent zu Dorpat. Mitau und Leipzig. G. A. Reyher. 1854.

In seinem vorliegenden neuen Werke hat nun Herr Helmling eine Reihe neuer die Integralrechnung betreffender Untersuchungen veröffentlicht, welche ihn zu einer grossen Anzahl bisher ganz unbekannter oder nur in weniger vollkommener Form bekannter Resultate geführt haben, an denen das Werk so reich ist, dass davon hier eine auch nur annährend vollständige Uebersicht sich nicht geben lässt. Auch sind die Methoden, durch welche der Herr Verfasser zu diesen Resultaten gelangt ist, so mannigfaltig, dass dieselben hier näher zu charakterisiren unmöglich ist. Ueberall aber bekundet das Werk den in jeder Beziehung gewandten Analytiker, und lässt auf jeder Seite das Bestreben hervortreten, rücksichtlich der Gründlichkeit und Strenge den von der neueren Wissenschaft in dieser Beziehung gestellten Forderungen vollkommen gerecht zu werden, so dass wir dieses Werk für eine wichtige Erscheinung auf dem Gebiete der Analysis, insbesondere der Integralrechnung, halten, und der Meinung sind, dass kein Mathematiker, der sich mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt, desselben entbehren kann, und oft auf dasselbe zurückzugehen Veranlassung finden wird.

Das ganze Werk ist in drei Abschnitte getheilt, welche den folgenden Inhalt haben, den wir hier der Wichtigkeit der behandelten Gegenstände wegen vollständiger angeben, als wir sonst in diesen Literarischen Berichten der Beschränktheit des Raumes wegen zu thun gewohnt sind.

I. Abschnitt.

1. Ermittelung des Integrals $\int e^{\pm(\alpha+\beta i)x^n}.dx$ für ein beliebiges reelles n von 0 bis x oder von x bis ∞.

   a) Durch das Verfahren der theilweisen Integration.

   b) Durch Recursionsgleichungen bei genauer Restbestimmung.

Digitized by Google

2. Formen, welche von dem Integrallogarithmus abhängen.

3. Neue Grundlagen des Integrallogarithmus, Integral-cosinus, Integral-sinus.

4. Derivate dieser Formen.

5. Reihen, die nach bestimmten Integralen geordnet sind. Besondere Formen.

II. Abschnitt.

§. 1. Bestimmte Integrale und Differentiale in endlicher Form; Reihensummationen.

§. 2. Gammafunctionen mit complexem Argument.

Es ist in diesem Abschnitt, den wir der Aufmerksamkeit unserer Leser besonders empfehlen möchten, wie der Herr Verfasser selbst sagt, der Versuch gemacht, das Euler'sche Integral in seiner allgemeineren Fassung, nämlich:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}.dx}{x+e^{ai}},$$

als Ausgangspunkt zu benutzen, um eine sehr grosse Zahl bestimmter Integrale von Exponentialfunctionen in endlicher Form zu ermitteln, und es haben sich daran eine Reihe von eigenthümlichen Erörterungen und merkwürdigen Beziehungen anknüpfen lassen. Der §. 2. liefert dann die weitere Verallgemeinerung, wenn a complex wird, und führt dann naturgemäss zur Behandlung der Aufgabe, die Gammafunctionen für ein complexes Argument zu berechnen, und ihre wesentlichsten Fundamentaleigenschaften zu begründen.

III. Abschnitt.

Untersuchungen über die lineären Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit allgemeinen Coefficienten.

1. Differentialgleichungen, welche von bestimmten Formen der Partikulär-Integrale abhängen.

2. Transformation der allgemeinen Gleichung auf die Riccati'sche Form.

3. Integration durch Reihen.

4. Integration der allgemeinen Gleichung durch Kettenbrüche.

Digitized by Google

In diesem Abschnitte sind die Untersuchungen in den vier ersten Paragraphen aus dem Problem hervorgegangen, die lineäre Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit Coefficienten des zweiten Grades allgemein zu integriren. Obgleich die Aufgabe in dieser Allgemeinheit ungelöst blieb, indem **einer** der constanten Coefficienten statt beliebig zu sein als eine gegebene Function dreier anderer erschien, — hat die Untersuchung doch zu ganz interessanten Folgerungen geführt, und erledigte eine Menge besonderer Fälle. Die folgenden Paragraphen enthalten gleichfalls sehr bemerkenswerthe Untersuchungen über Differentialgleichungen, so wie denn z. B. in §. 5. die allgemeine lineäre Differentialgleichung der zweiten Ordnung auf die einfache Gleichung der ersten Ordnuug $v' + v^2 = X$, oder der zweiten Ordnung $\frac{d^2z}{dx^2} = Xz$ reducirt ist. Auch ist in diesen Paragraphen ein Theorem von **Petzval** näher beleuchtet und an einer Differentialgleichung der dritten Ordnung erläutert worden, nach welchem nämlich die Integration einer lineären Differentialgleichung der $n$ten Ordnung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen des 2ten Grades sind, allemal von der Integration einer lineären Differentialgleichung der zweiten Ordnung abhängig gemacht werden kann, deren Coefficienten ebenfalls ganze rationale Functionen, aber jetzt des $n$ten Grades sind.

Leider müssen wir uns hier mit diesen kurzen Andeutungen über den Inhalt dieses ausgezeichneten Werkes begnügen; je grösser aber die Hochachtung für seinen Verfasser ist, mit der wir von demselben, nachdem wir uns mit seinem Inhalte in eingehender Weise bekannt gemacht haben, geschieden sind: desto mehr wünschen wir, dass dasselbe die sorgfältigste, in jeder Beziehung verdiente Beachtung aller Mathematiker im weitesten Umfange finden möge.

Geometrie.

Anleitung zum Linearzeichnen, mit besonderer Berücksichtigung des gewerblichen und technischen Zeichnens, als Lehrmittel für Lehrer und Schüler an den verschiedenen gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium, von Professor G. Delabar, Conrector der Kantonsschule und Vorstand der Fortbildungsschule in St. Gallen. In drei Theilen. Freiburg i. B. Herder. 1867. Queer-Octav.

Digitized by Google

Wir glauben diese Anleitung zu dem für die Technik so wichtigen geometrischen Zeichnen recht sehr zur Beachtung empfehlen zu müssen, namentlich der ungemein grossen Anzahl für die Anwendung wichtiger Aufgaben wegen, welche der Leser in den uns bis jetzt vorliegenden drei, auch äusserlich sehr hübsch ausgestatteten Heften behandelt findet, so dass dieses Buch jedem Lehrer ein sehr reiches Material für seinen Unterricht zur Uebung seiner Schüler darbietet. Die sehr sauber lithographirten 60 Tafeln mit 322 sorgfältig ausgeführten Figuren erhöhen die Brauchbarkeit und den Werth der Schrift sehr. Die Darstellung ist im Ganzen durchaus praktisch gehalten, wenn auch — wofür z. B. besonders der erste Abschnitt der zweiten Abtheilung mit der Ueberschrift: „Lehrsätze und Aufgaben über die rechtwinkligen Projektionen der Geraden und Ebenen im Raume" den besten Beweis liefert — keineswegs ohne alle Beziehung auf theoretische Geometrie und ohne einfache theoretische Erläuterungen und Begriffsbestimmungen, aber doch nicht so theoretisch, wie die schöne Schrift von Quintino Sella (Archiv Thl. XLIII. Nr. IX.) und das im Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. angezeigte treffliche, von der sogenannten neueren Geometrie so schönen Gebrauch machende Werkchen von Paulus, welches übrigens sich durchaus auf Constructionen in der Ebene beschränkt. Die Schrift des Herrn Delabar beschäftigt sich dagegen im ersten Theile gleichfalls mit dem gewöhnlichen geometrischen Zeichnen in der Ebene oder der Zeichnung ebener Figuren, im zweiten Theile aber mit grosser Ausführlichkeit mit der graphischen Darstellung räumlicher Gebilde, so dass hiernach der Hauptinhalt der drei uns vorliegenden Hefte folgender ist: **Erster Theil.** Das geometrische Linearzeichnen. — **Zweiter Theil.** Das projektive Zeichnen oder die darstellende Geometrie. — **Erste Abtheilung.** Die Elemente der darstellenden Geometrie. — **Zweite Abtheilung.** Die weitere Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart. — Diese drei Hefte liegen uns, wie gesagt, bis jetzt nur vor; es sind aber, als dritte und vierte Abtheilung des zweiten Theils, noch zwei Hefte zu erwarten, welche die Polar- und Parallelperspektive und die Schattenlehre enthalten werden, deren Erscheinen wir mit Verlangen entgegen sehen, und die wir sogleich anzeigen werden, wenn sie in unsere Hände gelangen.

Wir wiederholen unser allgemeines Urtheil, dass wir den Werth dieser Schrift hauptsächlich in der grossen Menge praktisch wichtiger Aufgaben finden, die hier aufgelöst und durch schöne Zeichnungen erläutert sind, und die jedem Lehrer des geometrischen Zeichnens ein treffliches Hülfsmittel bei seinem Unterrichte

Digitized by Google

darbieten, weshalb die Schrift jedenfalls zur allgemeinsten Beachtung dringend empfohlen werden muss. Dass die Fortsetzung recht bald erscheinen möge, ist sehr zu wünschen.

Physik.

Naturlehre für gewerbliche Fortbildungsanstalten und verwandte Lehranstalten. Von Dr. Josef Krist, Professor an der k. k. Schottenfelder Ober-Realschule in Wien. Mit 240 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien. W. Braumüller. 1867. 8°.

Ein, wie es uns scheint, sehr gutes, seinem Zwecke vollständig entsprechendes und zu dessen Förderung trefflich geeignetes, auch äusserlich sehr schön ausgestattetes und mit vielen nichts zu wünschen übrig lassenden sehr deutlichen Holzschnitten versehenes Buch. Dasselbe verbreitet sich über die ganze Physik, entkleidet sich, hier unbedingt mit vollstem Rechte, von aller mathematischen Darstellung, und beschränkt sich gänzlich auf die Erläuterung durch das Experiment mittelst möglichst einfacher Apparate und Instrumente. Ueberall ist sorgfältig Rüchsicht auf die gewöhnlichere Technik sowohl, als auch namentlich auf die Anwendung der Lehren der Physik bei verschiedenen Vorkommnissen des gemeinen Lebens genommen, wohin wir z. B. den sehr lehrreichen, ziemlich ausführlichen Abschnitt (S. 134—S. 149.) über die verschiedenen Heizungsmethoden, die verschiedenen Arten der Oefen, die beste Anlage der Schornsteine u. s. w. rechnen. Wir sollten meinen, dass dieses Buch, ausser für gewerbliche Fortbildungsschulen, für die es zunächst bestimmt ist, sich auch ganz vorzüglich zu einem Lehrbuche der Physik für landwirthschaftliche Lehranstalten eignen dürfte, da der Lehrer das Weitere aus der Meteorologie, was für diese Unterrichtsanstalten noch nöthig sein möchte, leicht aus eigenen Mitteln hinzu thun kann; die Maschinenlehre und eine Anleitung zur Berechnung und Beurtheilung der Leistungen der einfacheren Maschinen, pflegt auf landwirthschaftlichen Lehranstalten in besonderen Vorträgen gelehrt zu werden; aber für die Physik im engeren Sinne möchten wir diesen Lehranstalten das vorliegende Lehrbuch als Grundlage für den Unterricht recht sehr empfehlen.

Von der verdienstlichen Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie (vergl. Literar.

Ber. Nr. CLXXXVI. S. 10.) sind neuerlich erschienen Band II. Nr. 16 und 17, welche Nummern zunächst einen sehr lesenswerthen Aufsatz von Herrn v. Lamont unter der Ueberschrift: Das Beobachtungssystem der Societas Palatina und der gegenwärtige Standpunkt der Meteorologie enthalten, in dem mit bekannter grosser Sachkenntniss der gegenwärtige Stand der Meteorologie gezeichnet wird und die jetzt vorzugsweise zu betretenden Wege angegeben werden. Der Herr Verfasser betrachtet es als wünschenswerth, dass bei Aufzeichnung der Beobachtungen sowohl, als bei Bearbeitung derselben und Zusammenstellung der Resultate, bestimmte und naheliegende, d. h. den gegenwärtigen Stand unmittelbar fördernde Zwecke im Auge behalten werden, er betrachtet es ferner als wünschenswerth, dass der mathematische Charakter der Meteorologie in den Vordergrund trete. Conformität und strenger Anschluss an die Vorschriften dieses oder jenes Beobachtungssystems genügen nicht, um dem Beobachter einen seiner Mühe entsprechenden Erfolg zu sichern und zu verhindern, dass er nicht Gefahr laufe, bloss zur Vermehrung des überflüssigen (insbesondere ist es der schon von Muncke hervorgehobene „nutzlose Ueberfluss von Barometerbeobachtungen“) Materials beizutragen. — Ausserdem enthalten die vorliegenden Nummern noch zwei recht interessante Aufsätze: Ueber den Föhnwind von A. Mühry und: Ueber den Ursprung der Gewitter von J. Hann, so wie eine grosse Anzahl lesenswerther kleinerer Mittheilungen.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXV. S. 14.

1867. I. Heft LV. Ausser mehreren anderen interessanten und wichtigen, aber nicht in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen, enthält das vorliegende Heft dieser wichtigen Sitzungsberichte die folgende Abhandlung:

H. v. Schlagintweit - Sakünlünski: Die wichtigsten Höhenbestimmungen in Indien, im Himálaya, in Tibet und Turkistan.

Diese wichtige und interessante Abhandlung (S. 479.—S. 518.) liefert 3495 Höhenbestimmungen, von denen 1615 auf Indien,

1880 auf Hochasien kommen. Die nördliche Breite und die östliche Länge von Greenwich ist für alle einzelnen Stationen angegeben; der Längenunterschied zwischen Greenwich und dem Madras-Observatorium ist 80°. 13'. 56" gesetzt (so sagt der Verfasser S. 481; auf Seite 502. in dem Höhenverzeichnisse steht als Länge des Madras-Observatorium annähernd 80°. 13'9., weil in diesem Verzeichnisse die Längen überall nur in Minuten angegeben sind); die Höhen sind in englischen Fussen angegeben. Zunächst für physikalische Geographie ist diese Abhandlung, die, ausser dem Höhenverzeichnisse selbst, noch manche interessante und lehrreiche Erläuterungen zu demselben enthält, jedenfalls sehr wichtig.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 13.).

Luglio e Agosto 1867. Sulle perturbazioni planetarie; per R. del Grosso. p. 193. — Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky; per G. Battaglini. p. 217. — Quelques théorèmes sur le quadrilatère; par L. Matthiessen. p. 232. — Résolution nouvelle de l'équation du quatrième degré; par le même auteur. p. 234. — De la plus courte distance entre deux droites dans l'espace, et d'un cas particulier d'une fonction de deux variables indépendantes, dont le rapport à une limite determineé; par G. Stammer. p. 236. — Sopra alcuni teoremi di Steiner, per E. Padova. p. 240. — Correzioni-Sopra una divisibilità; per G. Torelli. p. 250. — Soluzioni della quistione 67; per G. Ascoli, A. Roiti ed E. Padova. p. 254. — Annunzio Bibliografico. p. 256.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. Lund. Berlinska Boktryckeriet.

So wie die Universität Upsala jährlich Schriften unter dem Titel: Upsala Universitets Årsskrift, von welchen in unseren Literarischen Berichten schon öfter die Rede gewesen ist, herausgiebt, geschieht dies auch von der Universität Lund, und wir müssen auch diese Universitäts-Schriften unseren Lesern sehr zur Beachtung empfehlen, da dieselben aus allen Wissenschaften sehr beachtenswerthe Abhandlungen enthalten. Für jetzt liegen uns von diesen Schriften die beiden folgenden Jahrgänge vor:

1. Lunds Universitets Års-Skrift för år 1864. Afde-

lingen för Mathematik och Naturvetenskap. Dieser Jahrgang enthält nur eine in den Kreis des Archivs gehörende Abhandlung, nämlich: Afhandling om tals visare till sammansatta delare (indices à module composé) af C. J. D: Son Hill, in welcher Herr Hill einige schätzenswerthe und sorgfältigst zu beachtende Tafeln liefert, welche in der Zahlenlehre von vielfachem Gebrauch sein können, und zugleich deren Theorie entwickelt.

2. Lunds Universitets Års-Skrift för år 1865. Afdelingen för Mathematik och Naturvetenskap. Dieser Jahrgang enthält: Quelques Tables des fractions avec une Note sur le nombre des divisions à effectuer pour obtenir le plus grand commun diviseur par C. J. D: Son Hill. Auch diese Abhandlung liefert sehr schätzenswerthe, für die Zahlenlehre wichtige Tafeln nebst deren Theorie, welche wir recht sehr zur Beachtung empfehlen. Die erste dieser Tafeln: Table I des fractions, enthält namentlich die Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche und in Kettenbrüche, deren Theilnenner in der Tafel angegeben sind, und einiges Andere. Die Ueberschriften der beiden anderen Tafeln sind: Table II (des Nombres Reciproques ou des périodes décimaux). — Table III des périodes décimales des nombres premiers reciproques, aus denen der Zweck dieser Tafeln leicht von selbst erhellen wird; die Theorie und Anwendung der Tafeln ist überall deutlich gezeigt. Angehängt ist noch: Notice sur une propriété génerale des fonctions données par des équations à différences et différentielles. — Ausser dieser Abhandlung enthält der vorliegende Band noch die sehr schöne, der Beachtung von Neuem recht sehr zu empfehlende Abhandlung: Om Determinanter, hvars elementer äro Binomialkoefficienter. Af Viktor von Zeipel, welche auch in besonderem Abdruck erschienen, und ihres vielfach interessanten Inhalts wegen von uns schon im Literar. Ber. Nr. CLXXXIV. S. 12. besonders angezeigt worden ist, auf welche Anzeige wir daher die Leser, um diese schöne Abhandlung verdientermassen genauer kennen zu lernen, uns zu verweisen erlauben.

Wir wünschen sehr, durch obige Anzeige auf diese vielfach wichtigen und des Interessanten sehr Vieles darbietenden Schriften die sorgfältigste Beachtung unserer Leser hinzulenken, und zu deren weiterer Bekanntwerdung Einiges beizutragen.

Digitized by Google

Näheres über die neue Ausgabe der Werke von Lagrange, mit Rücksicht auf Literar. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 14.

Rücksichtlich unserer Anzeige der neuen Ausgabe der Werke von Lagrange im Literar. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 14. ist uns zu unserer Freude mitgetheilt worden, dass unsere dort ausgesprochene Vermuthung: die Ausgabe werde die kleineren Abhandlungen des grossen Mathematikers nicht enthalten, falsch ist, indem diese Ausgabe in der That auch alle diese Abhandlungen in chronologischer Folge umfassen wird. Den Beweis liefert schon die folgende genauere Inhaltsanzeige des ersten Theils, die wir unseren Lesern mitzutheilen nicht unterlassen:

Lagrange. — Oeuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. J.-A. Serret, Membre de l'Institut, sous les auspices de S. Exc. le Ministre de l'Instruction publique. Tome I. In-4; 1867. 30 fr.

Les Oeuvres de Lagrange doivent former sept volumes in-4.

CHAQUE VOLUME SE VENDRA SÉPARÉMENT.

M. Serret, en présentant à l'Académie le premier volume des Oeuvres de Lagrange, s'exprime ainsi:

„J'ai l'honneur d'offrir à l'Académie le premier volume des Oeuvres de Lagrange, que je publie au nom de l'État, conformément à un Arrêté d. S. Exc. le Ministre de l'Instruction publique.

„Les importants Mémoires qui figurent dans ce volume intéressent à la fois les Géomètres, les Astronomes et les Physiciens: en voici les titres:

Biographie de Lagrange par de Delambre.

„I. Recherches sur la méthode De maximis et minimis.

„II. Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes.

„III. Recherches sur la nature et la propagation du son.

„IV. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son.

„V. Addition aux premières recherches sur la nature et la propagation du son.

„VI. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies.

„VII. Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solution de différents Problémes de Dynamique.

„VIII. Solution de différents Problèmes de Calcul intégral, avec une application à la théorie de Jupiter et de Saturne.

„IX. Solution d'un Problème d'Arithmétique.

Zugleich machen wir die Leser auf die folgende Sammlung aufmerksam, welche, unabhängig von der neuen Pariser Ausgabe, alle in den Schriften der Berliner Akademie von 1776 bis 1803 erschienenen Abhandlungen von Lagrange enthält, und von Herrn Calvary & Co. in Berlin (Oberwallstrasse 11.) bezogen werden kann:

Lagrange. 35 mémoires de Lagrange, publiés par l'Académie de Berlin pendant les années 1776 à 1803. 6 thlr. 20 sgr.

Contenu: Sur l'attraction des moyens mouvements des planètes (1776). — Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral (1776). — Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations litérales (1777). — Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante (1777). — Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances (1777). — Réflexion sur l'échappement (1777). — Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations. 3 mémoires (1778 — 83). — Sur la théorie des lunettes (1778). — Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques décrites par de forces tendantes au foyer et réciproquement proportionelles aux carrés des distances (1778). — Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières (1779). — Sur la construction des cartes géographiques. 2 mémoires (1779). — Théorie de la libration de la lune, et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète (1780). — Rapport d'une quadrature de cercle (1781). — Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides (1781). — Théorie des variations séculaires des élémens des planètes. 2 mémoires (1781—82). — Théorie des variations périodiques des planètes. 2 parties (1783—84). — Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes (1783). — Sur une méthode particulière d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes (1783). — Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation (1783). — Sur une nouvelle propriété du centre de gravité (1783). — Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires (1785). — Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes, pour servir d'addition aux principes de Newton (1786). — Sur la manière de rectifier deux endroits des principes de Newton, relatifs à la propagation du son, et au mouvement des ondes (1786). — Mémoire sur la détermination des variations séculaires des éléments de Herschel, occasionnées par l'action de Saturne et de Jupiter, et des variations périodiques de son mouvement dépendantes de ses distances héliocentriques à ces planètes. 2 mémoires. (1787—92). — Recherches sur plusieurs points d'analyse. 6 mémoires (1792 — 1803). — Mémoire sur une question concernant les annuités (1803).

Digitized by Google

Literarischer Bericht
CLXXXVIII.

Schriften über Unterrichtswesen.

Programm der Grossherzoglich Badischen Polytechnischen Schule zu Carlsruhe für das Jahr 1867—1868. Carlsruhe. Buchdruckerei von Malsch und Vogel. 1867. 8°.

Dieses 47 Seiten (mit einer Figurentafel) starke Programm giebt eine sehr deutliche Darstellung der auf dem Titel genannten berühmten Lehranstalt nach ihrer neueren Einrichtung und Organisation, und hat folgenden Hauptinhalt: A. Ziel und Organisation der polytechnischen Schule. — B. Verzeichniss der Vorlesungen und Uebungen. — C. Programme der einzelnen Schulen. — D. Themata des schriftlichen und graphischen Theiles der Diplomprüfungen. — E. Personalverzeichniss des Polytechnikums. — Figurentafel zu D.

Ausser dem Werthe, welcher diesem Programm, wie schon erwähnt, deshalb gebührt, weil es dem Leser ein sehr anschauliches Bild von einer der ältesten und berühmtesten polytechnischen Lehranstalten, welche dem herrlichen Badischen Lande zu wahrer Zierde gereicht, giebt, hat dasselbe auch einen besonderen wissenschaftlichen Werth. Seit zwei Jahren ertheilt nämlich das Polytechnikum Diplome, welche den Inhaber auf Grund tüchtiger wissenschaftlicher Bildung, nachgewiesen durch eine strenge Prüfung, deren Ergebnisse im Einzelnen dem Diplome selbst beigefügt sind, empfehlen sollen. Dabei ist nun die sehr nachahmungswerthe Einrichtung getroffen, dass die bei diesen Prüfungen gegebenen Aufgaben in den Programmen publicirt werden. Dies ist

auch in dem vorliegenden Programm auf S. 24.—S. 45. nach folgenden Rubriken geschehen: I. Diplomprüfungen für Ingenieure. A. Ingenieurwissenschaften (Wasser-, Strassen- und Eisenbahnbau). 12 Aufgaben. — B. Maschinenlehre und angewandte Mechanik. 6 Aufgaben. — C. Maschinenbau. 11 Aufgaben. — D. Analysis nebst deren Anwendungen. 33 Aufgaben. — E. Analytische Geometrie. 11 Aufgaben. — F. Analytische Mechanik. 10 Aufgaben. — G. Darstellende Geometrie. 10 Aufgaben. — H. Praktische Geometrie. 4 Aufgaben. — II. Diplomprüfung für Maschinenbau und mechanische Technik. A. Maschinenlehre und Maschinenbau. 2 Aufgaben. — E. Analytische Geometrie. Eine in eine grössere Anzahl verschiedener einzelner Fragen zerfallende Aufgabe. — Die Aufgaben der Rubriken B., C., D., F. sind schon unter den früheren enthalten. — III. Diplomprüfungen für Architekten. A. Grössere architektonische Entwürfe. 4 Aufgaben. — B. Höhere Architektur. 9 Aufgaben. — C. Geschichte der Architektur. 2 Aufgaben. — D. Technische Architektur. 10 Aufgaben. — E. Darstellende Geometrie. 8 Aufgaben. — F. Elementare und angewandte Mechanik. 6 Aufgaben.

Wir haben von allen diesen Aufgaben mit grossem Interesse nähere Kenntniss genommen, und empfehlen dieselben als eine treffliche Sammlung allen Lehrern an höheren technischen Unterrichtsanstalten zu sorgfältigster Beachtung.

(Ueber eine empfehlenswerthe Sammlung mathematischer Aufgaben von Herrn Professor W. Erler in Züllichau, und eine gleichfalls recht empfehlenswerthe Sammlung von Tafeln und Formeln (Mathematisches Taschenbuch) von Herrn Professor Ligowski in Berlin s. m. unten unter den Vermischten Schriften.)

Arithmetik.

In der „Zeitschrift für das Versicherungswesen. Herausgegeben von Th. Saski in Leipzig. III. Jahrgang. 1867. Nr. 45.“ findet sich ein Aufsatz: „Zur Theorie der Verbindungs-Renten. Allgemeine Methode zur Ermittelung der Verbindungsrenten bei directen besonderen Bedingungen. Von Dr. Bernhard Sommer.“

Digitized by Google

Geometrie.

Sulle corde comuni a due sezioni coniche e sopra alcune loro applicazioni nella Geometria descrittiva. Dissertazione e Tesi presentate da Regis Domenico, Ingegnere e Architetto, Professore aggiunte di Matematica nella R. Militare Accademia, Assistente alla Scuola di Disegno nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino. Pel concorso ad un posto di Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali nella R. Università di Torino. Il 3 Dicembre 1866. Torino. Tipografia Italiana. Piazza Vittorio Emanuele 1 e 3. 1866.

Der Herr Verfasser dieser der Beachtung zu empfehlenden Universitätsschrift über die gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte hat im ersten Theile zuerst den allgemeinen Begriff der reellen und ideellen gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte deutlich erläutert, dann eine Reihe solche Sehnen betreffender Sätze bewiesen. Hierauf betrachtet er die gemeinschaftlichen Sehnen zweier nicht in einer Ebene liegender Linien des zweiten Grades, und bespricht dann die Homologie zweier Kegelschnitte. Die Methode der Untersuchung ist eine grösstentheils rein-geometrische, und empfiehlt sich durch ihre Einfachheit. Der zweite Theil ist Anwendungen auf die descriptive Geometrie gewidmet, und behandelt in vier Kapiteln die folgenden Aufgaben: I. Ricerca della proiezione della linea d'intersezione di due superficie di 2º grado e di rivoluzione, i cui assi s'incontrino, sopra di un piano parallelo agli stessi assi. — II. Dato un cono di rivoluzione collocare su di esso una curva di 2º grado data. — III. Dato un cono qualunque di 2º grado collocare su di esso una linea di 2º grado data. — IV. Descrivere una sezione conica, la quale abbia con un'altra un contatto di 1º, 2º o 3º ordine. — Angehängt sind der Abhandlung eine grosse Anzahl von Thesen, betreffend die Anwendung der Algebra auf Geometrie und die Coordinatenlehre, die Berührung der Curven und den Krümmungskreis, die reine Geometrie, die Lehre von der Wärme, Gestalt und Grösse der Erde oder überhaupt Geodäsie. — Zur Vergleichung mit deutschen Universitätsschriften ähnlicher Art möchten wir noch besonders auf diese Thesen aufmerksam machen.

Digitized by Google

Astronomie.

Sternschnuppen und Kometen. Geschichte der Entdeckung des Zusammenhanges zwischen diesen beiden Gattungen von Himmelskörpern, gemeinfasslich dargestellt von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. (Sonderabdruck aus dem „Kalender für alle Stände. 1868.“). Wien. Carl Gerold's Sohn. 1867.

Herr Professor von Littrow hat sich durch diese mit sehr grosser allgemeiner Sachkenntniss und mit ungemeiner Deutlichkeit verfasste Schrift ein nicht genug anzuerkennendes Verdienst um alle diejenigen erworben, welche an den auf dem Titel genannten Gegenständen lebhaftes Interesse nehmen, auch dadurch, dass man hier in leichter Uebersicht Vieles auf einem kleinen Raume beisammen findet, was man sonst in vielen oft schwer zugänglichen Schriften zusammensuchen müsste. Was der Herr Verfasser über die Sternschnuppen uns hier bietet, betrifft, wie er selbst auf S. 3. in sehr bezeichnender Weise sich ausdrückt, vorzugsweise die „Weltstellung“ dieser Meteore. Zuerst wird in überaus lehrreicher Weise Das besprochen, was in dieser Beziehung etwa vom Jahre 1863 an — natürlich immer mit sorgfältiger Berücksichtigung früherer Beobachtungen — von verschiedenen Astronomen und Physikern, namentlich H. A. Newton, so wie schon früher von D. Olmsted, Herrick, Twining, Quetelet, A. Herschel, R. P. Greg und vielen Anderen, geleistet worden ist, bis er dann endlich zu der ganz neuerlich gemachten, alles Frühere weit hinter sich lassenden, wahrhaft Epoche machenden wichtigen Entdeckung des Directors der berühmten Sternwarte der Brera in Mailand, des Herrn G. V. Schiaparelli, kommt, die hier mit dem ganzen Wege, welcher zu ihr geführt, in der eingehendsten, lehrreichsten und anschaulichsten Weise besprochen und dem Leser vorgeführt wird. Diese Entdeckung besteht — um es mit der uns hier gebotenen Kürze zu sagen — darin, dass Herr Schiaparelli bis zu vollkommenster Ueberzeugung nachgewiesen hat, dass Sternschnuppen-Ströme oder Schwärme und Kometen **Eins** sind, dass Kometen gewissermaassen als Theile von Sternschnuppen-Strömen betrachtet werden müssen. Nach einer Methode, zu deren weiterer Besprechung hier der Raum fehlt, die aber auf einer Aufgabe aus der Lehre von den Kegelschnitten, auf die wir späterhin in dem Archive selbst zurückzukommen hoffen, beruhet, hat Herr Schiaparelli die parabolischen Elemente des Meteorstroms vom 10. August, welchen er

Digitized by Google

wegen des Sternbildes, aus dem er zu kommen scheint, fortan die **Perseiden** zu nennen vorschlägt, berechnet und dadurch folgende Resultate erhalten:

Elemente der Perseiden 1866.

Periheldurchgang	Juli 23.62
Knotendurchgang	August 10.75
Länge des Perihels	343°.38′
Länge des aufsteigenden Knotens	138°.16′
Neigung	64°. 3′
Periheldistanz	0.9643

Bewegung retrograd.

Für den Kometen 1862 III. hat aber Herr **Th. Oppolzer** in **Wien** folgende Elemente gefunden:

Elemente des Kometen 1862 III.

Periheldurchgang	August 22. 9
Länge des Perihels	344°.41′
Länge des aufsteigenden Knotens	137°.27′
Neigung	66°.25′
Periheldistanz	0.9626

Bewegung retrograd.

Umlaufszeit	123.4 Jahre.

Beide Elementensysteme weichen, wie man auf den ersten Blick sieht, von einander nur um Grössen ab, die sich aus der geringen Genauigkeit leicht erklären lassen, mit der man Knoten und Radiationspunkt von Sternschnuppen bestimmt, und somit war ein schlagendes Beispiel von **Zusammengehörigkeit von Meteoren und Kometen** gefunden.

Herr **Schiaparelli** hat auch noch die Bahn der Novembermeteore berechnet, und findet:

Elemente des Novemberstroms.

Periheldurchgang	October 30. 5
Durchgang im niedersteigenden Knoten	November 13. 5
Länge des Perihels	71°
Länge des aufsteigenden Knotens	231°
Neigung	15°
Periheldistanz	0.96
Grosse Halbachse in mittl. Entf. Sonne — Erde	10. 4
Umlaufszeit	33.3 Jahre

Bewegung retrograd,

aber nicht ausdrücklich bemerkt — wenigstens nicht in den unten

Digitized by Google

angeführten, uns allein zu Gebote stehenden Schriften — wie nahe diese Elemente mit den gleichfalls von Herrn T. Oppolzer in Wien berechneten Elementen des Kometen 1866. I. übereinstimmen, welche von Herrn v. Littrow wie folgt mitgetheilt werden:

Elemente des Kometen 1866. I.

Periheldurchgang 1866 Januar	11.160 mittl. Mail. Zeit
Länge des Perihels	68°.28′.0″
Länge des Knotens	231°.26′.1″
Neigung	17°.18′.1″
Periheldistanz	0.9705
Excentricität	0.9054
Grosse Halbachse	10.324
Revolution	33.176

Bewegung retrograd *).

Jedenfalls ist Herrn Schiaparelli's Entdeckung eine wahrhaft grossartige und Epoche machende, die ihm und seinem Vaterlande zur grössten Ehre gereicht, und Herrn v. Littrow's Schrift hat das Verdienst, dass sie zur Bekanntwerdung dieser schönen Entdeckung in weiteren Kreisen wesentlich beitragen, und das allgemeinste Interesse an derselben erregen wird, wozu sie durch die Einfachheit, Deutlichkeit und Anschaulichkeit ihrer Darstellung vollkommen geeignet ist.

Wir benutzen die uns hier dargebotene Gelegenheit gern, die Besitzer der verdienstlichen Littrow'schen Schrift auf einige kleine in derselben stehen gebliebene Versehen aufmerksam zu machen, wobei wir bemerken, dass vorstehend **absichtlich** die Zahlen so wiedergegeben sind, wie sie in der Schrift wirklich stehen; was daran zu ändern ist, findet sich nachstehend, wonach also die oben gegebenen Zahlen zu verbessern sein würden:

S. 19. bei Nov. 12—14. soll es heissen: γ Löwe statt γ Orion (dieser Fehler datirt von A. Herschel, der eigentlich sagt: γ Orionis (rectius Leonis) oder μ Leonis.

S. 30. Zeile 11. von oben soll es „11. August" statt „10. August" heissen.

S. 31. Zeile 22. von oben soll es heissen: 925 statt 935.

S. 32. sind Länge des Perihels und des Knotens so wie Neigung bei'm Kometen sowohl als bei dem Novemberstrome nicht in Minuten und Sekunden, sondern in Minuten und Zehntheilen der Minute zu verstehen, also 60° 28′.0 statt 60° 28′ 0″ u. s. w.

---

*) Einige Berichtigungen der vorstehenden Zahlen s. m. unten.

Digitized by Google

Ebenda hat die Periheldistanz des Kometen zu lauten: 0.9765 statt 0.9705.

S. 36. Zeile 15. von oben lies 126 statt 146.

Schliesslich bemerken wir, dass Herrn Schiaparelli's wichtige Arbeiten zuerst in der Form von Briefen an P. A. Secchi in Rom in dem Bullettino meteorologico dell' osservatorio del Collegio Romano. Vol. V. Nᵢ. 8. 10. 11. 12., und dann (wenigstens dem grössten Theile nach) gesammelt in der besonderen Schrift: Intorno al corso ed all' origine probabile delle stelle meteoriche. Lettere di G. V. Schiaparelli al P. A. Secchi. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata. Nᵃ. 211. A. erschienen sind.

Die hier ausführlich angezeigte Schrift des Herrn v. Littrow ist ein besonderer Abdruck aus:

Kalender für alle Stände 1868. Herausgegeben von Karl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold's Sohn. 8⁰.

Wir treffen in diesem schönen Kalender einen alten sehr lieben Bekannten, mit — oder vielmehr von — dem wir zuletzt im Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 11. gesprochen haben. Wie alle bewährten Freunde hat er sich auch diesmal gar nicht verändert, und wird uns, wie allen Liebhabern der Astronomie, auch fortan bei unseren gelegentlichen Beschäftigungen mit den grossen Wundern der Schöpfung als überaus zweckmässige kleine astronomische Ephemeride wie bisher ein sicherer Führer sein. — Der schöne wissenschaftliche Inhalt dieses Jahrgangs ist schon vorher ausführlich besprochen. — Der vorher angeführten Berichtigungen wegen bemerken wir, dass den Seiten 19, 30, 31, 32, 36 des besonderen Abdrucks der vorher angezeigten Schrift die Seiten 93, 104, 105, 106, 110 des Kalenders entsprechen, so dass also auch in diesem letzteren die erforderlichen Berichtigungen leicht nach dem Obigen eingetragen werden können.

Wir haben diese Anzeigen zweier sehr empfehlenswerther Schriften zugleich gern benutzt, um unseren Lesern nach Anleitung dieser Schriften von Herrn Schiaparelli's wichtiger Entdeckung in eingehenderer Darstellung nähere Kenntniss zu geben.

Digitized by Google

Physik.

Von der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie (vergl. Liter. Ber. Nr. CLXXXVII. S. 8.) sind uns neuerlich zugegangen Band II. Nr. 18, 19, 20, 21, welche Nummern u. A. enthalten: Zur orographischen Meteorologie. II. Ueber das Verweilen einer wärmeren Luftschichte in den oberen Regionen der Alpen. Von A. Mühry. — Der Föhn in den österreichischen Alpen. Von J. Hann. — Ozonometrische Bestimmungen in Oesterreich. Von Dr. C. Jelinek. — Die meteorologischen Instrumente auf der diesjährigen internationalen Ausstellung in Paris. Von M. Kühn. Artikel I. und II. — Sonnenhöfe und Nebensonnen in der täglichen und jährlichen Periode. Von Carl Fritsch. — Ueber „Detraction" eines Windes, und über die Monsuns, d. s. periodische, anhaltende, jahreszeitliche Aspirationswinde, abgezweigt von einem Hauptwinde. Von A. Mühry. — Ueber den Einfluss der Lufttemperatur auf die Wasserstände der Drau. Von J. Prettner. — Ein Beitrag zur täglichen Periode der Regenmenge im Sommer. Von Carl Fritsch. — Ueber die Regenverhältnisse von Lesina. Von G. Bucchich. — Ausserdem, wie immer, eine grosse Anzahl interessanter kleinerer Mittheilungen und Literaturberichte.

Météorologie de la Belgique comparée à celle du globe par Ad. Quetelet, Directeur de l'Observatoire Royal de Bruxelles etc. etc. Bruxelles. C. Muquardt. Paris. J.-B. Ballière et Fils. 1867. 8⁰.

Belgien ist wohl das Land, dessen meteorologische Verhältnisse in der genauesten, sorgfältigsten, vollständigsten und — wir können wohl sagen — wissenschaftlichsten Weise erforscht sind, und kann in dieser Beziehung gewiss als Muster aufgestellt werden. Das Verdienst, diese Untersuchungen angeregt und mit der grössten Ausdauer und Consequenz eine lange Reihe von Jahren fortgesetzt und durchgeführt, dadurch aber zugleich der Bearbeitung der Meteorologie als Wissenschaft überhaupt einen mächtigen Impuls gegeben und die dabei zu verfolgenden wissenschaftlichen Bahnen scharf und bestimmt vorgezeichnet zu haben, gebührt ganz unbestreitbar Herrn Ad. Quetelet, der auch jetzt noch rüstig und ungeschwächt dem vor langen Jahren sich gesteckten Ziele zustrebt, was einen Jeden, der Untersuchungen dieser Art

mit lebhaftem Interesse verfolgt, nur mit grösster Freude erfüllen kann. Das vorliegende Werk ist eine Frucht dieser langjährigen mühevollen Untersuchungen, und konnte nur aus solchen, viele Jahre lang fortgesetzten Bestrebungen hervorgehen, wobei wir aber in der bestimmtesten Weise hervorheben müssen, dass dasselbe nicht im Entferntesten bloss für das Land, dem es vorzugsweise gewidmet ist, von localem Interesse, sondern für die wissenschaftliche Meteorologie überhaupt von grosser Bedeutung ist, weil es überall diejenigen Gesichtspunkte klar vor Augen legt, welche bei Untersuchungen dieser Art vorzugsweise in's Auge gefasst werden müssen, und zugleich auch die Wege angiebt, die betreten werden müssen, um zu Resultaten zu gelangen, welche auf Vertrauen Anspruch machen und eben deshalb als sichere Grundlagen für weitere Untersuchungen dienen können. Auch hebt ja schon der Titel: „Météorologie de la Belgique, **comparée à celle du globe**“ hervor, dass der Herr Verfasser keineswegs bloss dem localen Interesse dienen, sondern seinem Werke ein höheres und allgemeineres Interesse verleihen wollte, was ihm auch nach unserer Meinung in der schönsten Weise gelungen ist, da wir von uns bekennen müssen, dass wir das Werk mit dem grössten Nutzen für unsere eigene allgemeinere Belehrung über die bei meteorologischen Untersuchungen zu befolgenden Methoden und Gesichtspunkte gelesen haben. In der sehr lehrreichen „Introduction. p. XI.“ spricht sich der Herr Verfasser selbst über den hier hervorgehobenen allgemeineren Zweck seines Werkes in folgender Weise aus: „Bien que notre principal but, dans ce qui va suivre, soit principalement de poser les principes de la météorologie pour le sol belge, nous ne pouvons cependant isoler notre pays du reste du globe; ce ne serait qu'examiner un faible côté de la question. Dans les deux premières parties de cet ouvrage, nous nous occuperons spécialement de tous les éléments météorologiques qui concernent Bruxelles*): nous étendrons ensuite nos recherches à la Belgique entière; et, dans la quatrième partie, nous jetterons les yeux sur le globe, pour examiner les modifications qu' éprouvent nos éléments météorologiques, en passant de notre pays aux autres pays qui l'avoisinent.“ Die Leser werden finden, dass der nachstehend angegebene Hauptinhalt dem hier im Allgemeinen vorgezeichneten Gange vollkommen entspricht: „Introduction.

*) Brüssel ist ja hauptsächlich die Wiege und der eigentliche Mittelpunkt aller hier zur Sprache kommenden Untersuchungen; deshalb ist das Werk auch mit Recht mit einer Abbildung des „Observatoire Royal de Bruxelles“ geschmückt worden.

Digitized by Google

Livre I. De la chaleur, de la pression de l'air et des vents. I. De la chaleur. II. De la pression de l'air. III. Des vents. — **Livre II.** De l'hygrométrie, des pluies, de l'électricité et des phénomènes lumineux. I. De l'hygrométrie. II. Pluie, grèle, neige, etc. III. Électricité. IV. Phénomènes lumineux. — **Livre III.** La Belgique. I. De la chaleur. II. De la pression de l'air. III. Des vents. IV. De l'hygrométrie. V. Pluie, grèle, neige, etc. VI. Électricité. VII. Phénomènes lumineux. — **Livre IV.** Globe en général. I. De la chaleur. II. De la pression de l'air. III. Des vents. IV. De l'hygrométrie. V. Pluie, grèle, neige, etc. VI. Électricité. VII. Phénomènes lumineux."

Man wird hieraus zugleich die Consequenz erkennen, mit welcher jeder der verschiedenen Gesichtspunkte nach allen Richtungen durchgeführt ist, und wird dem Herrn Verfasser Glück zu der Vollendung dieses schönen Werkes und von Herzen Kraft zu der Ausführung weiterer in der „Introduction" in Aussicht gestellter Arbeiten wünschen.

Officieller Ausstellungs-Bericht, herausgegeben durch das k. k. österreichische Central-Comité. I. Lieferung. Instrumente für Kunst und Wissenschaft auf der Welt-Ausstellung zu Paris im Jahre 1867. Classe 10, 11, 12 und 23. Mit 14 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien, Wilhelm Braumüller. 1867. 8°.

Ein sehr interessanter und ausführlicher, wie es uns scheint, mit grosser Sachkenntniss und — wie wir hinzusetzen — auch offenbar mit grosser Unpartheiligkeit verfasster Bericht, den wir allen denen, welchen es — wie uns — versagt war, die Welt-Ausstellung zu besuchen, recht sehr zur Beachtung empfehlen. In den Kreis unserer Zeitschrift gehören zunächst und vorzugsweise die folgenden Abtheilungen: **Präcisions-Instrumente und Lehrmittel für den wissenschaftlichen Unterricht. Classe XII.** — I. Physikalisch-mathematische Instrumente. Dieser Bericht ist von Herrn Professor Dr. F. J. Pisko in Wien, der sich schon durch frühere ähnliche Berichte sehr verdient gemacht hat, mit grosser Umsicht und Sachkenntniss verfasst und zerfällt in die folgenden Unterabtheilungen: Allgemeines. I. Meteorologische Instrumente. II. Luftpumpen. III. Akustische Apparate. IV. Optische, astronomische und geodätische Instrumente. V. Instrumente zur Wärmelehre. VI. Magnetische und elektrische Apparate. VII. Meteorologische Instrumente.

Digitized by Google

VIII. Pantographen. — II. Die Mikroskope. Bericht von Herrn Dr. Jul. Wiesner, Docent am k. k. polytechnischen Institute in Wien: Allgemeines. 1. Die Grundtypen der gegenwärtig construirten Mikroskope. 2. Die Immersionssysteme. 3. Hartnack's Objectivsysteme mit doppelter Correction. 4. Hartnack's Immersionssysteme Nr. 12—18. 5. Das Hartnack-Prazmowski'sche Prisma. 6. Die bedeutenderen Firmen. 7. Mikroskopische Präparate. 8. Mikroskopische Photographien. — III. Sammlungen und Lehrmittel für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Bericht von Herrn Dr. W. Pichler in Wien. — **Uhren. Classe XXIII.** Bericht von Herrn Carl Kohn, Ingenieur in Wien: Allgemeines. I. Uhrenbestandtheile. II. Pendeluhren. III. Taschenuhren und Chronometer. — Allgemein interessant, aber weniger in den Kreis des Archivs gehörend, sind der von Herrn Professor Dr. E. Hanslick in Wien verfasste sehr ausführliche Bericht über Musik-Instrumente. Classe X. und der von den Herren Professor Dr. C. Cessner und Dr. W. Pichler in Wien verfasste Bericht über Apparate und Instrumente für Heilkunst.

Die Namen der prämiirten Aussteller sind überall angegeben, und sehr lehrreiche Angaben über statistische Verhältnisse finden sich in reichlichem Maasse. Aeusserlich ist dieser treffliche Ausstellungs-Bericht von der berühmten Buchhandlung Wilhelm Braumüller in Wien mit nichts zu wünschen übrig lassender Eleganz ausgestattet.

Vermischte Schriften.

Aufgaben aus der Mathematik für grössere Vierteljahrsarbeiten der Primaner. Zum hundertjährigen Jubiläum des Königlichen Pädagogiums bei Züllichau zusammengestellt von Dr. W. Erler, Professor und Oberlehrer. Mit zwei Figurentafeln. Jena. Fr. Frommann. 1867. 8°.

Diese Sammlung, deren verdienstliche Herausgabe zunächst durch das hundertjährige Jubiläum einer berühmten preussischen Lehranstalt, des Königlichen Pädagogiums bei Züllichau, welches seine Gründung ursprünglich einer Privatstiftung verdankt, veranlasst worden ist, darf mit den gewöhnlichen mathematischen Aufgaben-Sammlungen nicht in eine Klasse gesetzt werden. In der wichtigen, mit grosser pädagogischer Einsicht gegebenen Ministerial-Verfügung vom 12. Januar 1856 ist mit Recht beson-

Digitized by Google

derer Werth auf grössere freiwillige Arbeiten der Primaner gelegt; zu solchen grösseren und — wir können wohl hinzusetzen — schwierigeren Arbeiten soll die vorliegende Sammlung Materialien liefern, also nicht für die gewöhnlichen fortlaufenden Klassenarbeiten. Durch diesen Zweck hat jedenfalls der Herr Verfasser seiner Schrift einen besonderen, von uns gern anerkannten Werth verliehen, indem wir nach sorgfältiger Durchsicht derselben nicht anders sagen können, als dass wir die hier zusammengestellten Aufgaben für ihrem Zweck im Ganzen recht wohl entsprechend halten, weshalb wir auch das Buch zu weiterer Beachtung recht sehr empfehlen, ohne mit dem Herrn Verfasser darüber zu rechten, ob einzelne Aufgaben zu schwer oder zu leicht sind, weil ja das Urtheil hierüber doch immer mehr oder weniger nur ein subjectives sein kann. Wir bemerken bloss, dass die Aufgaben aus allen Theilen der Elementarmathematik, welche auf Schulen — mit Einschluss der preussischen Realschulen erster Ordnung — gelehrt zu werden pflegen, entlehnt sind, und in folgende Hauptrubriken zerfallen: **Vorbemerkungen** (über einzelne besondere Begriffe, Bezeichnung, u. s. w.). — **Erste Abtheilung.** Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra (in 17 Unterabtheilungen). — **Zweite Abtheilung.** Aufgaben aus der Planimetrie (in 15 Unterabtheilungen). — **Dritte Abtheilung.** Aufgaben aus der (ebenen und sphärischen) Trigonometrie (sehr reichhaltig in 38 Unterabtheilungen). — **Vierte Abtheilung.** Aufgaben aus der Stereometrie und der höheren Geometrie (in 15 Unterabtheilungen). — **Anhang.** Physikalische Aufgaben (Fall und Wurfbewegung; Hebel und Gravitation; Hohlspiegel und Linse; Spiegelung, Brechung und Farbenzerstreuung).

Wir halten das Buch entschieden für ein recht brauchbares Hülfsmittel für Unterrichtszwecke, und empfehlen es nochmals recht sehr zur Beachtung.

Taschenbuch der Mathematik. Tabellen und Formeln zum Gebrauche für den Unterricht an höheren Lehranstalten und zur Anwendung bei den in der Praxis vorkommenden Berechnungen. Berechnet von Dr. W. Ligowski, Lehrer an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule in Berlin. Mit Holzschnitten. Berlin. Ernst & Korn. 1867.

Dieses äusserlich recht hübsch ausgestattete und, dem Zwecke eines solchen Buchs entsprechend, möglichst compendiös ein-

Digitized by Google

gerichtete Taschenbuch enthält eine reiche Sammlung von Tafeln und Formeln, die sich über alle Theile der sogenannten reinen Mathematik von den niedrigsten bis zu den höchsten erstrecken, und wohl dem praktischen Bedürfniss in den meisten Fällen vollkommen genügen möchten. Die natürlich auf das Nothwendigste beschränkten numerischen Tafeln enthalten Manches, was man in ähnlichen Büchern nicht findet, z. B. ein Täfelchen zur Ermittelung der hyperbolischen Functionen, Tafeln für wichtige bestimmte Integrale, Tafeln zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch die Gauss'schen Logarithmen u. s. w. Auch finden sich Tafeln zur Vergleichung der wichtigsten Maasse, Gewichte und Münzen, einiges Astronomische, eine Tafel der Längen und Breiten der wichtigsten Sternwarten u. s. w. Aus allen diesen Gründen glauben wir das hübsche Büchlein, von dem wir mit Vergnügen nähere Kenntniss genommen haben, recht sehr zur weiteren Beachtung empfehlen zu dürfen.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 12.).

Band LIV. Heft V. Gintl: Eine Quetschbahn neuer Construction. S. 665. — Jelinek: Ueber die mittlere Temperatur zu Wien, nach 90jährigen Beobachtungen, und über die Rückfälle der Kälte im Mai. S. 671. — Fritsch: Kalender der Fruchtreife für die Flora von Oesterreich. S. 757. — v. Haidinger: Herrn Director Julius Schmidt's (in Athen) Beobachtung der Meteore in der Nacht vom 13.—14. November 1866. S. 771. — Schmidt: Beobachtung der Meteore in der Nacht des 13. zum 14. November 1866. S. 775. — Weiss: Berechnung der Sonnenfinsternisse des Jahres 1867. (Mit 2 Karten). S. 796.

Band LV. Heft I. Unferdinger: Die Summe der Logarithmus- und Arcustangens-Reihe mit alternirenden Zeichengruppen. S. 75. — Frischauf: Studien aus der Zahlentheorie. S. 113. — v. Haidinger: Der Meteorit von Simonod. S. 127. — Derselbe: Die Tageszeiten der Meteoritenfälle verglichen. (Mit einer Beilage). S. 131. — Lielegg: Ueber das Spectrum der Bessemerflamme. S. 153.

Band LV. Heft II. v. Haidinger: Die Tageszeiten der Meteoritenfälle verglichen (II. Reihe). (Mit einer Tabelle). S. 185. — v. Littrow: Bestimmung der Meridiandifferenz Leipzig-Dablitz für die von Herrn Generallieutenant J. J. Bayer vorgeschlagene Mitteleuropäische Gradmessung (Auszug). S. 195. — Koutny:

Digitized by Google

Auch Mittheilungen von Heis, Denza, Mme. Catherine Scarpellini in Rom, Terby, Florimond, Cavalier. p. 455. — Sur l'authenticité des lettres de Charles-Quint adressées à Rabelais. p. 478. — Essai sur les limites à poser à la mesure de précision des observations immédiates; par M. le capitaine d'état-major E. Adan. p. 480. — Lettres de Charles-Quint à Rabelais. Herr Ad. Mathieu theilt einen autographischen Brief von Karl V. mit, welcher der Bibliothek von Bourgogne gehört. Ein Facsimile eines anderen Briefes des grossen Kaisers an die Königin Maria, geschrieben zu Augsburg den 18. September 1551, ist hier mitgetheilt. „La classe (des Lettres) s'abstient de prononcer un jugement sur l'identité d'origine de ces documents.“ p. 544. — Réflexions sur l'enseignement des sciences en Belgique; par M. le général Nerenburger. (Von besonderem allgemeinen Interesse für das Unterrichtswesen). p. 563. — Eine zur Beantwortung der gestellten Preisaufgabe: „Déterminer et montrer en quoi consiste la supériorité relative des méthodes géométriques sur les méthodes analytiques, et réciproquement“ eingegangene Schrift konnte für preiswürdig nicht erkannt werden.

36me Année, 2me Sér., T. XXIII. Deux nouveaux mémoires sur la capillarité, par M. E. Bède. Rapport de M. Plateau. p. 4. — Corrélation entre le pouvoir réfringent et le pouvoir calorifique de diverses substances, par M. Montigny. Rapport de M. A. Kekulé. p. 53. Rapport de M. Plateau. p. 68. — Mésures d'altitudes barométriques, prises à la tour de la cathédrale d'Anvers, par des vents de directions et de vitesses différentes; par M. Montigny. Rapport de MM. Duprez et Ad. Quetelet. p. 74. — Loi générale de la probabilité des erreurs, étendue à tous les genres d'observations immédiates; par M. le capitaine Adan. Rapport de M. Liagre. p. 76. — Des lois mathématiques concernant les étoiles filantes; par M. Ad. Quetelet. p. 78. — Sur les orbites des ètoiles filantes; par M. R.-P. Greg; lettre à M. Ad. Quetelet. p. 92. — Sur la corrélation entre les variations diurnes de l'aiguille magnétique et les changements de temps; par M. Chacornac; lettre à M. Ad. Quetelet. p. 93. — Mésures d'altitudes barométriques prises à la tour de la cathédrale d'Anvers par des vents de directions et de vitesses différentes; par M. Montigny. p. 125. — Loi générale de la probabilité des erreurs etendue à tous les genres d'observations immédiates; par M. le capitaine Adan, professeur à l'École militaire. p. 148. — Sur l'heure des chutes d'aérolithes; par M. Ad. Quetelet. p. 225. — Note sur les tremblements de terre en

1865, avec suppléments pour les années antérieures, de 1843 à 1864; par M. Perrey. Rapport des MM. Duprez et Ad. Quetelet. p. 373. — Observations des temperatures faites chaque jour de la période décennale, 1854 à 1863, à l'Observatoire Royal de Bruxelles, au moyen de thermomètres colorés et à différentes hauteurs; par M. Ad. Quetelet. p. 374. — Sur l'intégrale définie qui représente la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $(\alpha+\beta)^m$; par M. E. Catalan. p. 402. — Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler, et sur quelques intégrales définies; par M. Catalan. Rapport de M. Liagre. p. 432. — Sur la tension des lames liquides (2me note); par M. Van der Mensbrugghe. Rapports des MM. Plateau et E. Catalan. p. 440. — Sur l'origine des étoiles filantes et des aérolithes, et sur l'heure des chutes observées; communication de M. Ad. Quetelet. p. 443. — Sur la tension des lames liquides; par M. G. Van der Mensbrugghe. p. 448. — Études de balistique expérimentale; par M. le lieutenant d'artillerie Le Boulengé. Rapport de M. Liagre. p. 688. — Publication des Annales météorologiques de l'Observatoire Royal. — Sur l'héliographie et la sélénographie. — Orages observés à Bruxelles et à Louvain, du 7 février jusqu'à la fin de mai 1867; communications de M. Ad. Quetelet. p. 695. — Orages observés en Belgique depuis le 1er janvier jusqu'à la fin de mai 1867.

Wir haben schon früher die Aufmerksamkeit unserer Leser auf das treffliche Journal:

The Educational Times and Journal of the College of Preceptors. London. C. F. Hodgson & Son, 1. Gough Square, Fleet Street. 4°.

hingelenkt, und thun dies hier von Neuem. Es liegen uns jetzt vor: der, wie jeder andere, aus zwölf Monatsnummern bestehende 19. Band (from April 1866 to March 1867. London. 1867. 4°.) und die übrigen seit dem März dieses Jahres bis jetzt erschienenen sämmtlichen Nummern. Das Journal ist, wie ja schon der Titel besagt, dem Schulwesen im Allgemeinen, und allen in dessen Kreis gehörenden Wissenschaften, gewidmet; aber jede Monatsnummer enthält namentlich auch eine sehr grosse Anzahl theils ungelöster, theils gelöster mathematischer Aufgaben, die fast sämmtlich sehr grosses Interesse darbieten, so dass wir nicht einen Augenblick anstehen, dieses Journal für eine der wichtigsten und reichhaltigsten Sammlungen mathematischer Aufgaben zu

halten, und als eine solche dringend zur sorgfältigsten Beachtung zu empfehlen. Die Aufgaben sind, wie vielleicht Mancher glauben dürfte, keineswegs bloss aus dem Kreise der sogenannten niederen Mathematik, sondern aus allen mathematischen Wissenschaften, bis zu den höchsten und schwierigsten, gewählt, und die bedeutendsten englischen Mathematiker betheiligen sich unausgesetzt eifrigst an jeder Nummer, wie wir denn fast in allen Nummern Namen wie: Hirst, Sylvester, De Morgan, Cayley, Thomson, Townsend, Tucker, Salmon u. s. w. u. s. w. antreffen, die wir hier unter sehr vielen anderen — ohne alle besondere Absicht — so aufzählen, wie sie uns gerade zufällig in die Augen fallen. Möge daher keiner unserer Leser versäumen, sich in den Besitz dieses trefflichen Journals zu setzen; seine Erwartungen werden gewiss vollständig erfüllt, vielleicht übertroffen werden.

Nachtrag zu Physik.

Im Begriff, dieses Heft zu schliessen, geht uns noch zu:

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von Dr. C. Jelinek. II. Band. Nr. 22. Ausgegeben den 15. November 1867. (S. oben). — Diese Nummer enthält die sehr zu beachtende Abhandlung: Benützung des Maximum- und Minimum-Thermometers zur Bestimmung der monatlichen und jährlichen Mitteltemperatur, von Prof. v. Lamont, mit sehr lehrreichen Bemerkungen zu diesem Aufsatze von dem Herrn Herausgeber; ausserdem die Abhandlung: Ueber „Detraction" eines Windes und über Monsuns, d. s. periodische, anhaltende, jahreszeitliche Aspirationswinde, abgezweigt von einem Hauptwinde, von A. Mühry. (Schluss); endlich Kleinere Mittheilungen.

Ausserdem sind uns so eben zugegangen die regelmässigen Fortsetzungen (bis October 1867) der: Annales météorologiques de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées, aux frais de l'état.; durch deren ununterbrochene Herausgabe sich, wie die Leser aus dem Literar. Ber. Nr. CLXXXV. S. 14. wissen, Herr A. Quetelet ein neues so grosses Verdienst erwirbt.

Digitized by Google

Wichtige Büchercataloge, Preislisten von Instrumenten und Aehnliches.

Wir machen die Leser auf den folgenden uns zugesandten Katalog besonders aufmerksam:

Katalog einer aussergewöhnlich reichen Sammlung mathematischer und astronomischer Bücher aus dem antiquarischen Lager von T. O. Weigel, Buchhändler in Leipzig. Fünftes Supplement des antiquarischen Lagerkatalogs. 1867.

Es enthält diese Sammlung von Nr. 22058 bis 22797 in der That eine „aussergewöhnlich“ grosse Anzahl der seltensten, vorzüglich älteren mathematischen und astronomischen Werke, welche namentlich für die Geschichte der Mathematik und Astronomie von der grössten Wichtigkeit sind, und dieser Katalog des altberühmten antiquarischen und überhaupt buchhändlerischen Geschäfts des Herrn T. O. Weigel ist daher auch an sich schon nicht ohne allgemeineres literarisches Interesse. Dass die seltensten und berühmtesten Ausgaben der griechischen Mathematiker: des Euclides, Archimedes, Apollonius, Ptolemäus u. s. w. nicht fehlen, versteht sich hiernach wohl von selbst. Die Preise halten sich, wie es uns scheint, überall in den Gränzen verhältnissmässiger Billigkeit. Daher glauben wir nochmals zu der sorgfältigsten Beachtung dieses Katalogs, der jedenfalls auf einer höheren Stufe steht als gewöhnliche antiquarische Bücherkataloge, dringend auffordern und auf denselben aufmerksam machen zu müssen.

Preis-Liste von Modellen nach Professor Dr. F. Redtenbacher's Werken für den Maschinenbau, ausgeführt von Chr. Schröder & Co., polytechnisch-mechanische Anstalt in Frankfurt a. M.

Wir empfehlen dieses Verzeichniss einer reichen Sammlung von Maschinen-Modellen allen Lehrern der Maschinenlehre recht sehr zur Beachtung. Der Inhalt ist folgender: Modelle nach Professor Dr. F. R. Resultaten für den Maschinenbau. Nr. 1. — Nr. 73. — Modelle nach Professor Dr. F. R. Bewegungs-Mechanismen. Nr. 75. — Nr. 208. — Modelle von Wasser-Rädern, ausgeführt nach Professor Dr. F. R. Theorie und Bau der Wasser-Räder. Nr. 209. — Nr. 227. —

Digitized by Google

Modelle von Maschinen, welche vorzugsweise durch Menschenkraft bewegt werden. Maschinenbau. I. Band. Nr. 228.—Nr. 261.

Preis-Verzeichniss der mathematischen, optischen und physikalischen Instrumente des mechanischen Instituts von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel. Cassel. 1867. 8⁰.

Dieses Preis-Verzeichniss der allgemein bekannten berühmten Werkstätte enthält 557 Nummern, und erstreckt sich über fast alle Theile der Astronomie, Geodäsie, des Nivellirens, der Markscheidekunst, des Zeichnens oder der graphischen Darstellung überhaupt, der Physik (einschliesslich Waagen und Gewichte), der Optik, der Meteorologie. Bekanntlich werden die Preise von Herrn Breithaupt mässig gestellt, und das Verzeichniss verdient daher die Beachtung aller Lehrer der Mathematik und Physik recht sehr.

Einige Berichtigungen zu der Abhandlung Thl. XLVII. Nr. XXIII.

S. 269. Z. 16 v. o. statt 90^0 lies 60^0.
„ „ „ 18 „ „ 90^0 „ 60^0.
„ „ „ 10 v. u. „ „über“ lies „unter“.
„ 281. Z. 12 v. o. muss der Bruch noch mit $\frac{2}{c}$ multiplicirt werden.
„ 296. Z. 11 „ und Z. 9 v. u. erhält das x unter dem Radical im Nenner den Exponenten 3.

(Später werden diese Berichtigungen gelegentlich auch in's Archiv selbst aufgenommen). G.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LXXXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

F. Giesel, Entstehung des Newton-Leibnitz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. 4°. Delitzsch. 12 Ngr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Herm. Gerlach, Lehrbuch der Mathematik. 2. Thl. Elemente der Planimetrie. 2. verm. u. verb. Aufl. Dessau. ½ Thlr.

Arithmetik.

A. Dilling, Sammlung von Beispielen zur Einübung der Grundoperationen der allgem. Arithmetik. gr. 8°. Mühlhausen. 5 Ngr.

G. Emsmann, Höhere algebr. Gleichungen zum Gebrauch in Realschulen und Gymnasien bearb. gr. 8°. Halle. 12½ Ngr.

Ed. Fürstenau, Neue Methode zur Darstellung u. Berechnung der imagin. Wurzeln algebr. Gleichungen. gr. 8°. Marburg. 8 Ngr.

H. G. Köhler, Logarithm.-trigonometr. Handbuch. 10. Ster.-Ausg. Lex.-8°. Leipzig. 27 Ngr.

B. Möllmann, Vorschule der Arithmetik. gr. 4°. Rostock. ¼ Thlr.

K. A. Otto, Anleitung zur Buchstabenrechnung und Algebra. 8°. Leipzig. 8 Ngr.

N. Ruland, Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Buchstabenrechnung. gr. 8°. Bonn. 1½ Thlr.

Geometrie.

J. Flink und E. Pfaff, Geometrischer Anschauungs- und Darstellungsunterricht. 1. Thl. qu. 4°. 2. verb. Aufl. Freiburg i. Br. ½ Thlr.

Digitized by Google

F. A. Köcher, Stereometrie, neu bearbeitet von Dr. M. Sadebeck. gr. 8. Breslau. 13½ Ngr.

J. H. Niemeyer, Form-Messlehre oder der geometrische Anschauungs-Unterricht in der Volksschule. gr. 8°. Oldenburg. 20 Ngr.

H. Pfaff, Neuere Geometrie. 2 Thle. gr. 8°. Erlangen. 2 Thlr. 15 Ngr.

J. W. Straub, Geometrie für Mittelschulen. gr. 8°. Aarau. 20 Ngr.

Trigonometrie.

J. Dienger, Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 3. verb. Aufl. gr. 8°. Stuttgart. 2 Thlr. 4 Ngr.

Fr. Roese, Sphärische Trigonometrie für Schulen. 8°. Wismar. ⅓ Thlr.

Mechanik.

L. Schläfli, Lösung einer Pendel-Aufgabe. gr. 4°. Bern. 18 Ngr.

Astronomie.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 2. Jahrg. 1867. 1. Heft. gr. 8°. Leipzig. ½ Thlr.

Physik.

C. Bruhns, Resultate aus den meteorolog. Beobachtungen in den Jahren 1760 bis 1865. 2. Jahrg. gr. 4°. Leipzig. 2⅓ Thlr.

G. B. Brunner, Die Organismen und die Wärmebewegung auf der Erdoberfläche. gr. 8°. Leipzig. 18 Ngr.

A. Drechsler, Das Wetterglas. Vademecum der Witterungskunde. 16. Leipzig. ⅔ Thlr.

N. Radakowitsch, Zur Wärmelehre. gr. 8°. Göttingen. 1⅔ Thlr.

S. Subic, Lehrbuch der Physik für Ober-Gymnasien. Zweite vermehrte und verbesserte Aufl. gr. 8°. Pest. 2⅓ Thlr.

Bei uns erschien:

Die wohlgetroffene Photographie des Herausgebers dieses Archivs der Mathematik und Physik, Professors Dr. J. A. Grunert. Visitenkart.-Form. In ganzer Figur und Brustbild. Preis 10 Sgr.

C. A. Koch's Verlagshandlung in Greifswald.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LXXXVI.

Arithmetik.

Dr. P. Bachmann, Theorie der complexen Zahlen, welche aus zwei Quadratwurzeln zusammengesetzt sind. gr. 4. Berlin. $\frac{1}{3}$ Thlr.

G. Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. 2. Ausg. Lex.-8. Berlin. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Dr. H. Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. 1. Thl. gr. 8. Leipzig. 1 Thlr. 24 Ngr.

Dr. H. Lorberg, Formelsammlung als Grundlage für den Unterricht in den Elementen der Arithmetik. gr. 8. Ruhrort. $\frac{1}{4}$ Thlr.

M. Reiss, Beiträge zur Theorie der Determinanten. gr. 4. Leipzig. 1 Thlr.

M. A. Stern, Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung. gr. 4. Göttingen. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Geometrie.

Dr. A. Benecke, Die geometrische Hypothesis in Platon's Menon. gr. 4. Elbing. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Jac. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2. Thl. gr. 8. Leipzig. 4 Thlr.

Dr. O. Stolz, Die Axen der Linien zweiter Ordnung in allgem. trimetr. Punkt-Coordinaten. Lex.-8. Wien. 4 Ngr.

Trigonometrie.

Dr. H. Lorberg, Leitfaden zum Unterricht in der Trigonometrie. gr. 8. Ruhrort. cart. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Digitized by Google

Geodäsie.

H. Kröhncke, Hanbuch zum Abstecken der Curven. 5. Aufl. gr. 16. Leipzig. In engl. Einb. 18 Ngr.

Astronomie.

H. Vogel, Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen. gr. 8. Leipzig. 1 Thlr.

Physik.

Dr. Fr. Burckhardt, Die Erfindung des Thermometers und seine Gestaltung im 17. Jahrh. gr. 4. Basel. $\frac{5}{6}$ Thlr.

R. Clausius, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie. 2. Abth. gr. 8. Braunschweig. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

H. W. Dove, Ueber die mittlere und absolute Veränderlichkeit der Temperatur der Atmosphäre. gr. 4. Berlin. 1 Thlr. 2 Ngr.

W. Haidinger, Die Tageszeiten der Meteoritenfälle. 1. und 2. Reihe. Lex.-8. Wien. 3 Ngr.

Prof. Dr. E. Winkler, Lehre von der Elasticität und Festigkeit. 1. Thl. 1. Hälfte. gr. 8. Prag. 1 Thlr. 16 Ngr.

Vermischte Schriften.

Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 26. (Register)-Bd. gr. 4. Wien. $16\frac{2}{3}$ Thlr.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LXXXVII.

Arithmetik.

A. M. T. S. Boetius, De institutione arithmetica libri duo ed. Friedlein. 8°. Leipzig. 1 Thlr. 21 Ngr.

J. Dienger, Grundriss der Variationsrechnung. gr. 8°. Braunschweig. 1 Thlr.

Fr. Hofmann, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Thl. 3. Aufl. 8°. Bayreuth. ¼ Thlr.

J. Lieblein, Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. gr. 8°. Prag. 1½ Thlr.

Fr. Močnik, Lehrbuch der Arithmetik für Unter-Gymnasien. Abth. I. Wien. 16 Ngr.

C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen. gr. 8°. Leipzig. ⅔ Thlr.

R. Schäfer, Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. gr. 8°. Berlin. 1⅔ Thlr.

L. Zmurko, Beitrag zur Theorie des Grössten und Kleinsten der Functionen mehrerer Variablen. gr. 4°. Wien. ⅓ Thlr.

Geometrie.

A. Diesterweg, Elementare Geometrie für Volksschulen. 3. Aufl. gr. 8°. Frankfurt a. M. 12 Ngr.

W. Fiedler, Methodik der darstellenden Geometrie. Lex.-8°. Wien. ⅚ Thlr.

Flink und Pfaff, Geometrischer Anschauungs-Berechnungs- und Darstellungs-Unterricht. Bd. 2. 12°. Freiburg i. Br. 1 Thlr. 4 Ngr.

H. P. H. Grünfeld, Elementar-Cursus der Geometrie. gr. 8°. Schleswig. 12 Ngr.

Fr. Močnik, Anfangsgründe der Geometrie. 12. Aufl. gr. 8°. Prag. ½ Ngr.

Digitized by Google

H. Müller, Ueber einige Gebilde, die aus den Betrachtungen von Curvensystemen erster und zweiter Ordnung entspringen. gr. 4⁰. Braunschweig. 12 Ngr.

Fr. Oehmke, Handbuch der Raumlehre für Stadtschulen. gr. 8⁰. Stettin. $12\frac{1}{2}$ Ngr.

H. Olff, Leitfaden für den Unterricht der Geometrie in den Volksschulen. 8⁰. Worms. $4\frac{1}{2}$ Ngr.

K. G. C. Staudt, Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen zweiter Ordnung. gr. 8⁰. Nürnberg. 12 Ngr.

J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. I. Thl. gr. 8⁰. Leipzig. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

A. Stubba, Aufgaben für die rechnende Geometrie. H. 3. gr. 8⁰. Leipzig. 6 Ngr.

— — Berechnungen der Aufgaben hierzu. gr. 8⁰. 6 Ngr.

R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. gr. 8⁰. Leipzig. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Mechanik.

J. Loschmidt, Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung eines Systems von Punkten. Lex.-8⁰. Wien. 3 Ngr.

Astronomie.

W. A. Argelander, Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn. 6. Bd. gr. 4⁰. Bonn. 5 Thlr.

W. Klinkerfues, Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie. gr. 8⁰. Leipzig. $\frac{1}{2}$ Thlr.

H. C. F. C. Schjellerup, Genäherte Oerter der Fixsterne. gr. 4⁰. Leipzig. $\frac{5}{6}$ Thlr.

Physik.

J. R. Mayer, Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften. gr. 8⁰. Stuttgart. 1 Thlr. 18 Ngr.

C. A. Müller, Grundlinien einer Morphologie der Wärme. gr. 8⁰. Tübingen. 18 Ngr.

Vermischte Schriften.

W. Erler, Aufgaben a. d. Mathematik. 8⁰. Jena. 24 Ngr.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LXXXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

L. F. Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm. gr. 4°. Ulm. 6 Ngr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Dr. H. Gerlach, Lehrbuch der Mathematik. 3. u. 4. Thl. 8°. Dessau. 21 Ngr.

Arithmetik.

Dr. Ed. Heis, Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. 18. Aufl. gr. 8°. Köln. 1 Thlr.

L. Natani, Variationsrechnung. gr. 8°. Berlin. $^2/_3$ Thlr.

Steck & Bielmayr, Lehrbuch der Arithmetik. gr. 8°. Kempten. $^1/_3$ Thlr.

Frz. Unferdinger, Bestimmung des Unterschiedes zwischen d. arithm. u. geometr. Mittel posit. Grössen. Lex.-8° Wien. 3 Ngr.

— — Summe der Exponential-, der Sinus- und der Cosinusreihe. Lex.-8°. Wien. 3 Ngr.

G. Vega, Manuale logaritmico-trigonometrico. Tradotto in italiano per cura di Prof. Cremona. gr. 8°. Berlin. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

Dr. J. Worpitzky, Ueber die Endlichkeit von bestimmten Integralen und Reihensummen. gr. 8°. Berlin. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Geometrie.

A. Bösel, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie für Stadt- und Landschulen. 8°. Eisleben. 4 Ngr.

Dr. A. Dilling, Sammlung von Aufgaben aus der algebr. oder rechnenden Geometrie. Halle. 2 Thlr.

Digitized by Google

K. Honegger, Auflösungen der Aufgaben des Leitfadens für den Unterricht in der Geometrie. 8°. Zürich. 6 Ngr.

Dr. E. Koutny, Construction des Durchschnittes einer Geraden mit den Kegelschnittslinien. Lex.-8°. Wien. 6 Ngr.

Largiadér, Anleitung zum Körpermessen. gr. 8°. Zürich. ¼ Thlr.

Dr. M. A. F. Prestel, Vorschule der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig. 1½ Thlr.

J. Terlinden, Vorschule zur Geometrie für Lehrer, Seminaristen u. s. w. 8°. Neuwied. 3 Ngr.

Dr. W. Zehme, Lehrbuch der ebenen Geometrie. gr. 8°. Hagen. 16 Ngr.

Trigonometrie.

Dr. Röttok, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. gr. 8°. Hamburg. ½ Thlr.

Geodäsie.

M. Doll, Anleitung zum Zeichnen geometr. Pläne und topographischer Karten. qu. gr. Fol. Carlsruhe. 6 Thlr.

Mechanik.

Dr. Dornheim, Bewegungsgesetze für Kräfte, welche der Entfernung proportional sind. Minden. 8 Ngr.

Astronomie.

Prof. Ed. Heis, Sammlung von fünf Sternkarten. qu. Fol. Köln. 1868. 8 Ngr.

Ed. Oehl, Versuch einer Theorie über Kometen. gr. 8°. Wien. ½ Thlr.

X. Schechner, Unumstösslicher Nachweis, dass die Erde nicht um die Sonne herumgehe. 8°. München. ¼ Thlr.

Ed. Weiss, Bericht über die Beobachtungen während der ringförmigen Sonnenfinsterniss vom 6. März 1867 in Dalmatien. Lex.-8°. Wien. ½ Thlr.

Physik.

Chr. Schulz, Meteor. Beobachtgn. Fol. Sigmaringen. ⅓ Thlr.

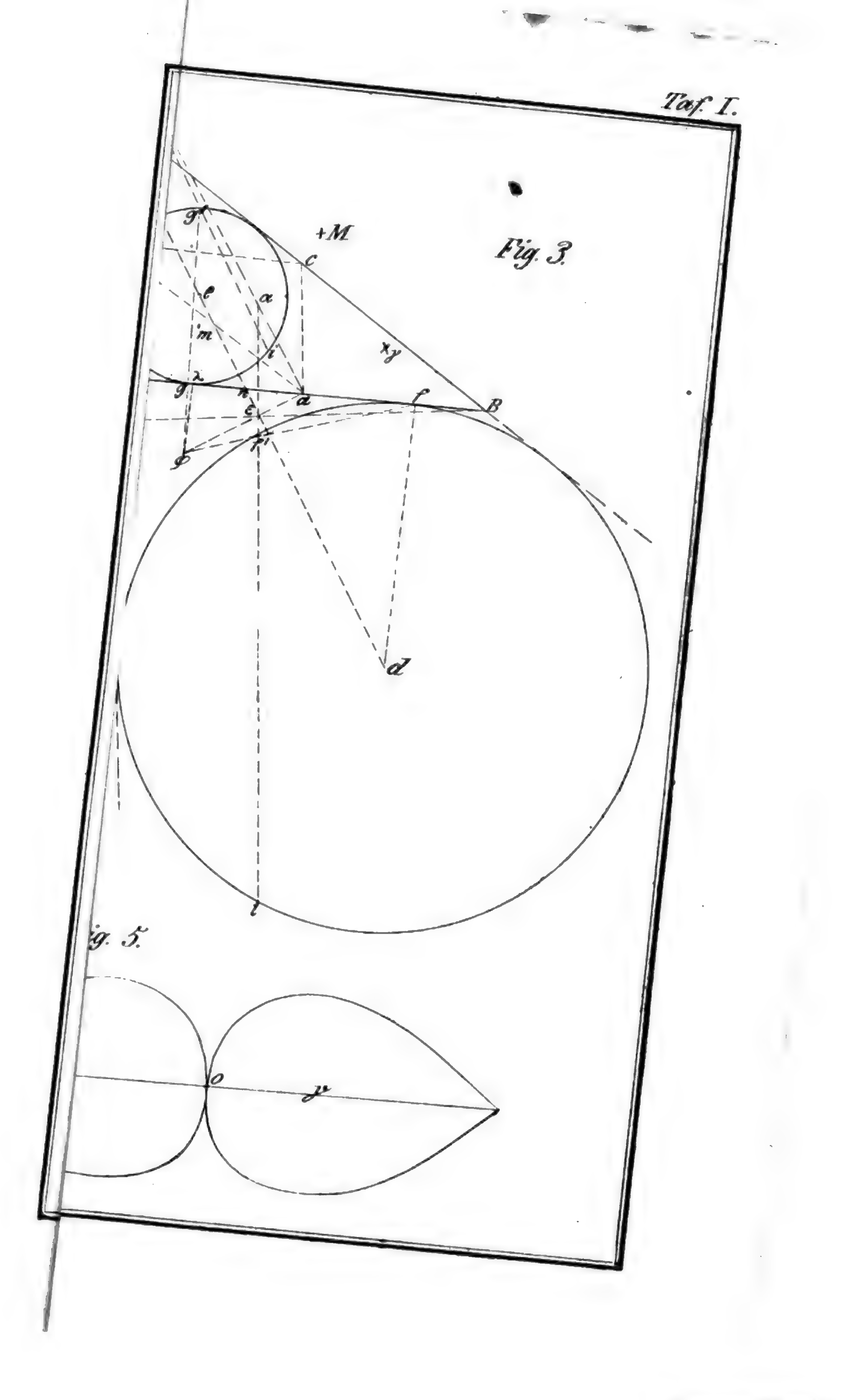
J. Tyndall, Die Wärme, betrachtet als eine Art der Bewegung. gr. 8°. Braunschweig. 2⅔ Thlr.

Vermischte Schriften.

Dr. W. Ligowski, Taschenbuch der Mathematik. 8°. Berlin. ⅔ Thlr.

Mélanges, mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Academie imp. des sciences de St. Petersbourg. T. IV. Livr. 1. Lex.-8°. Leipzig. 18 Ngr.

Digitized by Google


Taf. I.
Fig. 3.
+M
c
x y
B
f
a
d
l
ig. 5.
o
p

Taf. II.

Fig. 7.

C A

Fig. 6.

A

C C^V C^III C^IV C^II C^I B^V B^IV B^III B^II B^I B

Fig. 8.

C B c C

B A^II A^I A A^IX A^VIII

Fig. 1.

u a' f d' a v A b e' g b' c k' h w c_1'

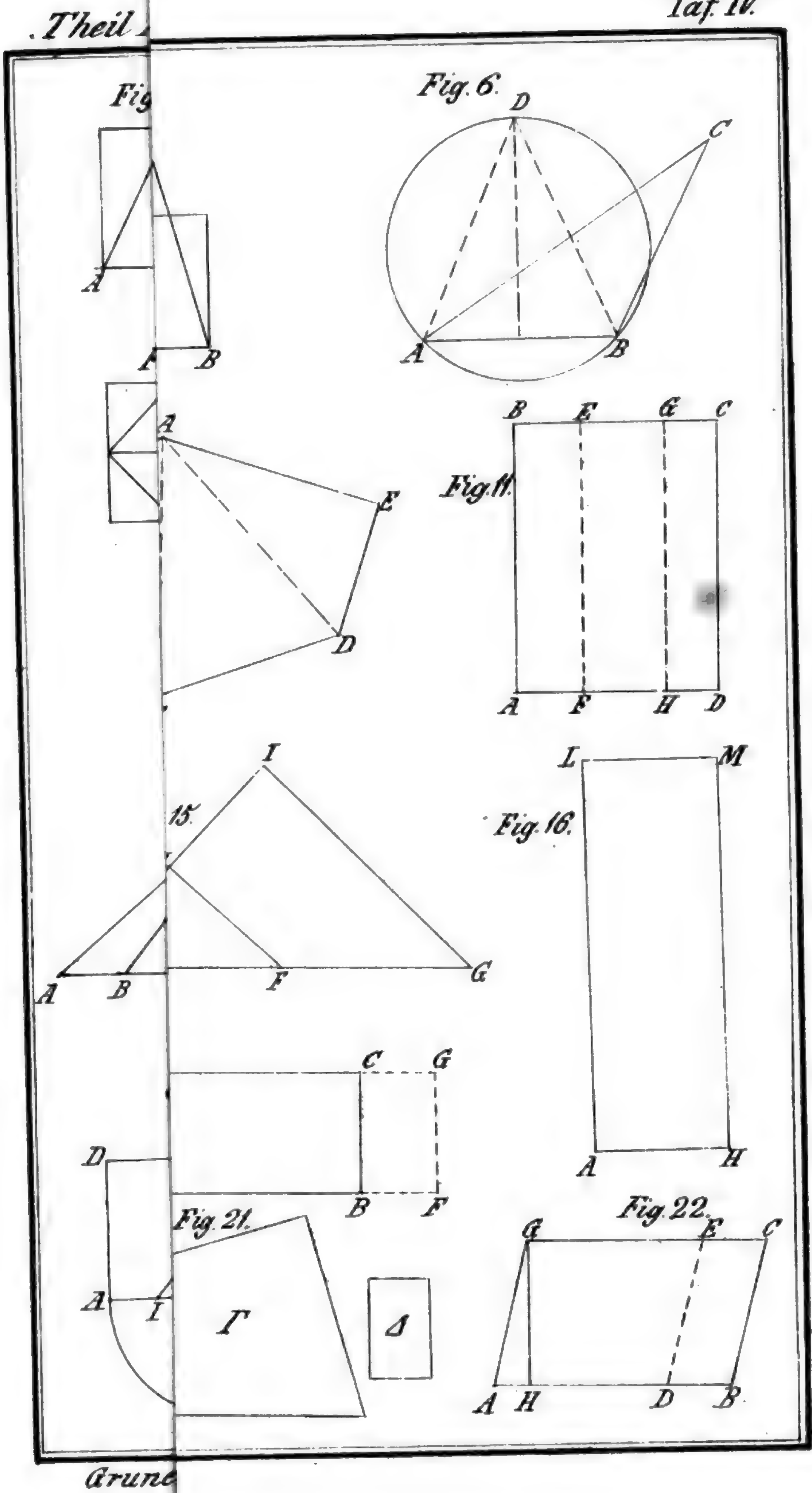
Fig. 4.

A E G F C B D A

Fig. 5.

C B A E D

Digitized by Google



Theil I
Taf. IV.
Fig. 6.
Fig. 11.
15.
Fig. 16.
Fig. 21.
Fig. 22.
Γ
Δ
Grune

Digitized by Google

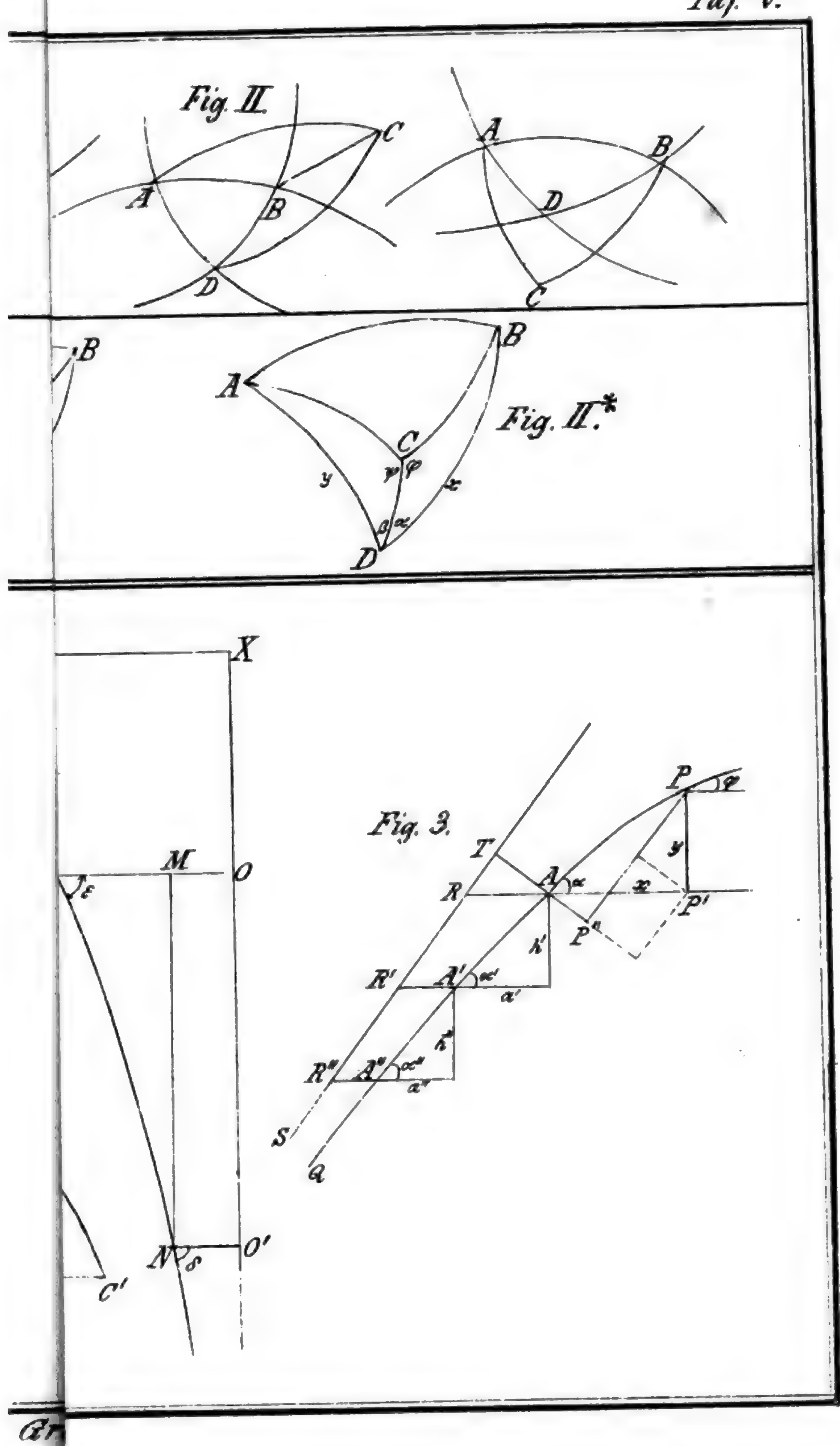


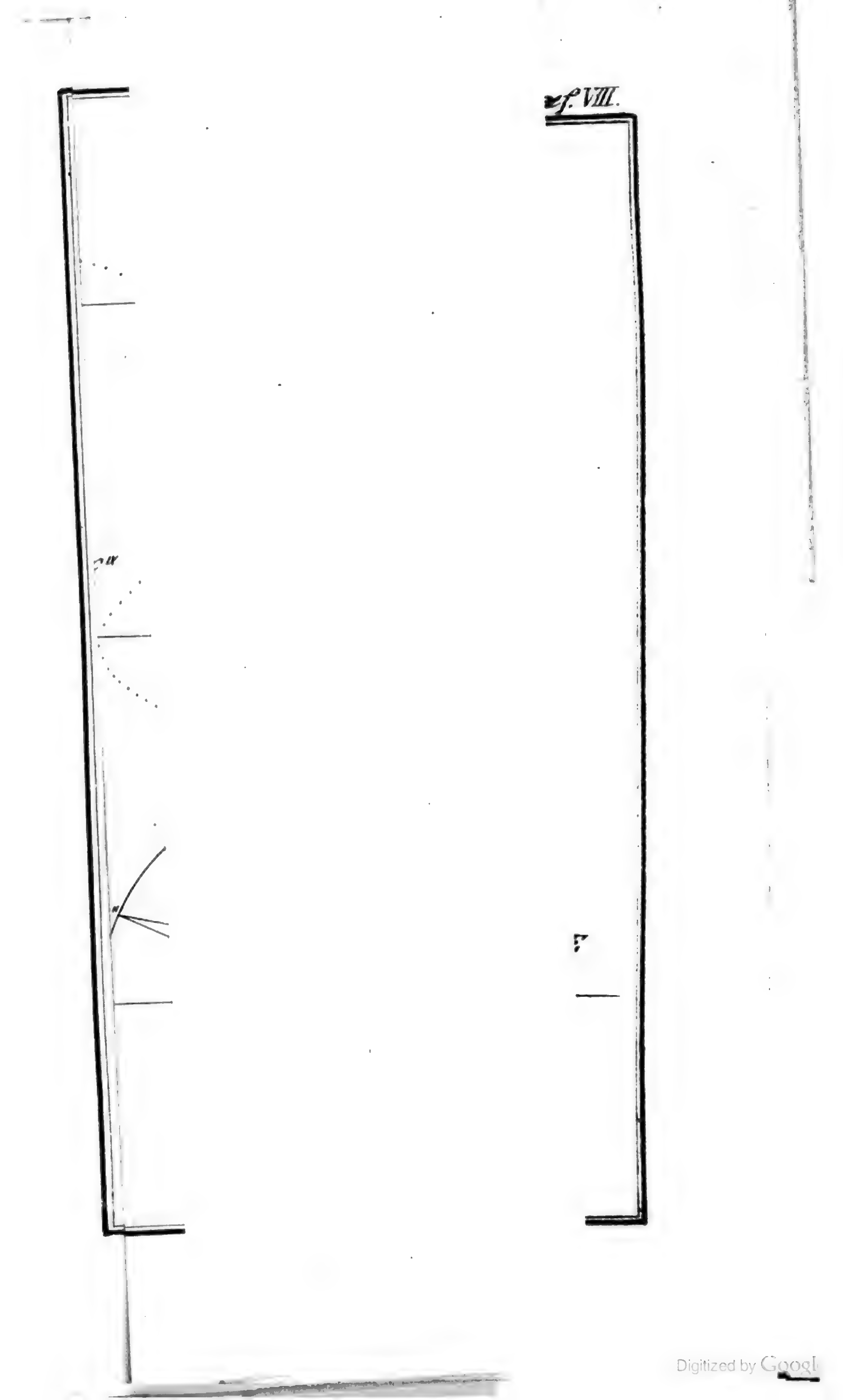
Fig. II.
A
B
C
D
A
B
C
D
B
A
B
C
D
Fig. II.*
y
x
φ
α
β
X
M
O
ε
N
δ
O'
C'
Fig. 3.
P
φ
T
A
α
R
y
x
P'
P''
R'
A'
α'
k'
a'
R''
A''
α''
k''
a''
S
Q

Digitized by Google

Fig. 5.

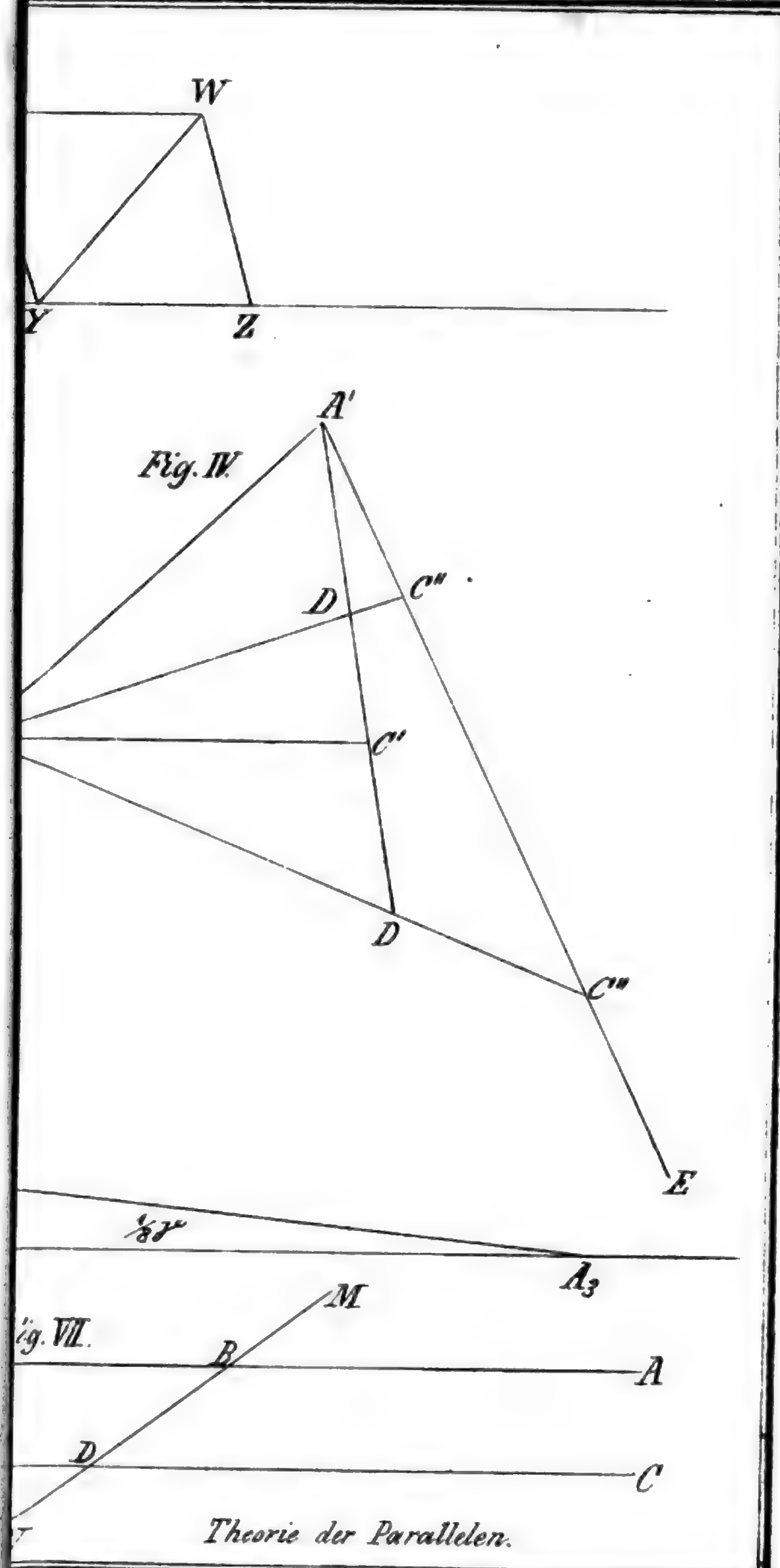
Fig. 8.

Fig. 11.



Digitized by Google

Taf. VIII.



Theorie der Parallelen.

Digitized by Google

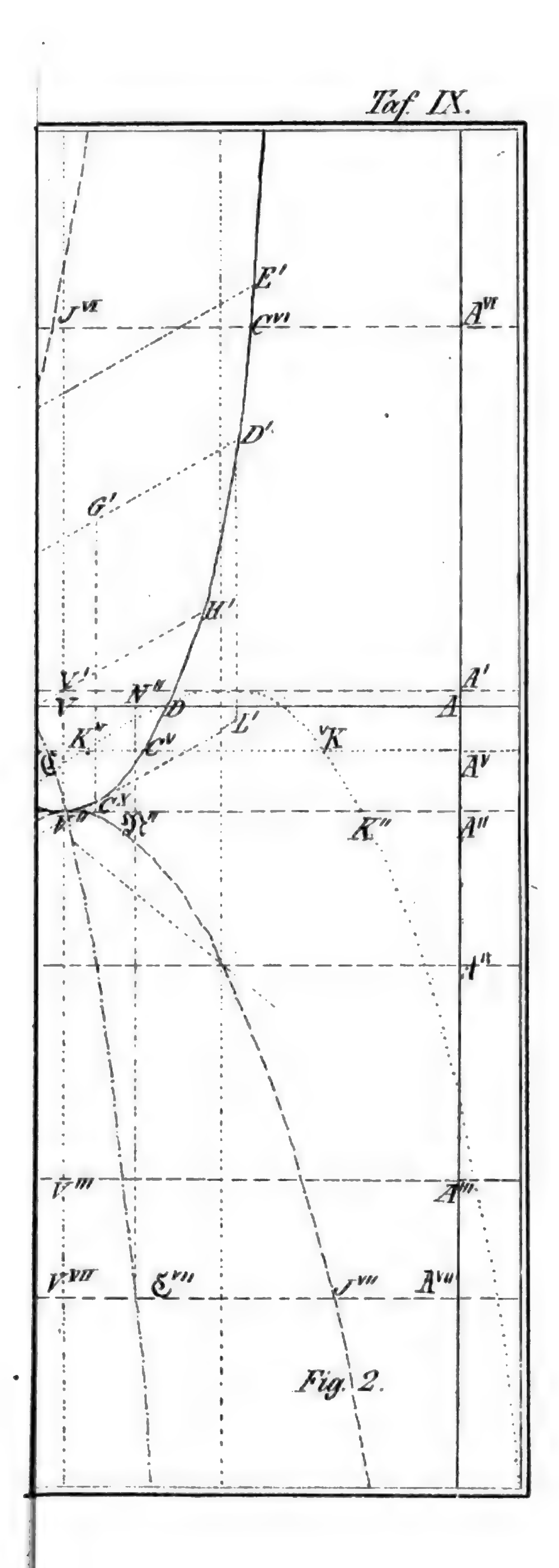

E'
J^VI
C^VI
A^VI
D'
G'
H'
V'
A'
N^II
V
D
A
L'
K^V
C^V
^VK
A^V
C^X
V^II
K''
A''
A^II
V^III
A^III
V^VII
J^VII
A^VII

Fig. 2.

Fig. 6.
X
𝔐
A
𝔐°
Fig. 7.
A'
Fig. 8.
X
X'''
𝔐
A
A'''
𝔑
A
A''
A''
A''
𝔐₀

Digitized by Google

Fig. 5,2.

Fig. 6.

Fig. 7,4.

Fig. 12.

Digitized by Google

ndlung über das von drei Berührenden einer
gebildete Dreieck No. XXXI.

$A_1A_2 = a_0$	M ist der Mit-
$A_2A_0 = a_1$	telpunkt des um
$A_0A_1 = a_2$	das Viereck
$A_2F = r_{01}$	$A_0FA_1A_2$
$A_0F = r_{12}$	beschriebenen
$A_1F = r_{20}$	Kreises.

In unserem Verlage erschien:

Martus, H. C. E., Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Classen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen an preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate als ein Uebungsbuch herausgegeben. Die Sammlung enthält **1500** Aufgaben aus allen Abschnitten der Geometrie und Arithmetik, die in den oberen Classen auf Gymnasien und Realschulen behandelt werden. I. Band: „Aufgaben." 8°. geh. Preis 28 Sgr.

— — II. Band: „Resultate." Preis 28 Sgr.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung, Th. Kunike.
Greifswald.

In unserem Verlage erschien:

Weitere Ausführung
der
politischen Arithmetik.

Von
Dr. L. Oettinger,
Grossherzoglich Badischem Hofrathe, Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. Br., Ritter des Zähringer Löwen-Ordens.

Lex.-8°. Broch. 2 Thlr.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung, Th. Kunike.
Greifswald.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite.

XXIX. Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten biquadratischen Gleichung. (Zweite Abtheilung der Abhandlung Thl. XLV. Nr. II.) Von Herrn Ferdinand Kerz, Major und Commandeur des Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt 363

XXX. Note sur les formules d'addition des fonctions elliptiques. Par Monsieur Dr. E. G. Björling à Westerås en Suède. (Extrait de l'Aperçu des Transactions de l'Academ. des sciences de Stockholm, séance du 18e avril 1866.) 399

XXXI. Ueber das von drei Berührenden einer Parabel gebildete Dreieck. Von dem Herausgeber 403

XXXII. Elementar-geometrischer Beweis des Satzes:
„Dreiseitige Pyramiden von gleichgrossen Grundflächen und gleichgrossen Höhen haben gleichgrosse Volumina."
Von Herrn Professor Dr. Hessel an der Universität in Marburg 433

XXXIII. Wurfbewegung im widerstehenden Mittel. (Zweiter Nachtrag zu der Abhandlung in Thl. XLVI. Nr. XX. S. 361.) Von Herrn Dr. A. M. Nell, Lehrer an der technischen Schule zu Darmstadt 449

XXXIV. Vermischtes aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Herrn Dr. Ludwig Matthiessen in Husum 457

XXXV. Ueber ein algebraisches Problem von Herrn Barnaba Tortolini in Rom, die cubischen Gleichungen betreffend. Von Herrn Dr. Ludwig Matthiessen in Husum 460

XXXVI. Ueber einen Satz von der Ellipse. Von dem Herausgeber 462

XXXVII. Ueber einen Satz vom Kreise. Von dem Herausgeber 468

XXXVIII. Miscellen von dem Herausgeber 477

CLXXXVIII. Literarischer Bericht 1

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Fre

Digitized by Google